

# GEOMETRIE

MA2BP\_PGE, podzim 2013



---

## Předmluva

---

*Omnia sponte fluant, absit violentia rebus*

J.A.K.

Toto je osnova k přednášce z Geometrie pro období podzim 2013. Cíle kurzu jsou vytčeny v úvodní kapitole. Tamtéž konkretizujeme předpoklady k uspokojivému studiu, mezi něž patří zejména přiměřené znalosti školské a konstrukční geometrie a lineární algebry.

Za užitečnou učebnici lineární algebry považujeme např. [Zl]. Z dostupných učebnic geometrie nejčastěji používáme [HoJa] a [Sek]. Pro souvislosti, zajímavosti a ilustrace často otevíráme [Be, Co] a [Ha]. S oblibou taky odkazujeme na poznatky z loňského kurzu Konstrukční geometrie, viz [Ří, Žá]. Neopomenutelným zdrojem inspirací jsou samozřejmě Eukleidovy Základy [Eu]. Z citované literatury ještě upozorňujeme na povedené závěrečné práce [Dv, Po] a [El].

Předmět je zakončen zkouškou, jež sestává z písemné a ústní části; přístup k písemné části je podmíněn zápočtem ze cvičení, přístup k ústní zkoušce je podmíněn alespoň 50% úspěšností u písemky.

**Upozornění:** Organizace tohoto materiálu je provizorní a nejspíš se bude během semestru trochu měnit; sledujte průběžně změny v aktualizacích.

Brno, 7. ledna 2014

Vojtěch Žádník



<b>I Úvod</b>	<b>7</b>
1 Základy . . . . .	7
2 Shrnutí a výhledy . . . . .	9
3 Předpoklady a cíle . . . . .	11
<b>II Afinní a projektivní geometrie</b>	<b>13</b>
4 Afinní prostory a podprostory . . . . .	13
5 Afinní zobrazení a afinní geometrie . . . . .	17
6 Afinní souřadnice a vyjádření afinních podprostorů . . . . .	20
7 Vzájemné polohy podprostorů a některé polohové úlohy . . . . .	27
8 Uspořádání na přímce, konvexní množiny, barycentrické souřadnice a další . . . . .	33
9 Projektivní geometrie . . . . .	37
<b>III Eukleidovská geometrie</b>	<b>47</b>
10 Eukleidovské prostory, shodná a podobná zobrazení . . . . .	47
11 Kolmost a kolmý průmět vektoru . . . . .	53
12 Vzdálenosti a odchylky podprostorů . . . . .	57
13 Obsahy, objemy a další . . . . .	68
<b>IV Geometrická zobrazení</b>	<b>77</b>
14 Opakování . . . . .	77
15 Analytické vyjádření . . . . .	82
16 Samodružné prvky . . . . .	86
17 Základní transformace . . . . .	90
18 Další klasifikace a poznámky . . . . .	97
<b>V Dodatky</b>	<b>105</b>
19 Pseudo-eukleidovské prostory . . . . .	105
20 Další geometrická zobrazení . . . . .	105
21 Kuželosečky a kvadriky . . . . .	105
22 Kleinova geometrie přímek . . . . .	106
23 Lieova geometrie kružnic . . . . .	106

24	Grupové akce . . . . .	106
25	Frízové a tapetové vzory . . . . .	107
26	Třetí Hilbertův problém . . . . .	108
	<b>Návody a řešení</b>	<b>111</b>
	<b>Literatura</b>	<b>115</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>117</b>
	<b>Seznam tabulek</b>	<b>119</b>
	<b>Rejstřík</b>	<b>121</b>
	<b>Přílohy</b>	<b>125</b>

## 1 Základy

Základy eukleidovské geometrie lze najít — vedle dalších věcí — v Eukleidových Základech [Eu] (cca 300 př. K.). Toto dílo představuje ucelený deduktivní výklad tehdejší matematiky odvozený z několika axiómů a postulátů. Axiómy se týkají obecných veličin, postuláty jsou ryze geometrického charakteru a vymezují základní vztahy mezi základními geometrickými objekty. V této části připomínáme několik podstatných pojmů a vztahů, ke kterým se budeme často vracet. Většinu z těchto poznatků jsme diskutovali už vloni [Žá].

### 1.1 Definice

Definice většiny geometrických pojmů, které známe ze školy, lze najít v téměř stejném znění v Základech; jedná se úvodní definice zejména ke knihám I a XI. Některé z těchto definic budeme mírně zobecňovat, proto si je tady připomeneme.

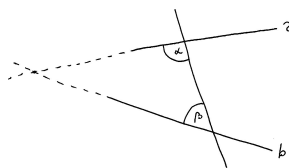
- Pokud jsou vedlejší úhly vymezené dvěma protínajícími se přímkami shodné, pak každý z těchto úhlů se nazývá *pravý* a přímky se nazývají *kolmé*.
- *Kružnice* je rovinný útvar tvořený koncovými body všech úseček, které jsou navzájem shodné a jejichž opačné koncové body splývají (a to ve *středu* kružnice).
- Přímky jsou *rovnoběžné*, pokud leží v téže rovině a nemají žádný společný bod.
- Přímka je *kolmá* k rovině, pokud je kolmá ke všem přímkám, které v ní leží.
- Dvě roviny jsou *kolmé*, pokud přímky, které leží v jedné z těchto rovin a jsou kolmé k průsečnici rovin, jsou také kolmé ke druhé rovině.
- Roviny jsou *rovnoběžné*, pokud se neprotínají.
- Apod.

Některé definice v Základech jsou poněkud vágní. Ty zde neuvádíme a dáme jim přesný význam později — postupně můžete odhadovat, které to jsou.



## 1.2 Postuláty

- (i) Každé dva různé body spojuje přímka.
- (ii) Každou přímku lze na každé straně libovolně prodloužit.
- (iii) Lze vytvořit kružnici s libovolným daným středem procházející libovolným jiným bodem.
- (iv) Všechny pravé úhly jsou shodné.
- (v) Když přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé, pak tyto dvě přímky (dostatečně prodlouženy) setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.



Obrázek 1.1: Eukleidův dodatečný postulát:  $\alpha + \beta < 2R \implies a$  a  $b$  se protínají, a to vlevo.

V (i) a (ii) je přímkou zřejmě myšlena úsečka, a to jediná. Postuláty (i)–(iii) představují přípustné konstrukční nástroje, tzv. eukleidovské pravítko a kružítko.

Postulát (i) se týká **incidence**, postulát (iv) nám říká něco o základní relaci **shodnosti**. Uvědomte si, že v Eukleidově pojetí je shodnost docela abstraktní koncept: z pochopitelných důvodů nemůže zahrnovat žádné číselné vyjadřování délek úseček, velikostí úhlů apod., jak to běžně chápeme dnes!

Poněkud komplikovaný postulát (v) bývá nahrazován tzv. postulátem o **rovnoběžkách**, se kterým je ekvivalentní:

- Každým bodem ke každé přímce prochází právě jedna rovnoběžka.

Postulát (v) je poprvé použit ve větě I.29,<sup>1</sup> což je známá věta o střídavých úhlech.

## 1.3 Axiómy nevyřčené

V Základech se používá několik předpokladů, aniž by byly jakkoli formulovány. Přesný axiomatický popis, založený na tom Eukleidově, pochází od D. Hilberta [Hi] (kolem 1900), viz přílohu na str. 125. V tomto systému jsou primitivními (nedefinovanými) pojmy bod, přímka a rovina; primitivní relace jsou relace incidence (náležení), uspořádání („být mezi“) a shodnosti. Pro každou z těchto relací je formulováno několik axiomů, dále pak axiomy rovnoběžnosti a spojitosti.

Eukleidovy nevyřčené axiomy se týkají hlavně uspořádání a spojitosti. Typický axiom **uspořádání** je např.:

- Pro tři různé body ležící na jedné přímce platí, že právě jeden z nich je mezi zbylými dvěma.

Tento požadavek nám mj. říká, že přímka není uzavřená křivka, což ze samotného postulátu (ii) nevyplývá. V důsledku je možné body na přímce uspořádat (a sice dvojím způsobem) a toto



uspořádání je úplné. Uvědomte si, že teprve po této přípravě je možné uspokojivě definovat pojem úsečky.

Axiómy **spojitosti** je možné nahradit jediným, tzv. Dedekindovým axiomem:

- *Pro libovolný rozklad bodů na přímce do dvou neprázdných podmnožin takových, že žádný bod jedné podmnožiny neleží mezi žádnými dvěma body druhé podmnožiny, platí: existuje bod v jedné z těchto podmnožin, který leží mezi každým bodem této podmnožiny a každým bodem druhé podmnožiny.*

V řeči uspořádání a tzv. Dedekindových řezů lze předchozí formulaci zjednodušit takto:

- *Body na přímce neobsahují (vzhledem k výše zmíněnému uspořádání) Dedekindovy řezy typu „skok“ a „mezera“.*

## 2 Shrnutí a výhledy

### 2.1 Shrnutí

*Eukleidovská* geometrie je axiomatická teorie vyhovující výše zmíněným skupinám axiomů. Axiómy eukleidovské geometrie mohou být zvoleny různě, my se odkazujeme výhradně na systém Hilbertův. Následující formulace jsou poměrně volné a tudíž nepřesné; rozumná upřesnění lze najít např. v [Co, Ha, Sek].

Pokud se pozorně probíráme základy eukleidovské geometrie, zjišťujeme, že některé definice a tvrzení jsou nezávislé na některých axiómech nebo skupinách axiomů. Např. prvních 28 tvrzení v I. knize [Eu] nezávisí na axiómu rovnoběžnosti — o těchto říkáme, že patří do tzv. *absolutní* (nebo *neutrální*) geometrie. Typickým příkladem je např. věta o vnějším úhlu v trojúhelníku.

Na druhé straně, podstatná skupina poznatků a pojmů na axiómu rovnoběžnosti závisí, ale je možné je vyvodit bez axiomů shodnosti — o těchto říkáme, že patří do geometrie *afinní*. Např. pojem středu úsečky je kupodivu afinní. Mezi známá tvrzení elementární geometrie, která jsou ve skutečnosti afinní, patří např. Menelaova věta.

Další studovanou geometrií je geometrie *projektivní*. Ta je vymezena téměř výhradně axiomy incidence — z ložiska připomínáme, že v projektivní geometrii neplatí axióm rovnoběžnosti (každé dvě přímky, které leží v jedné rovině, se protínají), ani axiomy uspořádání (projektivní přímka je uzavřená). Známa věta projektivní geometrie je např. věta Desarguesova.

Letos se budeme věnovat především geometriím eukleidovským, afinním a projektivním. Musíme však aspoň zmínit geometrie *neeuclidovské*, jež jsou známé tím, že v nich neplatí axióm rovnoběžnosti. To znamená, že k dané přímce daným bodem prochází buď více rovnoběžek (*hyperbolická* geometrie) nebo žádná rovnoběžka (*eliptická* geometrie). Axiómy popisující hyperbolickou geometrii jsou stejné jako pro eukleidovskou geometrii, akorát axióm rovnoběžnosti je nahrazen jeho negací. V eliptické geometrii neplatí axiomy uspořádání.

Bereme-li eukleidovskou geometrii jako výchozí, můžeme předchozí diskuzi ve velkých uvozkách shrnout takto:

- absolutní geometrie je eukleidovská geometrie bez rovnoběžnosti,
- afinní geometrie je eukleidovská geometrie bez shodnosti,
- projektivní geometrie je eukleidovská geometrie bez shodnosti, rovnoběžnosti a uspořádání,
- eliptická geometrie je eukleidovská geometrie bez rovnoběžnosti a uspořádání,

---

<sup>1</sup>I.29 = 29. věta v I. knize [Eu]

- hyperbolická geometrie je eukleidovská geometrie s více rovnoběžkami.

Kromě toho můžeme v podobné zkratce říct, že

- absolutní geometrie je průnikem eukleidovské a hyperbolické geometrie,
- eukleidovská geometrie je afinní geometrie se shodností,
- eliptická geometrie je projektivní geometrie se shodností,
- apod.

Ke všem těmto reformulacím máme několik dobrých důvodů. Jednak chceme naznačit, že jedna a táž věc lze nahlížet různými způsoby, jednak si připravujeme půdu pro následující výklad.

## 2.2 Výhledy

V tomto kurzu budeme geometrii studovat tzv. analyticky, lépe řečeno algebraicko-analyticky. Počátky této metody jsou spojovány se jménem R. Descarta (kolem 1637), jehož hlavním přínosem byla aplikace **algebry** k řešení geometrických úloh. Mělo by však být zřejmé, že se nemohlo jednat o analytickou geometrii, jak ji chápeme dnes!<sup>2</sup>

S průměrnou znalostí lineární (vektorové) algebry budeme umět velmi pohodlně interpretovat všemožné geometrické definice a vztahy:

- Struktura afinního prostoru na jakékoli množině je určena zobrazením, které dvěma bodům přiřazuje vektor. Všechny tyto vektory tvoří vektorový prostor, kterému budeme přezdívat zaměření afinního prostoru. Takto se rychle dostaneme ke všem základním pojmům afinní geometrie, zejména k pojmu rovnoběžnosti.
- Projektivní prostor lze vždy chápat jako afinní prostor rozšířený o „body v nekonečnu“. Body projektivního prostoru budeme reprezentovat vektory z tzv. zastupujícího vektorového prostoru, který obsahuje zaměření afinního prostoru (a je o jednu dimenzi větší).
- Obecný eukleidovský prostor je afinní prostor vybavený eukleidovskou metrikou, což je metrika kompatibilní s afinní strukturou — ta nám definuje relaci shodnosti. Eukleidovská metrika je určena skalárním součinem na zaměření.

Výhodou této algebraizace geometrie je zejména to, že většinu věcí budeme umět formulovat jednotně pro prostory libovolné dimenze. Z pochopitelných důvodů budeme postupovat induktivně (geometrie na přímce, v rovině, v prostoru), finální definice, věty a jejich zdůvodnění však budou zpravidla univerzální.

