MA2BP_PGE, 31. ledna 2014

1. V eukleidovském prostoru $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ jsou dány body:

$$A = [2,0,1],\ B = [1,3,1],\ C = [-1,3,1],\ D = [-1,1,1],\ E = [2,0,3].$$

+ Dokažte, že body A, B, C, D leží v jedné rovině a že bod E v této rovině neleží.
+ Rozhodněte, zda jsou body B a D souměrné podle přímky AC.
+ Určete souřadnice zbylých vrcholů hranolu, který má podstavy $ABCD$ a $EFGH$.
+ Určete objem hranolu $ABCDEFGH$.

2. V eukleidovském prostoru $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$ jsou dány afinní podprostory:

$$\mathcal{B} = \{x_1 - x_2 = 2,\ x_2 + x_3 = 1,\ x_3 + x_4 = 5\},$$
$$\mathcal{C} = \{[4,1,1,1] + t(1,0,1,0) : t \in \mathbb{R}\}.$$

+ Určete dimenze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, parametrické vyjádření $\mathcal{B}$ a rovnicové (neparametrické) vyjádření $\mathcal{C}$.
+ Určete vzájemnou polohu podprostorů $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
+ Určete vzdálenost podprostorů $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

3. Udejte příklad dvou podprostorů ve vhodném eukleidovském prostoru, které mají odchylku 90° a přitom nejsou kolmé.

4. V eukleidovském prostoru $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$ jsou dány vektory

$$\mathbf{v}_1 = (-1,0,1,1),\ \mathbf{v}_2 = (0,1,0,2),\ \mathbf{v}_3 = (2,1,-2,0).$$

+ Definujte pojem vektorového součinu a určete $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$.
+ Dokažte, že obecně platí: vektorový součin je nulový právě tehdy, když určující vektory jsou lineárně závislé.

5. V eukleidovské rovině $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ jsou dány transformace:

f_1 = otáčení okolo bodu $S = [2,-2]$ o úhel 90°,
f_2 = posunutí o vektor $\mathbf{u} = (4,0)$.

+ Určete analytická vyjádření těchto dvou transformací.
+ Určete druh a určující prvky transformace $f = f_2 \circ f_1$.

6. Udejte příklad afinní transformace v rovině, která má modul různý od 1 a bod $A = [6,0]$ zobrazuje na bod $A' = [2,4]$.

7. Dokažte, že každou podobnost lze vyjádřit jako složení shodnosti a stejnolehlosti.

Každý úkol je hodnocen 6 body, maximální možný zisk je 84 bodů; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 42 bodů.