MA2BP_PGE, 27. ledna 2014

1. V eukleidovském prostoru $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ jsou dány body:

$$A = [1, -1, 1],\ B = [1, 0, -1],\ C = [3, 2, -1],\ E = [0, 2, 2].$$

+ Dokažte, že body A, B, C, E jsou v obecné poloze.
+ Určete souřadnice bodů D, F, G, H tak, aby těchto osm bodů tvořilo vrcholy rovnoběžnostěnu s podstavami $ABCD$ a $EFGH$.
+ Rozhodněte, zda počátek souřadné soustavy patří do konvexního obalu množiny $\{A, B, C, E\}$.
+ Určete vzdálenost bodu E od roviny $\alpha = ABC$.

2. V eukleidovském prostoru $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$ jsou dány afinní podprostory:

$$\mathcal{B} = \{x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 1,\ x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 1\},$$
$$\mathcal{C} = \{[0, 0, 1, 0] + t(1, 4, 0, 0) + s(0, 1, 0, -1) : t, s \in \mathbb{R}\}.$$

+ Určete dimenze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, parametrické vyjádření $\mathcal{B}$ a rovnicové (neparametrické) vyjádření $\mathcal{C}$.
+ Určete vzájemnou polohu podprostorů $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
+ Rozhodněte, zda jsou podprostory $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ kolmé.

3. Udejte příklad dvou podprostorů v $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, které mají netriviální průnik a odchylku $45°$.

4. V eukleidovském prostoru $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$ jsou dány vektory

$$\mathbf{v}_1 = (3, 0, 1, 0),\ \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 0),\ \mathbf{v}_3 = (0, 2, 0, 1).$$

+ Určete vektorový součin $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$ a ukažte, že velikost tohoto vektoru je rovna objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$:

$$\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3\| = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3).$$

+ Dokažte, že předchozí rovnost platí obecně.

5. V eukleidovské rovině $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ jsou dány transformace f_1 a f_2 následujícími maticemi (vzhledem ke standardním homogenním souřadnicím):

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

+ Dokažte, že složená transformace $f = f_2 \circ f_1$ je shodnost a určete její samodružné body.
+ Určete druh a určující prvky transformace $f = f_2 \circ f_1$.

6. Udejte příklad afinní transformace v rovině, která má aspoň dva samodružné body a modul roven -1.

7. Dokažte, že pro každou podobnou transformaci platí, že samodružné směry odpovídající různým charakteristickým číslům jsou navzájem kolmé.

Každý úkol je hodnocen 6 body, maximální možný zisk je 84 bodů; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 42 bodů.