Další výhody algebraického přístupu bychom měli pozorovat při klasifikaci geometrických zobrazení. Všechny shodnosti eukleidovského prostoru tvoří grupu, tato je podgrupou grupy (bijektivních) afinních transformací, jež je zase podgrupou grupy (bijektivních) projektivních transformací, apod. Každou z těchto grup budeme umět interpretovat jako jistou maticovou grupu tak, že právě zmíněné inkluze se stanou víc než názornými. Právě pojem **transformační grupy** a její role při organizaci geometrických informací velmi ovlivnil pohled na geometrii a její další vývoj. Hlavními propagátory tohoto přístupu byli F. Klein a S. Lie (kolem 1872). V tomto duchu je ta či ona geometrie zcela charakterizována grupou odpovídajících geometrických transformací.

<sup>2</sup>V té době stále nebyla vynalezena reálná čísla...

## 2.3 Poznámky

Objev významu afinní geometrie (včetně tohoto pojmenování) je přisuzován L. Eulerovi (kolem 1748). Jako samostatná disciplína se začala afinní geometrie utvářet až po akceptování výše zmíněného Kleinova programu a úplně zdomácněla zejména díky vlivu H. Weyla (kolem 1923).

Úplné pochopení absolutní a neeukleidovské geometrie (kolem 1830) představuje jedno z nejzajímavějších dobrodružství v historii matematiky a je zásluhou J. Bolyaie, N.I. Lobačevského a C.F. Gausse.

Několik poznatků projektivní geometrie bylo známo již ve starověku, např. Pappova věta (kolem 400). Další postřehy přidávali malíři během renesance díky studiu perspektivy a tato etapa byla završena pracemi G. Desarguese a B. Pascala (kolem 1640). K dalšímu, tentokrát bouřlivému, rozvoji projektivní geometrie došlo v 19. století díky pracím V. Ponceleta, J.D. Gergonna, J. Steinera a dalších.

Ve stejném století se vyvinuly algebraické techniky, které se ukázaly být pro geometrii velmi přínosné a které budeme používat i my (soustavy lineárních rovnic, determinanty a matice). První vícerozměrné geometrické objekty byly studovány A.F. Möbiusem, J. Plückerem a W.R. Hamiltonem (kolem 1830). Později se také zrodil pojem obecné grupy, jež F. Kleinovy dovolil klasifikovat geometrie podle odpovídajících grup transformací.

Je zajímavé, že ve stejné době (kolem 1872) se objevují první přesné definice reálných čísel, a to díky G. Cantorovi (pomocí posloupností racionálních čísel) a R. Dedekindovi (pomocí již zmiňovaných řezů).

V uvedeném přehledu vývoje geometrie jsme zdůraznili pouze několik proudů, které se týkají tohoto kurzu. Ucelenější výklad lze najít např. v poslední kapitole II. dílu [Sek]. Viz též stručně, ale výstižně, pojednání [Ha<sub>2</sub>].

## 3 Předpoklady a cíle

### 3.1 Předpoklady

Předpokládáme rozumný přehled školské a konstrukční geometrie zahrnující zejména následující témata:

- klasická konstrukční geometrie v rovině a v prostoru,
- průniky a vzájemné polohy přímek a rovin v prostoru,
- konstrukce kolmice, určení vzdáleností a odchylek,
- přehled geometrických zobrazení a jejich vlastnosti.

Kromě toho potřebujeme uspokojivé dovednosti z algebry, hlavně té lineární. To mj. znamená, že ovládáme následující tématické okruhy:

- grupy, podgrupy a jejich homomorfizmy,
- vektorové prostory a podprostory, lineární zobrazení,
- soustavy lineárních rovnic,
- matice a determinanty,
- skalární součiny apod.

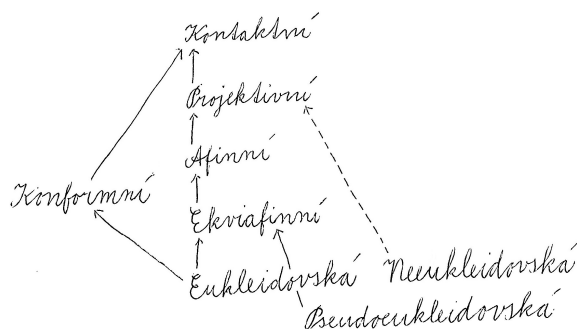
Pokud výslovně neuvádíme něco jiného, všechny vektorové prostory jsou uvažovány nad tělesem reálných čísel  $\mathbb{R}$ .

### 3.2 Cíle

Chceme co nejvíc zužítkovat nabyté algebraické znalosti na pokud možno zajímavé skupině geometrických problémů. Typické úlohy, které chceme umět (algebraicky) řešit, zahrnují např.:

- pro dva podprostory v obecném afinním prostoru určit jejich vzájemnou polohu,
- pro dva podprostory v obecném eukleidovském prostoru rozhodnout, zda jsou kolmé,
- dále určit jejich vzdálenost včetně nějaké dvojice bodů, v nichž se tato vzdálenost realizuje,
- podobně pro odchylku. . . ,
- aspoň trojím způsobem určit objem daného mnohostěnu,
- určit bod, který je souměrný k danému bodu podle daného podprostoru,
- určit transformační rovnice souměrnosti podle daného podprostoru,
- z daných transformačních rovnic rozpoznat typ a určující prvky odpovídajícího zobrazení,
- složit dvě geometrická zobrazení a určit typ výsledného zobrazení,
- určit společnou příčku čtyř mimoběžek,
- apod.

Kromě řešení těchto konkrétních problémů bychom se také měli umět zorientovat v geometrických zobrazeních a klasifikovat geometrie v Kleinově duchu. Jistou nápovědu lze najít v následujícím schématu (šipky naznačují inkluze odpovídajících transformačních grup).



Obrázek 3.2: Hierarchie geometrií, o nichž se zmiňujeme v tomto textu.

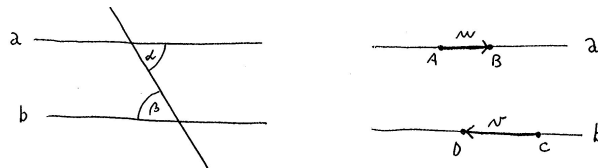
Afinní struktura na množině je zobrazení, které dvěma prvkům dané množiny přiřazuje vektor a splňuje nějaké přirozené požadavky. Toto je klíčový trik, který nám umožňuje překládat mnoho geometrických problémů do vektorové (lineární) algebry. Typickými úlohami afinní geometrie je určování vzájemné polohy podprostorů v afinním prostoru nebo konstrukce příček. Do hájemství afinní geometrie patří také konvexní geometrie, barycentrické souřadnice apod.

Projektivní geometrie je rozšířením té afinní o nevlastní prvky, tzn. „body v nekonečnu“. Projektivní popis má své výhody i specifika, kterým se věnujeme na konci této kapitoly. Výhod projektivního rozšíření si budeme užívat zejména v kapitole IV.

## 4 Afinní prostory a podprostory

### 4.1 Postřehy

Ústředním pojmem afinní geometrie je **rovnoběžnost**. První kritérium rovnoběžnosti přímek je znázorněno na obr. 4.1(a). To je přímým důsledkem tvrzení I.27 a I.29 v [Eu] a rovnoběžnost je zde charakterizována pomocí shodnosti úhlů.



Obrázek 4.1: Kritérium rovnoběžnosti přímek: (a)  $a \parallel b \iff \alpha = \beta$ , (b)  $a \parallel b \iff \mathbf{u} \text{ a } \mathbf{v}$  jsou kolineární.

V úvodu jsme slibovali, že afinní geometrii vybudujeme zcela bez pojmu shodnosti, a to algebraicky pomocí **vektorů**. V tomto duchu je rovnoběžnost přímek ekvivalentní s tím, že jejich odpovídající směrové vektory jsou lineárně závislé, viz obr. 4.1(b). Přitom si zejména všímáme,

že každé dva body  $A$  a  $B$  jednoznačně určují nějaký vektor, který značíme  $\overrightarrow{AB}$ . Toto přiřazení není jen tak ledajaké, ale má následující vlastnosti:

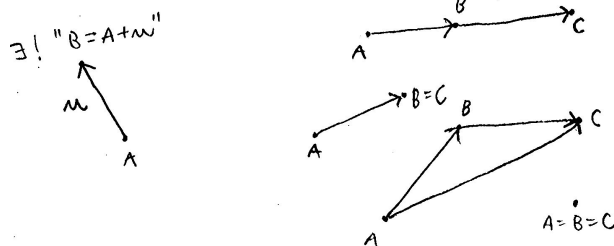
- (a) libovolný bod  $A$  a libovolný vektor  $\mathbf{u}$  jednoznačně určuje (koncový) bod  $B$  tak, že platí  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$ ,
- (b) pro libovolné body  $A, B$  a  $C$  platí:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

## 4.2 Obecná definice afinního prostoru

Předchozí pozorování jsou základem k obecné definici abstraktní afinní struktury.

**Definice.** *Afinní prostor* je neprázdná množina  $\mathcal{A}$  spolu se zobrazením  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow V$  do nějakého vektorového prostoru  $V$  (dvěma bodům  $A$  a  $B$  se přiřazuje vektor  $\overrightarrow{AB}$ ), které má výše uvedené vlastnosti (a) a (b).

Vektorový prostor  $V$  se nazývá *zaměření* afinního prostoru  $\mathcal{A}$  a značí se  $\vec{\mathcal{A}}$ .



Obrázek 4.2: Axiomy obecné afinní struktury  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow V$ : (a) pro libovolné  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{u} \in V$  existuje jediný  $B \in \mathcal{A}$  takový, že  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$ , (b) pro libovolné  $A, B, C \in \mathcal{A}$  platí:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

Vlastnost (a) nám asociuje zobrazení  $\mathcal{A} \times V \rightarrow \mathcal{A}$ , které lze interpretovat jako „umístění volného vektoru“. Koncový bod  $B$  symbolicky píšeme

$$B = A + \mathbf{u}.$$

Odtud vektor  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  často formálně zapisujeme jako

$$\mathbf{u} = B - A.$$

Všimněte si, že pro libovolný bod  $A \in \mathcal{A}$  je předpisem

$$\mathbf{u} \mapsto A + \mathbf{u}$$

☞ určeno zobrazení  $V \rightarrow \mathcal{A}$ , které je bijektivní.<sup>1</sup> Proto *dimenzí* afinního prostoru  $\mathcal{A}$  rozumíme

dimenzi jeho zaměření  $V$ . Afinní prostor dimenze 0 se nazývá triviální, afinní prostor dimenze 1, resp. 2, se přezdívá afinní přímka, resp. rovina.

Zobrazení  $\mathcal{A} \times V \rightarrow \mathcal{A}$  můžeme také interpretovat jako akci (komutativní grupy)  $V$  na množině  $\mathcal{A}$ : pro libovolný vektor  $\mathbf{u} \in V$  je odpovídající transformace  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  právě „posunutí o vektor  $\mathbf{u}$ “. Vzhledem k terminologii v podkap. 24 můžeme naši původní definici zestručnit takto:

**Definice** (ekvivalentní). *Afinní prostor* se zaměřením  $V$  je neprázdná množina  $\mathcal{A}$ , na níž  $V$  působí efektivně a tranzitivně; přitom  $V$  je vektorový prostor uvažovaný jakožto komutativní grupa.

### 4.3 Další příklady

- (1) Tzv. kanonický afinní prostor se zaměřením  $V$  je právě  $V$ , akorát zapomeneme na význačný prvek (kterým je nulový vektor). Přesněji, uvažujeme  $\mathcal{A} := V$  spolu se zobrazením  $V \times V \rightarrow V$  daným rozdílem vektorů:  $\vec{\mathbf{u}\mathbf{v}} := \mathbf{v} - \mathbf{u}$ .
- (2) Prostor řešení soustavy lineárních rovnic je buď prázdná množina nebo afinní prostor. (Jaká může být jeho dimenze, máme-li  $r$  rovnic a  $n$  neznámých?)
- (3) Další přirozené netriviální příklady známe z matematické analýzy, viz např. prostory řešení lineárních diferenciálních rovnic.
- (4) Různé podivně vyhlížející konstrukce necháváme na cvičení.

V dalším textu *standardním afinním prostorem* dimenze  $n$  míníme právě kanonický afinní prostor se zaměřením  $V = \mathbb{R}^n$ .

### 4.4 Afinní podprostory, průniky, součty a obaly

Body, přímky a roviny jsou afinní podprostory v trojrozměrném afinním prostoru. Obecně:

**Definice.** Neprázdná podmnožina afinního prostoru  $\mathcal{A}$ , která je sama afinním prostorem, se nazývá *afinní podprostor*.

Jak je dobrým zvykem u podobných definic, ve vedlejší přívláskové větě nevyslovujeme dodatek „vzhledem ke zděděné afinní struktuře“. Uvědomte si, co to přesně znamená.

Afinní podprostory dimenze 0, 1, resp. 2, nazýváme přirozeně body, přímky, resp. roviny v  $\mathcal{A}$ ; podprostory kodimenze 1 nazýváme *nadroviny* v  $\mathcal{A}$ .<sup>2</sup> (Nadrovinou v trojrozměrném prostoru je rovina, nadrovinou v rovině je přímka apod.)

Je-li  $\mathcal{B}$  afinní podprostor v  $\mathcal{A}$ , potom zaměření  $\vec{\mathcal{B}}$  je vektorovým podprostorem v zaměření  $\vec{\mathcal{A}}$ . Pro dva afinní podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v  $\mathcal{A}$  platí:

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \implies \vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{B}},$$

<sup>1</sup>Bijektivnost plyne přímo z definice afinní struktury; inverzní zobrazení  $\mathcal{A} \rightarrow V$  je dáno předpisem  $B \mapsto \vec{AB}$ . Tato pozorování stojí za jinými (ekvivalentními) definicemi afinního prostoru, jež lze najít v literatuře, viz např. [Sek, str. 19 v I. díle].

<sup>2</sup>Dimenze nadroviny v  $\mathcal{A}$  je o 1 menší než dimenze  $\mathcal{A}$ .

ale určitě ne obráceně! Nejjednodušší protipříklad můžeme vydedukovat z obr. 4.1: rovnoběžné přímký mají stejná zaměření. Toto pozorování motivuje obecnou definici **rovnoběžnosti**, viz podkap. 7.

Afinní podprostor je jednoznačně určen svým zaměřením a nějakým bodem, jímž prochází; píšeme

$$\mathcal{B} = B + U := \{B + \mathbf{u} : \mathbf{u} \in U\}, \quad (4.1)$$

kde  $B$  je nějaký bod a  $U = \vec{\mathcal{B}}$  je vektorový podprostor v  $\vec{\mathcal{A}}$ . Ke způsobům vyjádření afinních podprostorů se vrátíme v podkap. 6.

Pokud je průnik afinních podprostorů  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  neprázdný, pak je to opět afinní podprostor a zřejmě platí

$$\overrightarrow{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}.$$

Sjednocení afinních podprostorů však nemusí být podprostorem. Nejmenší afinní podprostor, který obsahuje  $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ , se nazývá *součtem* a značí se  $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ . Přitom platí

$$\overrightarrow{\mathcal{B} + \mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} + \langle \vec{BC} \rangle, \quad (4.2)$$

kde  $B \in \mathcal{B}$  a  $C \in \mathcal{C}$  jsou libovolné body a součet na pravé straně je součtem vektorových podprostorů. **Pozor:** Sčítanec  $\langle \vec{BC} \rangle$  v (4.2) nelze obecně vynechávat! Rozmyslete si na konkrétních příkladech, kdy je naopak nadbytečný (tzn. kdy je  $\vec{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ ).

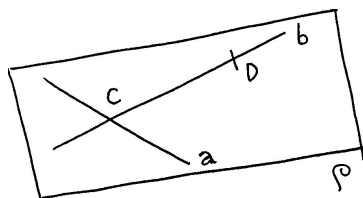


Definice součtu podprostorů je speciálním případem tzv. afinního obalu:

**Definice.** *Afinní obal* neprázdné podmnožiny  $X \subseteq \mathcal{A}$  je nejmenší afinní podprostor v  $\mathcal{A}$ , který obsahuje  $X$ .

O bodech  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$  říkáme, že jsou v *obecné poloze*, pokud má afinní obal množiny  $\{A_1, \dots, A_k\}$  dimenzi  $k - 1$ .

Na body v obecné poloze se budeme celkem často odvolávat; uvedená definice je zřejmě ekvivalentní tomu, že vektory  $\overrightarrow{A_1 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_{k-1}}$  jsou lineárně nezávislé.



Obrázek 4.3: Průnik a součet afinních podprostorů:  $a \cap b = C$ ,  $C + D = b$ ,  $a + C = a$ ,  $a + D = \rho$ ,  $a + \rho = \rho$ ,  $a \cap \rho = a$ , ...



Z definicí, předchozích pozorování a špetky samostatného uvažování vyplývá:

**Věta.** *Uvažme neprázdnou podmnožinu  $\mathcal{B}$  v afinním prostoru  $\mathcal{A}$ . Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- *podmnožina  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  je afinním podprostorem,*



- podmnožina  $\{\overrightarrow{XY} : X, Y \in \mathcal{B}\} \subseteq \overrightarrow{\mathcal{A}}$  je vektorovým podprostorem,
- existuje bod  $B \in \mathcal{A}$  a vektorový podprostor  $U \subseteq \overrightarrow{\mathcal{A}}$  tak, že  $\mathcal{B} = B + U$ ,
- pro libovolné různé body  $B, C \in \mathcal{B}$  platí, že také celá přímka  $B + C$  patří do  $\mathcal{B}$ .

## 4.5 Cvičení



Rozhodněte, zda následující podmnožiny jsou afinní podprostory; pokud nejsou, určete jejich afinní obaly:

- (1) nějaký interval v  $\mathbb{R}^1$ , dva body v  $\mathbb{R}^2$ , koloběžka v  $\mathbb{R}^3$ , dvě mimoběžné přímky v  $\mathbb{R}^4$ , sjednocení všech příček dvou mimoběžek v  $\mathbb{R}^4$  apod.,
- (2) celočíselná řešení rovnice  $x + y + z = 5$  (o třech neznámých) v prostoru všech jejích řešení,
- (3) konstantní funkce v prostoru řešení diferenciální rovnice  $y'' - 4y' + 5y = 10$ .

# 5 Afinní zobrazení a afinní geometrie

## 5.1 Úvod

Dobře známé (a v jistém smyslu základní) afinní zobrazení je rovnoběžné promítání nebo osová afinita. Obecná definice afinního zobrazení, kterou známe z konstrukční geometrie, vypadá takto:

**Definice.** Zobrazení mezi afinními prostory se nazývá *afinní*, pokud

- (a) zobrazuje kolineární body na kolineární body,
- (b) zachovává rovnoběžnost přímek,
- (c) zachovává dělicí poměr bodů na přímce.

Bijektivní afinní zobrazení se jmenuje *afinita*.

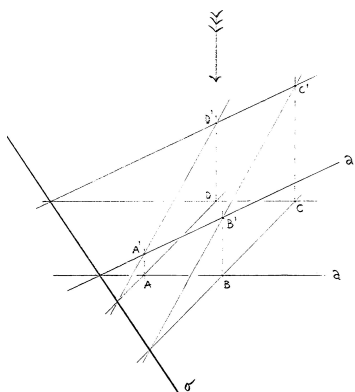
Kolineární body jsou body, které leží na jedné přímce, tedy také body splývající. Podmínka (b), resp. (c) tedy má smysl pouze v případě, kdy se různé kolineární body nezobrazí do jednoho bodu. Z (a) a (c) plyne, že afinní zobrazení zobrazuje přímky na přímky, resp. na body (tedy nikoli např. na úsečky). Předchozí tři podmínky nejsou úplně nezávislé:

- za předpokladu (a) jsou vlastnosti (b) a (c) ekvivalentní.



Odtud plyne, že zobrazení mezi afinními prostory dimenze aspoň 2 je afinní právě tehdy, když

- zobrazuje přímky na přímky nebo body,
- zachovává rovnoběžnost přímek.



Obrázek 5.4: Osová afinita.

Pro afinní zobrazení na přímce je podmínka (a), resp. (b) splněna automaticky, resp. triviálně; afinní transformace přímky jsou zcela charakterizovány podmínkou (c).

Uvědomte si, že všechny pojmy zmiňované v definici jsou srozumitelné v jakémkoli afinním prostoru  $\mathcal{A}$ :

- (a) *přímka* je jednorozměrný afinní podprostor v  $\mathcal{A}$ ,  
 (b) přímky jsou *rovnoběžné*, pokud jejich zaměření splývají,  
 (c) *dělicí poměr* trojice různých kolineárních bodů  $(A, B, C)$  (v tomto pořadí) je reálné číslo  $d$  takové, že platí  $\overrightarrow{AC} = d \cdot \overrightarrow{BC}$ , což většinou zapisujeme symbolicky jako

$$d = (ABC) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}. \quad (5.3)$$

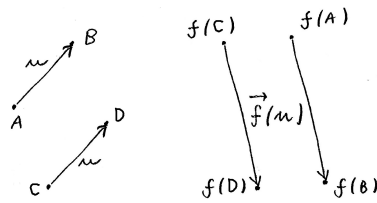
## 5.2 Algebraická definice afinního zobrazení

Nyní chceme sloučit naše dosavadní představy s abstraktními definicemi z odst. 4.2. V každém konkrétním příkladě afinního zobrazení  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ , který známe, si můžeme povšimnout, že  $f$  indukuje zobrazení mezi zaměřeními  $\vec{f} : \vec{\mathcal{A}} \rightarrow \vec{\mathcal{A}'}$ , a to tak, že

$$\vec{f}(\mathbf{u}) = \overline{f(A)f(B)}, \text{ kde } \mathbf{u} = \overline{AB}. \quad (5.4)$$

Uvědomte si, že vektor  $\mathbf{u}$  může být reprezentován nekonečně mnoha dvojicemi bodů. To, že je tímto předpisem vůbec dobře definováno zobrazení, je přímým důsledkem vlastností (a)–(c) z definice 5.1. Odtud také plyne, že indukované zobrazení  $\vec{f}$  není jen tak ledajaké, ale je **lineární**. Právě tato pozorování vysvětlují, proč je následující definice ekvivalentní s definicí 5.1.





Obrázek 5.5: Afinní zobrazení indukuje lineární zobrazení mezi zaměřenými.

**Definice** (ekvivalentní). Zobrazení mezi afinními prostory  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  se nazývá *afinní*, pokud existuje lineární zobrazení mezi zaměřenými  $\vec{f} : \vec{\mathcal{A}} \rightarrow \vec{\mathcal{A}'}$  tak, že pro libovolné body  $A, B \in \mathcal{A}$  platí (5.4). Bijektivní afinní zobrazení se jmenuje *afinita*.

Jako je lineární zobrazení homomorfismem vektorových prostorů, je afinní zobrazení homomorfismem afinních prostorů. Jinými slovy můžeme afinní zobrazení definovat jako zobrazení mezi afinními prostory, které zachovává afinní strukturu. Tato, příp. předchozí definice pouze vysvětluje, co to přesně znamená.

$$\begin{array}{ccc}
 a \times a & \xrightarrow{f \times f} & a' \times a' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vec{a} & \xrightarrow{\vec{f}} & \vec{a}'
 \end{array}$$

Obrázek 5.6: Zobrazení  $f$  je afinní, pokud  $\vec{f}$  existuje, je lineární a diagram komutuje.

Afinní zobrazení  $f$  jednoznačně určuje lineární zobrazení  $\vec{f}$ , avšak tato korespondence není vzájemně jednoznačná — stačí si uvědomit, že indukované lineární zobrazení ke každému posunutí

$$A \mapsto A + u$$

je identické zobrazení. Obecněji dvě afinní zobrazení indukují jedno a to samé lineární zobrazení právě tehdy, když se liší o nějaké posunutí. Afinní zobrazení  $f$  je tedy zcela určeno indukovaným lineárním zobrazením  $\vec{f}$  a obrazem jednoho (libovolného) bodu. Z uvedeného mimo jiné vyplývá následující poznatek: ◀

**Důsledek.** Afinní zobrazení afinního prostoru dimenze  $n$  je určeno obrazem  $n + 1$  bodů v obecné poloze.

### 5.3 Afinní geometrie

V Kleinově duchu je afinní geometrie studiem vlastností, které jsou invariantní vůči afinním zobrazením. V definici 5.1 jsme vyjmenovali tři takové invarianty. Současně jsme si uvědomili, že

tyto nejsou úplně nezávislé. Ve skutečnosti jsou vlastnosti (a)–(c) navzájem svázány víc, než by jeden čekal:

**Věta** (Základní věta afinní geometrie). *Bijektivní zobrazení mezi afinními prostory dimenze alespoň 2, které zobrazuje přímky na přímky, je nutně afinní zobrazení.*

Toto je skutečně zajímavý výsledek, jehož důkaz rozhodně není triviální (hlavní myšlenky tohoto důkazu jsou představeny např. v [Be, část 2.6]). Všimněte si, že o zobrazení nepředpokládáme žádnou spojitost ani nic podobného. Podstatná je právě a jenom jeho **bijektivnost**. Jinými slovy:

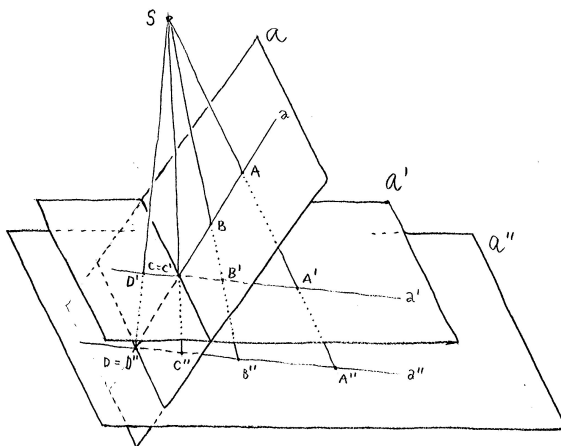
- bijektivní zobrazení splňující (a) v definici 5.1 splňuje také (b) a (c).



## 5.4 Cvičení

Rozhodněte, zda následující zobrazení jsou afinní:

- (1) středové promítání mezi rovinami  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{A}'$ , příp.  $\mathcal{A}'$  a  $\mathcal{A}''$  naznačenými na obr. 5.7,
- (2) kruhová inverze, stejnoolehlost, příp. osová kolineace v rovině,
- (3) transformace afinní přímky  $\mathcal{A} = \mathbb{R}$  zadaná předpisem  $f(x) = x^n + 1$ , kde  $n = 0, 1, 2, \dots$



Obrázek 5.7: Středové promítání mezi rovinami.

## 6 Afinní souřadnice a vyjádření afinních podprostorů

### 6.1 Afinní repér a souřadnice

Souřadnicové vyjádření bodu v afinním prostoru je relativní — závisí na souřadné soustavě. Obvyklou souřadnou soustavu v afinním prostoru je tzv. afinní souřadná soustava, jež je určena souřadnými osami a „jednotkami“ na osách. Společný bod souřadných os je tzv. počátek

a „jednotkové“ vektory na osách tvoří bázi  $\vec{A}$ . Afinní souřadná soustava je určena tzv. afinním repérem a naopak:

**Definice.** Afinní repér v  $\mathcal{A}$  je určen počátkem  $O \in \mathcal{A}$  a bází  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  zaměřením  $\vec{A}$ . Souřadné osy jsou přímky  $x_i = O + \langle \mathbf{e}_i \rangle$ . Afinní souřadnice bodu  $A$  vzhledem k afinnímu repéru  $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  jsou právě souřadnice vektoru  $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$  v bázi  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$ .

Souřadnice bodu  $A$  v uvedeném repéru obvykle píšeme

$$A = [a_1, a_2, \dots],$$

kde  $a_i$  jsou jednoznačně určená reálná čísla taková, že platí

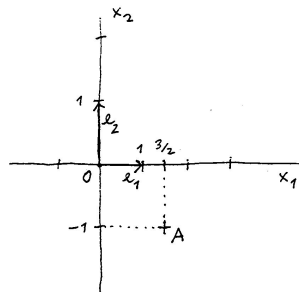
$$A = O + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots$$

Pokud potřebujeme rozlišovat mezi body (prvky  $\mathcal{A}$ ) a souřadnicemi (prvky  $\mathbb{R}^n$ ), budeme tyto rozlišovat tloušťkou písma. Uvědomte si, že pro libovolný afinní repér v  $\mathcal{A}$ , je přiřazením

bod  $A \mapsto \mathbf{A} =$  souřadnice bodu  $A$  vzhledem k danému repéru

definováno bijektivní afinní zobrazení mezi afinním prostorem  $\mathcal{A}$  a standardním afinním prostorem  $\mathbb{R}^n$ .

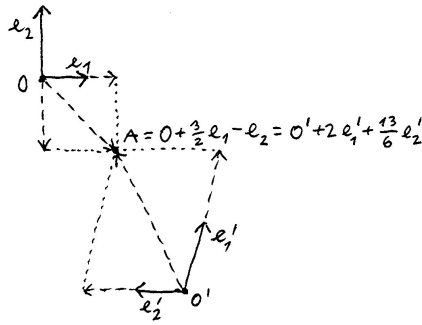
- Všechny afinní prostory stejné dimenze jsou tedy navzájem izomorfní (nikoli však kano-nicky).



Obrázek 6.8: Souřadnice vzhledem k afinnímu repéru  $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ :  $A = [\frac{3}{2}, -1] \iff A = O + \frac{3}{2}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ .

Jeden bod může (ale nemusí) mít v různých afinních repérech různé souřadnice. Pokud známe souřadnicové vyjádření bodu  $A$  vzhledem k jednomu repéru a současně známe vyjádření tohoto repéru vzhledem k jinému repéru, pak by mělo být jednoduchým cvičením vyjádřit souřadnice bodu  $A$  vzhledem k onomu jinému repéru. Konkrétní příklad tohoto přechodu je na obr. 6.9. ◀

Zobecnění těchto pozorování je následující:



Obrázek 6.9: Přechod mezi dvěma afinními repéry:  $A = O + \frac{3}{2}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$  a současně  $O = O' + 3\mathbf{e}'_1 + 4\mathbf{e}'_2$ ,  $\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}'_2$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}'_2$ . Odtud po dosazení plyne  $A = O' + 2\mathbf{e}'_1 + \frac{13}{6}\mathbf{e}'_2$ .

**Věta.** Uvažme dva afinní repéry  $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  a  $(O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots)$  v  $\mathcal{A}$ . Souřadnice libovolného bodu  $A \in \mathcal{A}$  vzhledem k prvnímu repéru označíme  $[a_1, a_2, \dots] = \mathbf{A}$ , vzhledem ke druhému  $[a'_1, a'_2, \dots] = \mathbf{A}'$ . Souřadnice  $O$  vzhledem k druhému repéru označíme  $[q_1, q_2, \dots] = \mathbf{Q}$  a matici přechodu od báze  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  k bázi  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots)$  označíme  $\mathbf{P}$ . Potom platí, že

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{A},$$

neboli

$$a'_1 = q_1 + p_{11}a_1 + p_{12}a_2 + \dots,$$

$$a'_2 = q_2 + p_{21}a_1 + p_{22}a_2 + \dots,$$

$\vdots$

kde  $p_{ij}$  je koeficient v matici  $\mathbf{P}$  na  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci.



## 6.2 Cvičení

V jisté afinní souřadné soustavě na mapě jistého města jsou jistá význačná místa určena souřadnicemi  $A = [1, -1]$ ,  $B = [1, 1]$ ,  $C = [3, 0]$ ,  $D = [5, 2]$ ,  $E = [4, 4]$ . Jistí dva kolegové sledují dění ve městě tak, že kolega K. zaznamenává údaje vzhledem k souřadné soustavě s počátkem v místě  $A$ , kde má základnu, a bázi  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ; kolega L. pracuje se souřadnou soustavou s počátkem v  $D$  a bázi  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE})$ . Přesně v poledne začíná K. zaznamenávat rovnoměrný přímočarý pohyb podezřelé tramvaje a jeho zápis (v závislosti na čase  $t$ ) vypadá takto:

$$\left[ \frac{5}{4} + \frac{1}{4}t, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \right].$$

V tomtéž čase také L. zaznamenává pohyb tramvaje jako:

$$\left[ 1 - \frac{1}{4}t, 1 - \frac{1}{4}t \right].$$

Rozhodněte, zda oba kolegové pozorují tutéž tramvaj a zda je náhodou tramvaj neohrožuje.

### 6.3 Parametrické vyjádření podprostoru

Dráha tramvaje v předchozím cvičení je parametrizována parametrem  $t \in \mathbb{R}$ . Obecněji, přímku  $p = K + L$  určenou dvěma body v obecném afinním prostoru můžeme podle (4.1) zapsat jako

$$p = K + \langle \overrightarrow{KL} \rangle = \{K + t\overrightarrow{KL} : t \in \mathbb{R}\}.$$

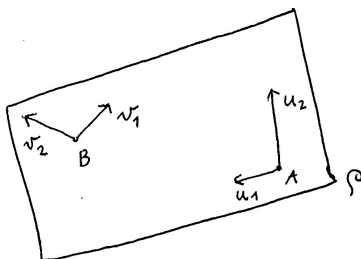
Ještě obecněji, afinní podprostor  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  určený bodem  $B$  a zaměřením  $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \rangle$  je parametrizován následovně:

$$\mathcal{B} = B + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \rangle = \{B + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \dots : t_1, t_2, \dots \in \mathbb{R}\}.$$

Bod  $X \in \mathcal{A}$  leží v podprostoru  $\mathcal{B}$  právě tehdy, když

$$X = B + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \dots \quad (6.5)$$

pro nějaká reálná čísla  $t_1, t_2, \dots$ . Toto je tzv. *parametrické vyjádření* podprostoru  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ . Obvykle, nikoli však samozřejmě, jsou vektory  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$  lineárně nezávislé. Je jasné, že jeden a týž podprostor může být parametrizován tisícerým způsobem.



Obrázek 6.10: Dvoji vyjádření téže roviny:  $\rho = A + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = B + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ .

### 6.4 Vyjádření podprostoru rovnicemi

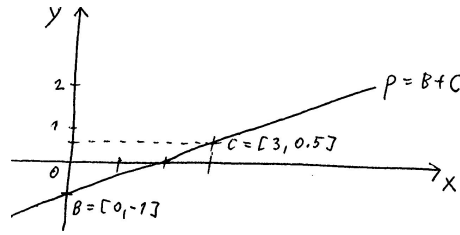
Každý si odedávna umí poradit s vyjádřením přímky v rovině, roviny v prostoru apod. Chceme zjistit, jak je to s rovnicovým vyjádřením obecného afinního podprostoru v obecném afinním prostoru — myšleno vzhledem k nějakému vybranému afinnímu repéru.

Už v příkladu 4.3(2) jsme si uvědomili, že pokud má soustava lineárních rovnic řešení, pak tato vždy tvoří afinní prostor, jehož dimenze závisí na počtu (nezávislých) rovnic a počtu neznámých. Máme-li soustavu s  $n$  neznámými, řešení soustavy jsou uspořádané  $n$ -tice čísel a prostor všech řešení je podprostorem v afinním prostoru všech možných uspořádaných  $n$ -tic, tj. ve standardním  $\mathbb{R}^n$ . Rádi bychom se ujistili, že každý afinní podprostor lze vyjádřit tímto způsobem, tj. pomocí soustavy lineárních rovnic vzhledem k vybranému afinnímu repéru. Tady představíme rychlé a abstraktní řešení tohoto problému, konkrétní návody najdete v odst. 6.5 a ve cvičení.

Uvažujme libovolný afinní podprostor  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ , určený bodem  $B$  a zaměřením  $U = \overrightarrow{\mathcal{B}} \subseteq \overrightarrow{\mathcal{A}}$ ,

$$\mathcal{B} = B + U.$$

Z lineární algebry víme, že souřadnice vektorů patřících do libovolného vektorového podprostoru  $U$  tvoří právě řešení nějaké soustavy **homogenních** lineárních rovnic: ◀



Obrázek 6.11: Přímka  $p$  má vzhledem k naznačené souřadné soustavě parametrické vyjádření  $[3t, -1 + 1.5t]$  a obecnou rovnici  $x - 2y = 2$ .

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

kde matice soustavy  $\mathbf{M}$  je typu  $r \times n$ , přičemž  $r$  je počet rovnic a  $n = \dim \mathcal{A}$  je počet neznámých.

Máme-li takto vyjádřeno zaměření  $U = \vec{\mathcal{B}}$ , potom *rovnicové* (příp. *obecné* nebo *neparametrické*) *vyjádření* podprostoru  $\mathcal{B}$  vypadá následovně:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n}\},$$

kde sloupec  $\mathbf{n}$  dostaneme dosazením souřadnic libovolného bodu  $B \in \mathcal{B}$ , tj.

$$\mathbf{n} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}.$$

Tak máme garantováno, že  $B$  je řešením této soustavy, a proto taky každý jiný bod  $B + \mathbf{u} \in B + U = \mathcal{B}$  je jejím řešením. Tato soustava rozepsaná podrobněji vypadá nějak takto:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} m_{11}x_1 + \cdots + m_{1n}x_n = n_1 \\ \vdots \\ m_{r1}x_1 + \cdots + m_{rn}x_n = n_r \end{array} \right\}. \quad (6.6)$$

kde  $m_{ij}$  jsou koeficienty v matici  $\mathbf{M}$ .

Je jasné, že jeden a týž podprostor může být vyjádřen mnoha různými (vždy však ekvivalentními) soustavami rovnic. Obvykle, nikoli však samozřejmě, jsou rovnice lineárně nezávislé. V takovém případě potřebujeme k explicitnímu vyjádření všech řešení soustavy  $n - r$  volných parametrů, tzn.  $\dim \mathcal{B} = n - r$ .

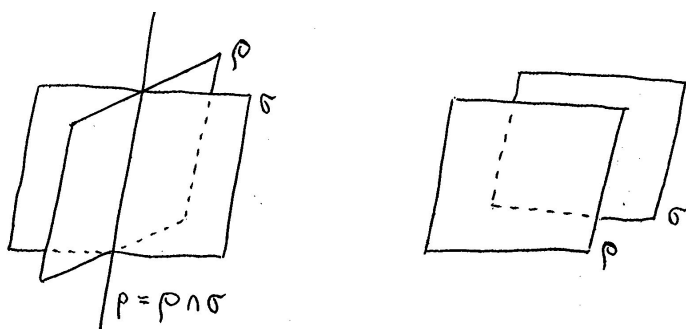
**Věta.** *Podmnožina  $\mathcal{B}$  v afinním podprostoru  $\mathcal{A}$  dimenze  $n$  je afinním podprostorem dimenze  $k$  právě tehdy, když souřadnice všech bodů patřících do  $\mathcal{B}$  tvoří množinu všech řešení nějaké soustavy  $n - k$  lineárně nezávislých lineárních rovnic o  $n$  neznámých.*

Speciálně, k vyjádření bodu je potřeba  $n$  nezávislých rovnic a jednou rovnicí je popsána nadrovina. Podprostor dimenze  $k$  lze vždy chápat jako průnik  $n - k$  nadrovin.

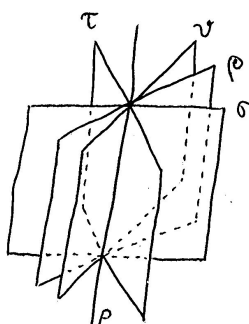
## 6.5 Jak určit rovnicové vyjádření z parametrického?

Nejrychlejší je samozřejmě výsledek uhadnout:





Obrázek 6.12: Podprostor dimenze  $k$  je průnikem  $n - k$  nadrovin (avšak průnikem  $n - k$  nadrovin nemusí být podprostor dimenze  $k$ ).



Obrázek 6.13: Několikeré vyjádření téže přímky:  $p = \rho \cap \sigma = \rho \cap \tau = \tau \cap \nu \dots$

- (1) Je dáno parametrické vyjádření nějakého podprostoru  $\mathcal{B}$ . Hledáme takovou lineární kombinaci neznámých  $x_i$ , která by **současně** eliminovala všechny parametry  $t_j$ . Výsledkem takové kombinace je jen nějaká konstanta a máme první rovnici.

Pokud je  $\dim \mathcal{B} = k$ , potřebujeme tento krok opakovat  $(n - k)$ -krát, ovšem **nezávisle** na předchozích krocích! Tato metoda se dá považovat za použitelnou pouze pro málorozměrné podprostory, zejména pro přímky: eliminovat jeden parametr  $n - 1$  nezávislými způsoby je vždy možné a snadné...

Pokud předchozí postup selhává, existují univerzální metody, jak rovnicové vyjádření vždy najít; zmíníme několik osvědčených nápadů.

- (2) Podle zdůvodnění věty 6.4 stačí najít homogenní soustavu rovnic popisující zaměření  $U = \overrightarrow{\mathcal{B}}$ . Stačí si tedy vzpomenout, jak se tento problém v algebře (algoritmicky) řešil. . .



Koeficienty na pravé straně soustavy (6.6) se pak snadno určí dosazením souřadnic libovolného bodu z  $\mathcal{B}$ .

Parametrické vyjádření (6.5) podprostoru  $\mathcal{B}$ , můžeme psát také jako

$$\overrightarrow{BX} = t_1 \mathbf{u}_1 + \dots + t_k \mathbf{u}_k,$$

kde předpokládáme, že směrové vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  jsou lineárně **nezávislé**. To, že bod  $X$  patří do podprostoru  $\mathcal{B}$  lze potom vyjádřit mnoha různými způsoby:

$X \in \mathcal{B} \iff$  vektor  $\overrightarrow{BX}$  je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \iff$  vektory  $\overrightarrow{BX}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  jsou lineárně závislé  $\iff$  mezi vektory  $\overrightarrow{BX}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  je právě  $k$  nezávislých  $\iff$  hodnost matice tvořené souřadnicemi vektorů  $\overrightarrow{BX}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  vzhledem k nějaké (libovolné) bázi je právě  $k \iff$  všechny subdeterminanty řádu  $k+1$  vybrané z této matice jsou nulové.

Tyto ekvivalence motivují následující dva návody:

- (3) Vytvoříme po sloupcích matici ze souřadnic vektorů  $\overrightarrow{BX}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  vzhledem k nějaké bázi (matice má  $n$  řádků a  $k+1$  sloupců, jenom v prvním sloupci se objevují neznámé). Řádkovými úpravami upravíme matici do schodovitého tvaru, kde hodnost matice interpretujeme jako počet nenulových řádků, a ten má být  $k$ . Právě  $n-k$  posledních řádků má tedy být nulových, což dává soustavu  $n-k$  lineárních rovnic, které by automaticky měly být nezávislé.
- (4) Z matice tvořené souřadnicemi vektorů  $\overrightarrow{BX}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  vybíráme submatice řádu  $k+1$ , spočítáme determinanty a tyto položíme rovny 0. Dostáváme soustavu lineárních rovnic, z nichž můžeme podle libosti vybrat  $n-k$  nezávislých.

V učebnici [HoJa] je na stranách 26–27 představena ještě jiná univerzální metoda. Tato je v podstatě ekvivalentní výše uvedenému návodu (3), nicméně doporučujeme porovnat.

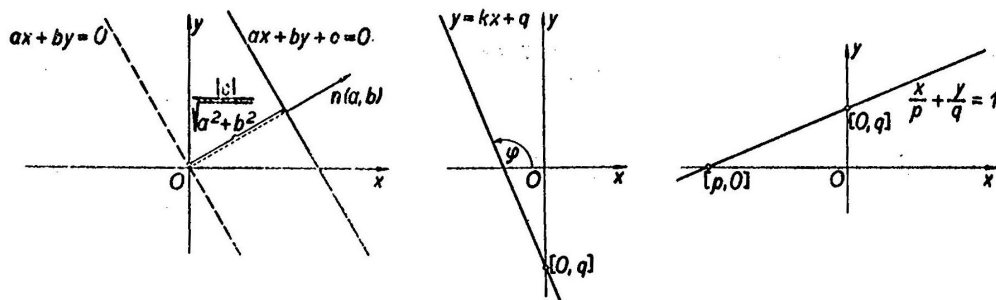
Postup zmiňovaný v (4) je vhodný zejména v případech podprostorů malé kodimenze. Zejména, je-li popisovaný podprostor nadrovina, tj.  $k = n - 1$ , je matice zmiňovaná v (4) čtvercová řádu  $n = k + 1$ . Rovnice nadroviny je tedy určena determinantem celé této matice.

## 6.6 Různá další vyjádření

Často lze potkat vyjádření afinních podprostorů, jež vypadají odlišně od výše uvedených. Ať už vypadají jakkoli, vždy jsou ekvivalentní některému z dříve diskutovaných popisů. Různá vyjádření mají různé výhody, pro představu uvádíme běžně používaná rovnicová vyjádření přímky v rovině (viz obr. 6.14):

- obecná rovnice:  $ax + by + c = 0$ ,
- směrnicová rovnice:  $y = kx + q$ ,
- úseková rovnice:  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ .

Směrnicovou ani úsekovou rovnicí nelze popsat všechny přímky v rovině; konkretizujte tato omezení. Uvedená vyjádření a jejich interpretace mají zřejmé analogie pro roviny v prostoru, příp. nadroviny v prostoru obecné dimenze...



Obrázek 6.14: [Rek] Interpretace konstant z různých rovnicových vyjádření přímky v rovině; ke druhému obrázku je třeba doplnit  $k = \tan \varphi$ .

## 6.7 Cvičení

- (1) Vzhledem k nějakému afinnímu repéru v nějakém trojrozměrném afinním prostoru jsou dány body:

$$A = [1, 1, 0], \quad B = [4, 1, 3], \quad C = [1, 0, 1].$$

Určete dimenzi a rovnicové vyjádření afinního obalu množiny  $\{A\}$ ,  $\{A, B\}$ , resp.  $\{A, B, C\}$ .

- (2) Je dáno parametrické vyjádření afinního podprostoru  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^4$ :

$$x_1 = 3t_1 - 5t_2 - 2t_3, \quad x_2 = 1 + t_2 + t_3, \quad x_3 = 4 - t_1 + t_2, \quad x_4 = 5,$$

kde  $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ . Určete dimenzi  $\mathcal{B}$  a najděte nějaké jiné parametrické vyjádření tohoto podprostoru. Dále ukažte, že soustavou lineárních rovnic

$$\{x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \quad x_4 = 0\}$$

je popsáno zaměření  $\vec{B}$  a najděte aspoň tři různá rovnicová vyjádření podprostoru  $\mathcal{B}$ .

- (3) Vyzkoušejte všechny návody určení rovnicového vyjádření, jež jsou uvedeny v odst. 6.5, např. na podprostorech z předchozích úloh. Porovnejte výsledná vyjádření.
- (4) Všimněte si, že nikde neklademe otázku

- „Jak najít parametrické vyjádření z rovnicového?“

Zformulujte nějakou vlastní odpověď a doplňte vhodný příklad.

- (5) Ukažte, že přímka v prostoru obecné dimenze procházející body  $A = [a_1, a_2, \dots]$  a  $B = [b_1, b_2, \dots]$  má rovnicové vyjádření

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \dots$$

## 7 Vzájemné polohy podprostorů a některé polohové úlohy

### 7.1 Vzájemné polohy podprostorů

Incidence a různoběžnost jsou množinové pojmy, afinní strukturu potřebujeme zejména k pojmu **rovnoběžnosti**. První postřehy k abstraktní definici rovnoběžnosti jsme měli již v odst. 4.4.

**Definice.** Afinní podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v afinním prostoru  $\mathcal{A}$  jsou:

- *incidentní*, pokud  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$  nebo  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ ,
- *různoběžné*, pokud nejsou incidentní a mají neprázdný průnik,
- *rovnoběžné*, pokud jejich zaměření jsou incidentní, tj.  $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}$  nebo  $\vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{B}}$ ,
- *mimoběžné*, pokud nejsou incidentní, ani různoběžné, ani rovnoběžné.

Takto definované pojmy vymežující vzájemnou polohu podprostorů jsou téměř komplementární; jedinou výjimkou je

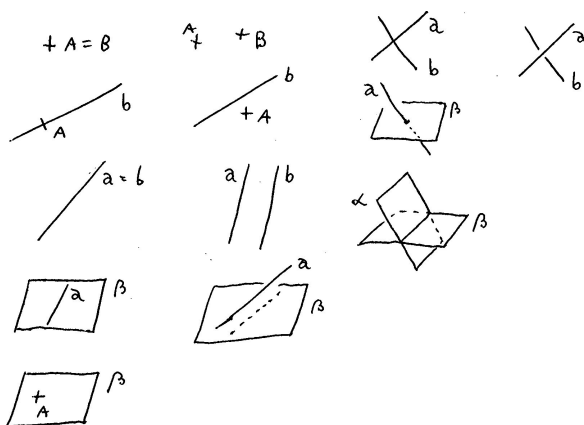
- *incidentní*  $\implies$  *rovnoběžné*.

Chceme-li tento případ vyloučit, můžeme doplnit

- *rovnoběžné různé*, což znamená rovnoběžné, ale ne incidentní.

Mimoběžné podprostory, jejichž zaměření mají netriviální průnik, se někdy nazývají *částečně rovnoběžné*. V trojrozměrném afinním prostoru částečně rovnoběžné prostory nejsou. Všimněte si, že přímo z definice plyne následující podivnost, která nás zpravidla moc zajímat nebude, ale měli bychom si jí být vědomi:

- Pokud je  $\mathcal{B}$  bod nebo  $\mathcal{A}$ , pak  $\mathcal{B}$  je rovnoběžný s libovolným jiným podprostorem  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ .



Obrázek 7.15: Vzájemné polohy afinních podprostorů.

Ještě zformulujeme jedno pomocné tvrzení, které již máme částečně rozmyšleno v souvislosti s rovností (4.2).

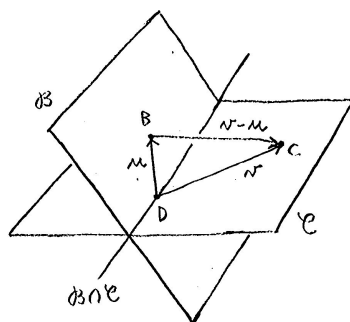
**Věta.** Uvažme afinní podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$  a libovolné body  $B \in \mathcal{B}$  a  $C \in \mathcal{C}$ . Potom platí:  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  mají neprázdný průnik právě tehdy, když  $\overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{\mathcal{B}} + \overrightarrow{\mathcal{C}}$ .

Pokud je průnik neprázdný a  $D \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$  je nějaký společný bod, pak  $B = D + \mathbf{u}$  a  $C = D + \mathbf{v}$  pro nějaké vektory  $\mathbf{u} \in \overrightarrow{\mathcal{B}}$  a  $\mathbf{v} \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$ . Odtud  $\overrightarrow{BC} = \mathbf{v} - \mathbf{u} \in \overrightarrow{\mathcal{C}} + \overrightarrow{\mathcal{B}}$ .

Naopak, je-li  $\overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{\mathcal{B}} + \overrightarrow{\mathcal{C}}$ , lze vektor  $\overrightarrow{BC}$  napsat jako  $\overrightarrow{BC} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$  pro nějaké  $\mathbf{u} \in \overrightarrow{\mathcal{B}}$  a  $\mathbf{v} \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$ . Odtud plyne  $C - \mathbf{v} = B - \mathbf{u}$ , tzn. bod  $B - \mathbf{u} \in \mathcal{B}$  je roven bodu  $C - \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ , tudíž  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ .  $\square$

Všichni dobře víme, že mimoběžné podprostory v  $\mathbb{R}^3$  mohou být jedině přímky. Analogické pozorování umíme dokázat v mnohem obecnější podobě, viz důsledek (2) níže. Odtud plyne, že nadroviny v obecném afinním prostoru nejsou nikdy mimoběžné s žádným jiným podprostorem; pokud jsou zrovna různoběžné, okamžitě víme, jaká musí být dimenze průniku, viz (3). Do série ještě zařazujeme poznatek (1); afinní podprostory, jejichž zaměření jsou komplementární nazýváme taky *komplementární*, příp. říkáme, že jeden je *doplňkem* druhého. Všechna tři následující tvrzení plynou přímo z definic, rovnosti (7.7) a předchozí věty — najděte si nějaká jejich zdůvodnění!



Obrázek 7.16:  $B \cap C \neq \emptyset \iff \overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$ .

**Důsledky.** Pro libovolné afinní podprostory  $B, C \subseteq A$  platí:

- (1) Pokud jsou vektorové podprostory  $\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \subseteq \overrightarrow{A}$  komplementární, pak  $B$  a  $C$  se protínají v bodě.
- (2) Pokud jsou podprostory  $B$  a  $C$  mimoběžné, pak každý z nich má dimenzi menší nebo rovnou  $\dim A - 2$  (a větší nebo rovnou 1).
- (3) Pokud je  $C$  nadrovina a  $B$  a  $C$  jsou různoběžné, pak  $\dim(B \cap C) = \dim B - 1$ .

## 7.2 Jak určit vzájemnou polohu podprostorů?

Optimální odpověď závisí na konkrétním zadání úlohy. Nejpřirozenější je asi rovnou začít s hledáním společných bodů, resp. směrů daných podprostorů, tzn. s vyjádřením průniku, resp. průniku zaměření. Odtud lze vždy rozhodnout, jaká je jejich vzájemná poloha. Dále si všimneme, že k určení vzájemné polohy stačí znát pouze **dimenze** vhodných podprostorů a nikoli podprostory jako takové. Pro úplnost ještě doplníme charakterizaci pomocí součtů.

Na zahřátí uvádíme celkem zřejmou charakterizaci incidence pomocí průniku, resp. součtu:

$$B \subseteq C \iff B \cap C = B \iff B + C = C.$$

Stejně ekvivalence samozřejmě platí také pro zaměření. Z lineární algebry si v této souvislosti potřebujeme připomenout, že dimenze průniku a součtu vektorových podprostorů jsou spolu úzce svázány, a to následujícím způsobem:

$$\dim(\overrightarrow{B} \cap \overrightarrow{C}) + \dim(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = \dim \overrightarrow{B} + \dim \overrightarrow{C}. \quad (7.7)$$

### Průnik

Vzájemnou polohu podprostorů  $B, C \subseteq A$  je vždy možné jednoznačně určit podle jejich průniku  $B \cap C$  a průniku zaměření  $\overrightarrow{B} \cap \overrightarrow{C}$  (uvědomte si, že pokud  $B \cap C \neq \emptyset$ , pak např.  $B \subseteq C$  je ekvivalentní s  $\overrightarrow{B} \subseteq \overrightarrow{C}$ ):

- $B \cap C \neq \emptyset$ :

- $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}}$  nebo  $\vec{\mathcal{C}} \iff$  incidentní,
- $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} \neq \vec{\mathcal{B}}$  ani  $\vec{\mathcal{C}} \iff$  různoběžné,

•  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ :

- $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}}$  nebo  $\vec{\mathcal{C}} \iff$  rovnoběžné různé,
- $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} \neq \vec{\mathcal{B}}$  ani  $\vec{\mathcal{C}} \iff$  mimoběžné.

Bez ohledu na způsob vyjádření daných podprostorů (parametricky/rovniciemi) většinou potřebujeme k určení jejich průniku, reps. průniku jejich zaměření, řešit soustavu lineárních rovnic. Po obvyklých úpravách (myslíme ekvivalentní úpravy vedoucí ke schodovitému tvaru) postupně pozorujeme:

- (1) zda je soustava řešitelná nebo ne (tj. zda je průnik neprázdný nebo prázdný),
- (2) pokud je řešitelná, tak podle počtu nezávislých rovnic a počtu neznámých usuzujeme, kolik budeme potřebovat volných parametrů k explicitnímu vyjádření řešení (tj. jaká bude dimenze průniku),
- (3) pokud je soustava řešitelná, tak ji dořešíme a vyjádříme řešení (tj. popíšeme explicitně průnik).

Uvědomte si, že počítání průniku  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$  a průniku zaměření  $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$  lze vždy realizovat **současně**:  $\Leftrightarrow$  máme-li soustavu lineárních rovnic odpovídající  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ , pak soustava popisující  $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$  je právě předchozí soustava, akorát homogenizovaná (tzn. na pravé straně jsou nuly)!

Z uvedeného je také patrné, že k určení vzájemné polohy podprostorů úplně stačí absolvovat krok (2), kdy známe dimenzi průniku, resp. průniku zaměření. Krok (3) je nutné dopočítat v případě, že nás kromě vzájemné polohy zajímají také společné body/směry daných podprostorů.

### Součet

Vzhledem k úvodním rozvahám může být předchozí charakterizace vzájemných poloh podprostorů přepsána také následovně:

- $\overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ :
  - $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{C}}$  nebo  $\vec{\mathcal{B}} \iff$  incidentní,
  - $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} \neq \vec{\mathcal{C}}$  ani  $\vec{\mathcal{B}} \iff$  různoběžné,
- $\overrightarrow{BC} \notin \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ :
  - $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{C}}$  nebo  $\vec{\mathcal{B}} \iff$  rovnoběžné různé,
  - $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} \neq \vec{\mathcal{C}}$  ani  $\vec{\mathcal{B}} \iff$  mimoběžné.


Odtud plyne následující způsob určení vzájemné polohy podprostorů, který je vhodný asi hlavně v případě, kdy jsou oba podprostory zadány parametricky:

$$\mathcal{B} = B + \langle \mathbf{u}_1, \dots \rangle \text{ a } \mathcal{C} = C + \langle \mathbf{v}_1, \dots \rangle.$$

Sestavíme matici ze souřadnic generujících vektorů  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{v}_1, \dots$ , kterou ještě rozšíříme o vektor  $\overrightarrow{BC}$ . Po obvyklých úpravách (**pozor**: nesmíme míchat se sloupcem/řádkem, který původně obsahoval  $\overrightarrow{BC}$ ) postupně určíme:

- (1) jaká je hodnota matice sestavené z generujících vektorů (tj. jaká je dimenze součtu  $\vec{B} + \vec{C}$ ),
- (2) zda je hodnota matice rozšířené stejná nebo větší (tj. zda se afinní podprostory protínají či nikoli).


### Poznámky

Uvědomte si, že právě uvedený návod je pouze jinou interpretací návodu předchozího: Matice, se kterou tady pracujeme, je (až na formu zápisu a nějaká znaménka) totožná s maticí soustavy pro počítání průniku, již jsme zmiňovali výše. Přitom pojem hodnoty matice nezávisí na tom, zda matici čteme po sloupcích nebo po řádcích! Navíc, porovnáme-li krok (2) u tohoto návodu z krokem (1) návodu předchozího, nemůžeme si nevzpomenout na Frobeniovu větu o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic. Tato naše pozorování představují alternativní (souřadnicový) důkaz věty 7.1. 

Na rozdíl od předchozího návodu, nemusí být na první pohled patrné, jaké jsou společné body/směry daných podprostorů. Tyto lze sice vždycky z jednotlivých úprav zrekonstruovat, ale nemusí se jednat o nejpříjemnější počítání. V případě, že se ptáme na společné body/směry, je proto asi vhodnější rovnou začít počítat průniky.

V obou uvedených metodách jsme si všimli, že k určení vzájemné polohy nám stačí pracovat toliko s dimenzemi (příp. hodnotami odpovídajících matic) a nikoli podprostory jako takovými. Obecně platí

$$\dim(\overline{B+C}) = \dim(\vec{B} + \vec{C} + \overline{BC}) \geq \dim(\vec{B} + \vec{C}) \geq \max(\dim \vec{B}, \dim \vec{C}).$$

Pokud kvůli stručnosti označíme tato tři čísla tak, že  $o \geq n \geq m$ , pak předchozí klasifikace vzájemných poloh vypadá následovně: 

**Důsledek.** Podprostory  $B$  a  $C$  jsou

- *incidentní*  $\iff o = n = m$ ,
- *různoběžné*  $\iff o = n > m$ ,
- *rovnoběžné různé*  $\iff o > n = m$ ,
- *mimoběžné*  $\iff o > n > m$ .

### 7.3 Příčky

Pokud jsme kdy mluvili o příčkách, pak výhradně o příčkách mimoběžných přímk. Obecně se *příčkou* dvou afinních podprostorů  $B, C \subseteq \mathcal{A}$  myslí jakákoli přímka, která je s  $B$  i  $C$  různoběžná. Pro netriviální podprostory existuje vždy nekonečně hodně příček, viz obr. 7.17.

Příčka bývá (ale nemusí být!) jednoznačně určena nějakou dodatečnou podmínkou, např. aby procházela daným bodem nebo aby měla daný směr. V eukleidovských prostorech budeme často hledat příčky, které jsou nejkratší možné (takové příčky se jmenují *osy*, viz odst. 12.1).

Umění konstrukce příček k mimoběžkám (nebo jiným křivkám) má velmi podstatná uplatnění v technické praxi, viz např. [Ma].

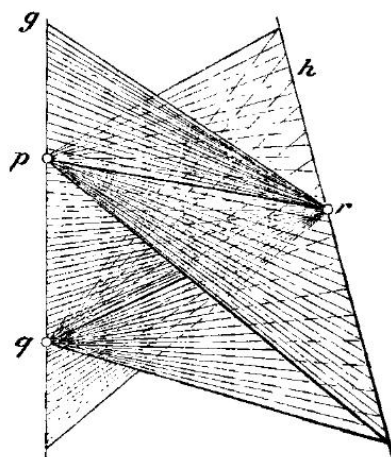


Fig. 47.

Obrázek 7.17: [LiSch] Ke dvěma mimoběžkám existuje  $\infty^2$  různých příček.

#### 7.4 Cvičení



- (1) Určete vzájemnou polohu afinních podprostorů  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^4$ ,

$$\mathcal{B} = \{[1, 2, 0, 0] + t(0, 0, 1, 1)\}, \quad \mathcal{C} = \{[-1, 0, 2, 0] + s_1(-1, 0, 2, 1) + s_2(1, 0, -1, 0)\},$$

kde  $t, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ , příp. určete jejich společné body a směry.

- (2) Pozměňte vhodně zadání v předchozích úlohách tak, abyste vyčerpali zbývající možné vzájemné polohy.
- (3) Uvažte tři přímky v  $\mathbb{R}^3$ :

$$p_1 = \{[1 + t_1, 1, t_1]\}, \quad p_2 = \{[1 + t_2, -1, -t_2]\}, \quad p_3 = \{[0, t_3, t_3]\}.$$

Ukažte, že tyto přímky jsou navzájem mimoběžné, a řešte následující úlohy:

- určete příčku  $p_1$  a  $p_2$ , která prochází bodem  $B = [0, 0, 0]$ ,
  - určete příčku  $p_1$  a  $p_2$ , která prochází obecným bodem na  $p_3$ ,
  - představte si všechny společné příčky těchto tří mimoběžek.
- (4) Pro tutěž trojici přímek řešte následující:
- určete příčku  $p_1$  a  $p_2$ , která má směr  $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ ,
  - určete nějakou jinou příčku  $p_1$  a  $p_2$ , která je rovnoběžná s rovinou  $\rho = \{x - y = 0\}$ ,
  - představte si všechny příčky  $p_1$  a  $p_2$ , které jsou rovnoběžné s touto rovinou.




## 8 Uspořádání na přímce, konvexní množiny, barycentrické souřadnice a další

### 8.1 Relace uspořádání, úsečka

Body na afinní přímce  $p = A + B$  (myšleno na libovolné přímce v libovolném afinním prostoru) jsou jednoznačně určeny hodnotami  $t \in \mathbb{R}$  z parametrického vyjádření  $X = A + t\overrightarrow{AB}$ . Toto ztotožnění jsme v odst. 6.1 interpretovali jako souřadnice bodu  $X \in p$  vzhledem k afinnímu repéru  $(A; \mathbf{u})$  na  $p$ , kde  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ . Přirozené uspořádání reálných čísel nyní indukuje relaci uspořádání na přímce  $p$ :

Pro  $C, D \in p$  můžeme definovat

- „ $C \leq D$ “, pokud  $c \leq d$ ,

kde  $c, d \in \mathbb{R}$  jsou souřadnice těchto bodů vzhledem k repéru  $(A; \mathbf{u})$ . Uvědomte si, že toto uspořádání závisí pouze na **orientaci** bázového vektoru  $\mathbf{u}$  a nikoli na vektoru jako takovém. 

Nezávisle na jakýchkoli volbách můžeme definovat relaci „mezi“ a teprve s touto relací rozumíme pojmu úsečky:

**Definice.** Bod  $E$  leží mezi body  $C$  a  $D$ , pokud  $E$  leží na přímce  $p = C + D$  a „ $C < E < D$ “ vzhledem k nějakému afinnímu repéru na  $p$ .

*Úsečka*  $CD$  je množina všech bodů, které leží mezi  $C$  a  $D$ , doplněná o krajní body  $C$  a  $D$ .

Je zřejmé, že

$$\text{úsečka } CD = \{X = C + t\overrightarrow{CD} : t \in [0, 1]\}. \quad (8.8)$$

Pojem úsečky hraje klíčovou roli v definicích mnoha dalších geometrických objektů, viz následující odstavce.

Relaci „mezi“, stejně jako pojem úsečky a další odvozené pojmy, lze samozřejmě definovat různými způsoby. Uvedenými formulacemi zejména chceme zdůraznit, že všechny tyto pojmy jsou výsostně **afinní**, tzn. k jejich definici nepotřebujeme vzdálenosti bodů ani nic podobného.

Pro porovnání uvádíme několik ekvivalentních (afinních) tvrzení:

- bod  $E$  leží mezi body  $C$  a  $D$ ,
- vektory  $\overrightarrow{CE}$  a  $\overrightarrow{DE}$  jsou opačně orientované,
- dělicí poměr<sup>3</sup> trojice bodů  $(C, D, E)$  je záporný.

Charakterizace téhož pomocí vzdáleností bodů je následující:

- $|CE| + |ED| = |CD|$ ,

viz úvodní odstavce následující kapitoly.

<sup>3</sup>podle definice na str. 18

## 8.2 Poloprostory, úhly, konvexní množiny

Dalším důležitým souvisejícím pojmem je pojem poloprostoru: Bod rozděluje přímku na dvě polopřímky, přímka rozděluje rovinu na dvě poloroviny a rovina rozděluje trojrozměrný prostor na dva poloprostory. Podobně, nadrovina rozděluje obecný afinní prostor na dva poloprostory:

**Definice.** Dva body  $A$  a  $B$  v afinním prostoru  $\mathcal{A}$  jsou *oddělovány* nadrovinou  $\mathcal{C}$ , pokud  $A$  ani  $B$  neleží v  $\mathcal{C}$  a úsečka  $AB$  má s nadrovinou  $\mathcal{C}$  společný právě jeden vnitřní bod.

(*Afinní*) *poloprostor* v  $\mathcal{A}$  vymezený nadrovinou  $\mathcal{C}$  je charakterizován tím, že žádné dva jeho body nejsou nadrovinou  $\mathcal{C}$  oddělovány.

Poloprostory vymezené nadrovinou  $\mathcal{C}$  jsou dva a jejich průnikem je právě  $\mathcal{C}$ .

Průnikem dvou polorovin v afinní rovině (takových, že jejich hraniční přímky jsou různoběžné), je *úhel*. Pokud uvažujeme více polorovin, pak jejich průnikem může vzniknout ledacos (např. mnohoúhelník), v každém případě to však bude konvexní množina. Všimněte si, že obecný pojem konvexnosti je také veskrze **afinní**:

**Definice.** Podmnožina  $Y$  v afinním prostoru  $\mathcal{A}$  je *konvexní*, pokud pro libovolné různé body  $B, C \in Y$  platí, že také celá úsečka  $BC$  patří do  $Y$ .

Konvexní množiny v  $\mathcal{A}$  jistě jsou: celé  $\mathcal{A}$ , všechny afinní podprostory (tzn. i body), úsečky, poloprostory a mnoho dalších. Mimo jiné také prázdná množina je podle definice konvexní!

Průnik libovolných konvexních podmnožin v  $\mathcal{A}$  je opět konvexní, sjednocení samozřejmě nikoli. Nejmenší konvexní množina, která obsahuje podmnožinu  $X \subseteq \mathcal{A}$  se nazývá *konvexní obal*  $X$ . Konvexním obalem konečné množiny bodů je *konvexní mnohostěn* (příp. konvexní mnohoúhelník, úsečka nebo bod); jsou-li body v obecné poloze, pak se jejich konvexní obal jmenuje *simplex*...

## 8.3 Barycentrické souřadnice, těžiště

V (8.8) je analytické vyjádření úsečky, tj. konvexního obalu dvojice bodů. Pokud přemýšlíme nad tím, jak v podobném stylu popsat konvexní obal tří a více bodů, pak si nelze nevšimnout následujícího. Střed úsečky  $AB$  můžeme vyjádřit jako  $S = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  nebo  $S = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ , ale taky jako  $S = O + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ , kde  $O$  je úplně libovolný bod v okolním afinním prostoru! Obecněji, každý bod  $X$  na přímce  $AB$  lze vyjádřit pomocí jednoho a téhož parametru  $t \in \mathbb{R}$  různými způsoby:

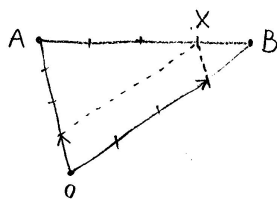
$$X = A + t\overrightarrow{AB} = B + (1-t)\overrightarrow{BA} = O + (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}.$$

Přitom body na úsečce  $AB$  jsou charakterizovány požadavkem  $t \in [0, 1]$ .

Analogicky např. těžiště trojúhelníku  $ABC$  je bod  $T = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ , který můžeme vyjádřit taktéž jako  $T = O + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ . Obecněji, každý bod v rovině  $ABC$  vyjádříme pomocí  $t, s \in \mathbb{R}$  jako

$$X = A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \dots = O + (1-t-s)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OC}, \quad (8.9)$$

kde  $O$  je opět libovolný bod v  $\mathcal{A}$ . Přitom body uvnitř trojúhelníku  $ABC$  jsou charakterizovány požadavkem  $t, s \in [0, 1]$ . Protože jsou body  $A, B$  a  $C$  v obecné poloze, jsou koeficienty u jednotlivých vektorů určeny jednoznačně. Navíc bychom neměli přehlédnout, že součet koeficientů



Obrázek 8.18:  $X = A + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = O + \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = O + \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ .

u vektorů na pravé straně je roven 1. Všechny body v rovině  $ABC$  tedy můžeme popsat jako

$$X = O + t_1\overrightarrow{OA} + t_2\overrightarrow{OB} + t_3\overrightarrow{OC}, \text{ kde } t_1 + t_2 + t_3 = 1.$$

Protože poloha bodu  $X$  nezávisí na volbě bodu  $O \in \mathcal{A}$  (pouze na koeficientech  $t_1, t_2, t_3$ ), píšeme totéž stručněji jako

$$X = t_1A + t_2B + t_3C, \text{ kde } t_1 + t_2 + t_3 = 1. \quad (8.10)$$

Přitom body uvnitř trojúhelníku  $ABC$  jsou charakterizovány požadavkem  $t_1, t_2, t_3 \geq 0$ .

Tato pozorování můžeme dále zobecňovat:



**Věta.** Afinním obalem množiny bodů  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  je množina

$$\{t_1A_1 + t_2A_2 + \dots : t_1 + t_2 + \dots = 1\}.$$

Konvexním obalem množiny bodů  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  je množina

$$\{t_1A_1 + t_2A_2 + \dots : t_1 + t_2 + \dots = 1 \text{ a } t_i \geq 0\}.$$

Uvědomte si, že v uvedeném popisu je zcela lhostejné, zda určující body  $A_i$  jsou či nejsou v obecné poloze. Pokud v obecné poloze jsou, pak koeficienty  $(t_1, t_2, \dots)$  jsou ke každému bodu  $X$  z afinního obalu bodů  $A_1, A_2, \dots$  určeny **jednoznačně** a nazývají se *barycentrické souřadnice* bodu  $X$  vzhledem k  $(A_1, A_2, \dots)$ .

Jak už název napovídá, barycentrické souřadnice souvisí nějak s těžišti. Těžiště trojúhelníku  $ABC$  má barycentrické souřadnice vzhledem k trojici  $(A, B, C)$  rovny  $\frac{1}{3}$ , tj.  $T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ , těžiště čtyřstěnu  $ABCD$  je

$$T = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D \quad (8.11)$$

apod. V těchto případech nemusíme rozlišovat mezi těžištěm tělesa a těžištěm hmotné soustavy sestávající ze stejně těžkých hmot soustředěných ve vrcholech. **Pozor:** pokud body  $A, B, C, D$  nejsou v obecné poloze, pak bod (8.11) není těžištěm čtyřúhelníku<sup>4</sup>  $ABCD$ , ale je to těžiště bodové hmotné soustavy se stejnými váhami soustředěnými v bodech  $A, B, C, D$ !

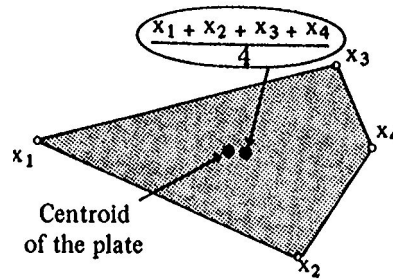
Obecně, *těžiště* bodové hmotné soustavy s váhami  $m_1, m_2, \dots$  soustředěnými postupně v bodech  $A_1, A_2, \dots$  je bod

$$T = \frac{m_1A_1 + m_2A_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}.$$

Pokud jsou všechny váhy kladné, leží těžiště v konvexním obalu bodů  $A_i$ .



<sup>4</sup>Tady předpokládáme, že body nejsou kolineární; uvedené závěry však platí zcela obecně.



Obrázek 8.19: [Be] Těžiště mnohoúhelníku obecně není totéž, co těžiště bodové hmotné soustavy s rovnými hmotami ve vrcholech.

## 8.4 Cvičení

(1) V afinním prostoru  $\mathbb{R}^3$  jsou dány body

$$A = [1, 1, 0], \quad B = [4, 1, 3], \quad C = [1, 0, 1], \quad D = [0, -1, 1], \quad E = [3, 0, 0].$$

Rozhodněte, zda:

- jsou body  $D$  a  $E$  oddělovány nadrovinou  $\rho = ABC$ ,
- úsečky  $AB$  a  $CD$  mají nějaký společný bod.

(2) Pro totéž zadání dokažte, že body  $A, B, D, E$  jsou v obecné poloze, a:

- určete barycentrické souřadnice bodu  $C$  vzhledem k této čtveřici bodů,
- rozhodněte, zda bod  $C$  patří do konvexního obalu bodů  $A, B$ , resp.  $A, B, D$ , resp.  $A, B, D, E$ ,
- určete afinní souřadnice těžiště čtyřstěnu  $ABDE$ .

(3) Rozhodněte, zda podmnožiny ze cvičení 4.5 jsou konvexní; pokud nejsou, popište jejich konvexní obaly.

(4) Rozhodněte, zda obraz konvexní množiny při afinním zobrazení může být nekonvexní.

(5) Na obrázku 8.20 jsou stopy stojící osoby; vyznačený bod představuje půdorys jejího těžiště. Rozhodněte, zda je tato osoba bez jakékoli další opory stabilní.

(6) K obrázku 8.19:

- ukažte, že umíte sestavit bod  $\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ , a uvědomte si, že určování těžiště bodové hmotné soustavy je asociativní,
- vzpomeňte, jak byste určovali těžiště čtyřúhelníku, a rozhodněte, zda tento úkol náhodou nepatří do jiné kapitoly.

(7) Pomocí vektorové algebry dokažte nějaké tvrzení elementární afinní geometrie, např. Menelaovu větu.

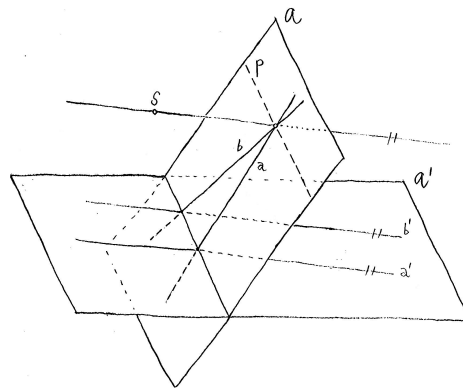


Obrázek 8.20: Stopy.

## 9 Projektivní geometrie

### 9.1 Postřehy

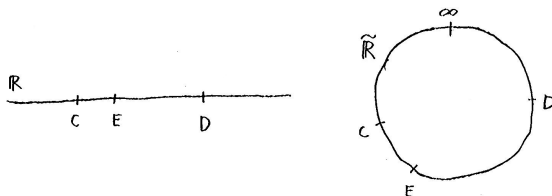
Občas zjišťujeme, že je výhodné pracovat s *nevlastními body*, tj. s body v **nekonečnu**. Např. ve cvičení 5.4 uvažujeme středovou projekci mezi různoběžnými rovinami  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{A}'$ . Ta je ve skutečnosti dobře definována pouze jako zobrazení  $\mathcal{A} \setminus p \rightarrow \mathcal{A}' \setminus p'$ , kde  $p$  je přímka v  $\mathcal{A}$ , která nemá obraz v rovině  $\mathcal{A}'$ , a  $p'$  je přímka v  $\mathcal{A}'$ , která nemá vzor v  $\mathcal{A}$ .

Obrázek 9.21: Při perspektivě mezi rovinami  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{A}'$  nemají body na  $p \subset \mathcal{A}$  obraz v  $\mathcal{A}'$ .

Pokud rozšíříme afinní rovinu  $\mathcal{A}$ , resp.  $\mathcal{A}'$  právě o její nevlastní body, mluvíme o *projektivním rozšíření*  $\tilde{\mathcal{A}}$ , resp.  $\tilde{\mathcal{A}'}$ . Diskutovaná středová projekce je tak zobrazením  $\tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}'}$  mezi rozšířenými projektivními rovinami a jedná se o velmi typické *projektivní zobrazení* (kterému se říká *perspektiva*).

Všimněte si, že nevlastní body v afinní rovině reprezentujeme přímkami (příp. třídou rovnoběžných přímek) a nikoli polopřímkami. V tomto duchu má přímka právě jeden nevlastní bod a nikoli dva. Projektivní přímka  $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  je tedy něco jiného než rozšířená reálná osa  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ , jak ji známe z analýzy!

Libovolné dva body v  $\tilde{\mathcal{A}}$  (vlastní nebo nevlastní) určují přímku a každé dvě přímky v projektivní rovině se protínají v jednom bodě (vlastním nebo nevlastním). V projektivních prostorech obecně mluvíme o přímkách, rovinách apod., jejich průnicích a incidencích, **nikoli** však o rovnoběžnosti, uspořádání a odvozených pojmech. Např. v projektivní geometrii nemáme úsečky, projektivní přímka nerozděluje projektivní rovinu na dvě části apod.



Obrázek 9.22: Na afinní přímce je bod  $E$  mezi body  $C$  a  $D$ . Na projektivní přímce nemá relace „mezi“ valného smyslu.

## 9.2 Projektivní rozšíření a projektivní prostor

**Definice.** *Projektivní rozšíření* afinního prostoru  $\mathcal{A}$  je množina  $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}$ , kde  $\infty_{\mathcal{A}}$  je množina všech jednorozměrných podprostorů v zaměření  $\vec{\mathcal{A}}$ . Prvky z  $\mathcal{A}$ , resp.  $\infty_{\mathcal{A}}$  nazýváme *vlastní*, resp. *nevlastní* body rozšířeného projektivního prostoru  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

V poslední větě předchozí definice skrytě říkáme, že projektivní rozšíření afinního prostoru je projektivním prostorem. Měli bychom tedy vysvětlit, co se myslí projektivním prostorem obecně. Ten lze definovat pomocí několika málo axiomů (jež se týkají výhradně pojmu **incidence**), my se však spokojíme s následujícím vysvětlením.

Uvažme, že afinní prostor  $\mathcal{A}$  je podprostorem v nějakém větším afinním prostoru a podívejme se na  $\mathcal{A}$  a jeho projektivní rozšíření  $\tilde{\mathcal{A}}$  z nějakého (libovolného) bodu  $S \notin \mathcal{A}$ , viz obr. 9.23. Každý bod  $A \in \tilde{\mathcal{A}}$  určuje přímku  $A + S \subset \mathcal{A} + S$  a, naopak, každá přímka  $a \subset \mathcal{A} + S$  procházející bodem  $S$  určuje bod  $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ .

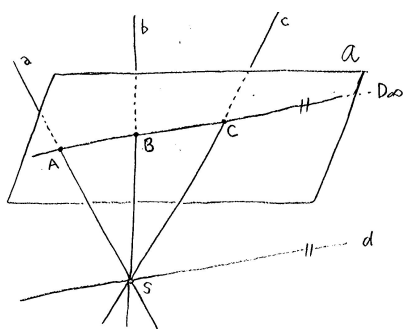
- Přitom bod  $A$  je nevlastní, právě když přímka  $a = A + S$  je rovnoběžná s  $\mathcal{A}$ .

Tato korespondence je vzájemně jednoznačná, navíc každá přímka procházející bodem  $S$  je jednoznačně určena svým zaměřením. Celkem tedy ztotožňujeme prvky  $\tilde{\mathcal{A}}$  s jednorozměrnými vektorovými podprostory v zaměření  $\vec{\mathcal{A} + S}$ . Současně si můžeme všimnout, že projektivnímu rozšíření  $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$  afinního podprostoru  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  odpovídá nějaký vektorový podprostor v zaměření  $\vec{\mathcal{A} + S}$ , jehož dimenze je  $\dim \mathcal{B} + 1$ .

**Definice.** *Projektivní prostor* s vektorovým zástupcem  $W$  je množina všech jednorozměrných podprostorů ve vektorovém prostoru  $W$ ; značíme  $\mathcal{P}(W)$ .


Podmnožina všech jednorozměrných podprostorů ve  $W$ , které patří do vektorového podprostoru  $U \subseteq W$ , tvoří *projektivní podprostor*  $\mathcal{P}(U) \subseteq \mathcal{P}(W)$ ; *dimenze*  $\mathcal{P}(U)$  je  $\dim U - 1$ .

Takto tedy chápeme projektivní rozšíření  $\tilde{\mathcal{A}}$  jakožto projektivní prostor  $\mathcal{P}(\vec{\mathcal{A} + S})$  a hlavní výhodou tohoto popisu je, že na rozdíl od předchozího reprezentujeme prvky  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}$



Obrázek 9.23: Prvky  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}$  ztotožňujeme s přímkami v  $\mathcal{A} + S$ , jež procházejí bodem  $S$ ; přitom  $D \in \infty_{\mathcal{A}} \iff d \parallel \mathcal{A}$ .

krásně homogenním způsobem. Ještě si všimněme, že prvky  $z \infty_{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{A}}$  vždycky tvoří nadrovinu  $\mathcal{P}(\vec{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{A} + S)$ .

Naopak, pokud v obecném projektivním prostoru  $\mathcal{P}(W)$  prohlásíme nějakou projektivní nadrovinu  $\mathcal{P}(V)$  za množinu „nevlastních bodů“, pak doplňková podmnožina  $\mathcal{P}(W) \setminus \mathcal{P}(V)$  má přirozenou afinní strukturu (se zaměřením  $V$ ). Proto lze každý projektivní prostor chápat jako projektivní rozšíření nějakého afinního prostoru. . . 

### 9.3 Homogenní souřadnice

Každý bod  $X$  projektivního prostoru  $\mathcal{P}(W)$  reprezentujeme nějakým nenulovým vektorem  $\mathbf{x} \in W$ . Samozřejmě jak  $\mathbf{x}$ , tak jakýkoli jeho nenulový násobek reprezentují jeden a týž bod  $X$ .

**Definice.** *Homogenní souřadnice* bodu  $X \in \mathcal{P}(W)$  vzhledem k bázi  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  jsou souřadnice libovolného reprezentujícího vektoru  $\mathbf{x} \in W$  vzhledem k této bázi.

Homogenní souřadnice nejsou určeny jednoznačně, ale podle volby reprezentujícího vektoru se můžou lišit pouze o násobek nenulovým reálným číslem. Tuto nejednoznačnost bychom měli mít pořád na paměti, čemuž by mělo napomáhat následující značení:

$$X = (x_0 : x_1 : x_2 : \dots) \quad (9.12)$$

představuje bod  $X \in \mathcal{P}(W)$  reprezentovaný vektorem  $\mathbf{x} = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + \dots \in W$ .<sup>5</sup>

Vzhledem k tomu, že pracujeme výhradně s projektivními rozšířeními afinních prostorů, je vhodné si volbu báze chytře **přizpůsobit**. To uděláme jednou provždy následujícím způsobem:

Uvažme afinní prostor  $\mathcal{A}$  s afinní souřadnou soustavou určenou afinním repérem  $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$ . Zastupující vektorový prostor projektivního rozšíření  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}$  značíme jako obvykle  $W$ . Chytře přizpůsobená báze prostoru  $W$  je báze  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  taková, že vektory  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \in \vec{\mathcal{A}}$  jsou právě vektory z afinního repéru výše a vektor  $\mathbf{e}_0 \notin \vec{\mathcal{A}}$  je právě vektor reprezentující počátek  $O$ . Vzhledem k takto zvolené bázi umíme velmi snadno rozlišovat vlastní body od nevlastních:

- Bod  $X$  je nevlastní, právě když  $x_0 = 0$ . Jinými slovy,  $\mathbf{x} \in \vec{\mathcal{A}}$  a afinní souřadnice tohoto vektoru jsou

$$(x_1, x_2, \dots).$$

<sup>5</sup>Pro libovolné  $a \neq 0$  je tedy  $X = (x_0 : x_1 : x_2 : \dots) = (ax_0 : ax_1 : ax_2 : \dots)$ .

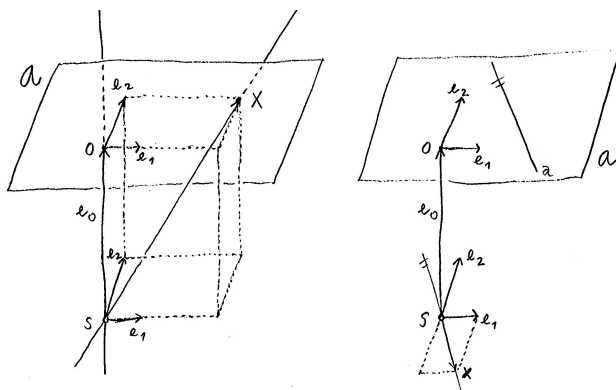
- Bod  $X$  je vlastní, právě když  $x_0 \neq 0$ . V tomto případě platí

$$(x_0 : x_1 : x_2 : \dots) = \left( 1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0} : \dots \right).$$

Jinými slovy, afinní souřadnice tohoto bodu jsou

$$\left[ \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots \right].$$

Vzhledem k takto přizpůsobené bázi  $W$  je afinní prostor  $\mathcal{A}$  (jakožto podmnožina  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(W)$ ) interpretován jako podmnožina ve  $W$  popsaná rovnicí  $x_0 = 1$ .



Obrázek 9.24: Vlastní bod  $X = O + 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = S + \mathbf{e}_0 + 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  má homogenní souřadnice  $(1 : 3 : 1)$ . Nevlastní bod zastoupený přímkou se směrovým vektorem  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$  má homogenní souřadnice  $(0 : 1 : -1)$ .

## 9.4 Projektivní zobrazení

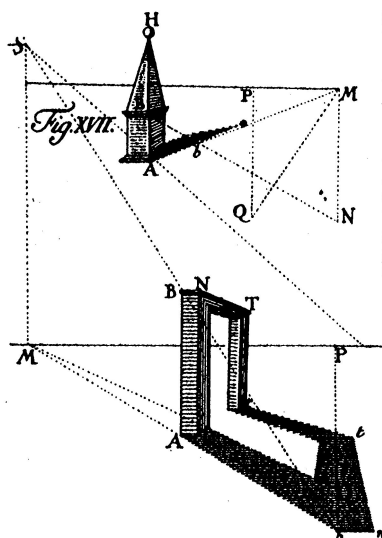
Modelové projektivní zobrazení je středové promítání mezi projektivními rovinami  $\tilde{\mathcal{A}}$  a  $\tilde{\mathcal{A}}'$ , viz obr. 9.21 a okolní diskuzi. Toto zobrazení zobrazuje přímky na přímky a projektivní zobrazení je obecně charakterizováno právě touto vlastností. Pokud uvažujeme středové promítání jako zobrazení z okolního projektivního prostoru do projektivní roviny  $\tilde{\mathcal{A}}'$ , pak některé přímky se samozřejmě zobrazují jako body, viz obr. 9.25.

**Definice.** Zobrazení mezi projektivními prostory dimenze aspoň 2 se nazývá *projektivní*, pokud zobrazuje projektivní přímky na projektivní přímky nebo body. Bijektivní projektivní zobrazení se nazývá *projektivita* nebo *kolineace*.

Kdyby v definici nebyl dodatek o dimenzi aspoň 2, pak např. každá bijekce na projektivní přímce by byla kolineací, což nemůžeme nepotřebovat. Jak ale rozšířit definici projektivního zobrazení pro dimenzi 1? Nejprve ukážeme, jak krásně jsou kolineace charakterizovány, poté bude vše jasné.

Uvažme vektorové prostory  $W$  a  $W'$  stejné dimenze a nějaký lineární izomorfismus  $F : W \rightarrow W'$ . Zobrazení  $F$  zobrazuje jakýkoli vektorový podprostor ve  $W$  na vektorový podprostor ve  $W'$ ,





Obrázek 9.25: [Be] Ukázka z Lambertovy Perspektivy (1759)

jež má stejnou dimenzi. Zejména, aplikujeme-li tento poznatek na podprostory dimenze 1, vidíme, že  $F$  určuje nějaké zobrazení mezi projektivními prostory  $f : \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W')$ . Tatáž úvaha pro podprostory dimenze 2 ukazuje, že  $f$  zobrazuje přímky na přímky, tudíž je  $f$  projektivní. Z bijektivnosti  $F$  navíc plyne bijektivnost  $f$ . Celkem tedy lineární izomorfismus  $F$  určuje nějakou kolineaci  $f$ . Následující věta říká, že platí také opačné tvrzení (důkaz a další podrobnosti lze najít např. v [Be, část 5.4]):

**Věta** (Základní věta projektivní geometrie). *Každá kolineace mezi projektivními prostory  $\mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W')$  dimenze alespoň 2 je určena nějakým lineárním izomorfismem  $W \rightarrow W'$ .*

Lineární zobrazení  $F$  jednoznačně určuje projektivní zobrazení  $f$ , avšak tato korespondence není vzájemně jednoznačná. Uvědomte si, jak se mohou lišit lineární zobrazení  $F$ , jež indukují totéž projektivní zobrazení  $f$ . ◀

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{F} & W' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{P}(W) & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}(W')
 \end{array}$$

Obrázek 9.26: Zobrazení  $f$  je projektivní, právě když  $F$  existuje, je lineární a diagram komutuje.

Předchozí věta lze formulovat obecněji také pro zobrazení mezi prostory různých dimenzí. Projektivní zobrazení  $f : \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W')$  určené lineárním zobrazením  $F : W \rightarrow W'$  je zcela

definováno požadavkem, aby

$$\boxed{f(q(\mathbf{x})) = q'(F(\mathbf{x})),} \quad (9.13)$$

kde  $q : W \rightarrow \mathcal{P}(W)$  (resp.  $q' : W' \rightarrow \mathcal{P}(W')$ ) je tzv. kanonická projekce, která vektoru  $\mathbf{x} \in W$  přiřazuje bod  $X \in \mathcal{P}(W)$ . Díky této charakterizaci je nyní jasné, jak přirozeně rozšířit definici projektivních zobrazení i v případech, kdy některý z prostorů má dimenzi menší než 2:

**Definice** (ekvivalentní). Zobrazení mezi projektivními prostory  $f : \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W')$  (libovolných dimenzí) se nazývá *projektivní*, pokud existuje lineární zobrazení mezi zastupujícími vektorovými prostory  $F : W \rightarrow W'$  tak, že pro libovolný  $\mathbf{x} \in W$  platí (9.13).



Odtud lze také vyvodit následující poznatek (sr. s důsledkem 5.2):

**Důsledek.** *Projektivní zobrazení projektivního prostoru dimenze  $n$  je určeno obrazem  $n + 2$  bodů, z nichž žádná  $(n + 1)$ -tice neleží v jedné nadrovině.*

Speciálně, pokud je  $n = 1$ , pak  $n + 2 = 3$ . Tzn., že obraz libovolného bodu  $X$  na projektivní přímce je jednoznačně určen obrazem 3 navzájem různých bodů  $A, B, C$ , i když nemusí být na první pohled jasné jak. Polohu  $X$  vzhledem k trojici  $A, B, C$  je možné charakterizovat reálným číslem, které je nutně (velice důležitým!) projektivním invariantem. Tímto invariantem je tzv. dvojpoměr čtyř bodů.

## 9.5 Dvojpoměr

Dvojpoměr lze popsat celkem různorodě, viz např. [Be, kapitola 6]. Pro čtveřici  $(A, B, C, D)$  vlastních (kolineárních, navzájem různých) bodů v projektivním rozšíření nějakého afinního prostoru je *dvojpoměr* této čtveřice roven podílu dělicích poměrů:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}. \quad (9.14)$$

Definice dvojpoměru samozřejmě závisí na pořadí bodů ve čtveřici, viz cvičení 9.7. Pokud je náhodou  $(ABCD) = -1$ , říkáme o čtveřici bodů, že je v tzv. *harmonickém poměru*. V mezních případech vychází dvojpoměr následovně: pro  $A = B$  je  $(ABCD) = 1$ , pro  $A = C$  je  $(ABCD) = 0$ , pro  $B = C$  je  $(ABCD) = \pm\infty$  apod.

Je-li bod  $D$  nevlastní, pak  $(ABD_\infty) = \lim_{D \rightarrow \infty} (ABD) = 1$ , a proto platí

$$(ABCD_\infty) = (ABC).$$

Podobný vztah platí, i když je jiný bod z dané čtveřice nevlastní. . . Pokud je náhodou  $C$  středem úsečky  $AB$ , potom  $(ABCD_\infty) = (ABC) = -1$ , čili čtveřice  $A, B$ , střed úsečky  $AB$  a nevlastní bod přímky  $AB$  je vždy v harmonickém poměru.

### Homogenní formulace

Vzhledem k nějakému afinnímu repéru na přímce obsahující body  $A, B, C$  a  $D$  označíme jejich souřadnice  $a, b, c$  a  $d$ . Potom definice (9.14) pro čtveřici vlastních bodů vypadá v těchto souřadnicích takto:

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}.$$

Uvědomte si, že toto číslo nezávisí na volbě afinního repéru!

Uvažme homogenní souřadnice na projektivním rozšíření přímky, jež jsou přizpůsobeny afinním souřadnicím stejně jako v odst. 9.3. Tzn., že homogenní souřadnice bodu  $A$  jsou  $(1 : a)$  apod. Potom zřejmě platí

$$b - a = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}$$


a tento zápis má tu výhodu, že nám umožní vyjádřit předchozí limitní úvahy s nevlastními body krásně homogenním způsobem. V homogenních souřadnicích je totiž  $D_\infty = \lim_{d \rightarrow \infty} (1 : d) = (0 : 1)$ , takže např.  $(ABD_\infty) = \lim_{D \rightarrow \infty} (ABD) = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{d-a}{d-b} = 1$  je v homogenních souřadnicích vyjádřeno jako

$$(ABD_\infty) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \\ 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Tato pozorování vedou k následující jednotné definici dvojpoměru, v níž nerozlišujeme mezi body vlastními a nevlastními.

**Definice.** Dvojpoměr čtveřice navzájem různých bodů na projektivní přímce s homogenními souřadnicemi  $A = (a_0 : a_1)$ ,  $B = (b_0 : b_1)$ ,  $C = (c_0 : c_1)$ ,  $D = (d_0 : d_1)$  je reálné číslo

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} c_0 & a_0 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_0 & a_0 \\ d_1 & a_1 \end{vmatrix}}. \quad (9.15)$$

Uvědomte si, že stejně jako výše toto číslo nezávisí na volbě souřadné soustavy! Pokud dva body splývají, znamená to, že jejich reprezentující vektory jsou lineárně závislé, což je ekvivalentní s tím, že odpovídající determinant v předchozím vyjádření je nulový. V takových případech nemusí být dvojpoměr definován, sr. s úvodní diskuzí... 

## 9.6 Užitek

### Některé afinně–projektivní vztahy

Fundamentální relací v projektivní geometrii je incidence. Vzájemné polohy projektivních podprostorů v projektivním prostoru můžeme rozlišovat pouze tři — podprostory jsou:

- *incidentní*, pokud jeden je podmnožinou druhého,
- *různoběžné*, pokud nejsou incidentní a mají neprázdný průnik,

- *mimoběžné*, pokud nejsou incidentní, ani různoběžné (tzn. mají prázdný průnik).

Fundamentální relací v afinní geometrii je rovnoběžnost. V rámci projektivních rozšíření  $\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}} \subset \tilde{\mathcal{A}}$  afinních podprostorů  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$  je rovnoběžnost  $\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$  pouze speciálním případem různoběžnosti, kdy průnik  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$  sestává výhradně z nevlastních bodů. Jinými slovy můžeme rovnoběžnost charakterizovat takto:

$$\mathcal{B} \parallel \mathcal{C} \iff \infty_{\mathcal{B}} \subseteq \infty_{\mathcal{C}} \text{ nebo } \infty_{\mathcal{B}} \supseteq \infty_{\mathcal{C}}.$$

V tomto duchu lze základní větu afinní geometrie (odst. 5.3) vyslovit následovně:

- Kolineace mezi projektivními rozšířeními afinních prostorů, která zobrazuje vlastní body na vlastní (ekvivalentně, nevlastní body na nevlastní), je nutně afinní zobrazení.

### Rovnice nadroviny

Přímka v rovině určená body  $A = [a_1, a_2]$  a  $B = [b_1, b_2]$  má rovnici

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

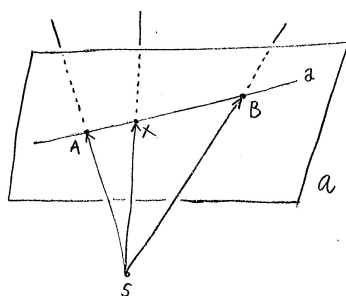
Přímka určená bodem  $A = [a_1, a_2]$  a směrem  $\mathbf{b} = [b_1, b_2]$  má rovnici

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Obecněji, přímka určená dvěma body v projektivním rozšíření roviny s homogenními souřadnicemi  $A = (a_0 : a_1 : a_2)$  a  $B = (b_0 : b_1 : b_2)$  má rovnicové vyjádření

$$\begin{vmatrix} x_0 & a_0 & b_0 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

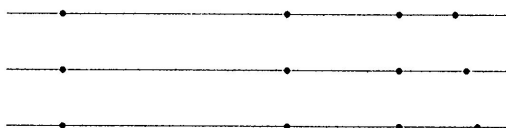
⇒ Zdůvodnění těchto tvrzení je velmi prosté, viz obr. 9.27. Tyto poznatky lze dále zobecňovat pro nadroviny v  $\tilde{\mathbb{R}}^n$ , ale i jinak. Srovnejte výsledky s návodem (4) v odst. 6.5.



Obrázek 9.27: Body  $A, B, X$  jsou kolineární právě tehdy, když vektory  $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SX}$  jsou lineárně závislé.

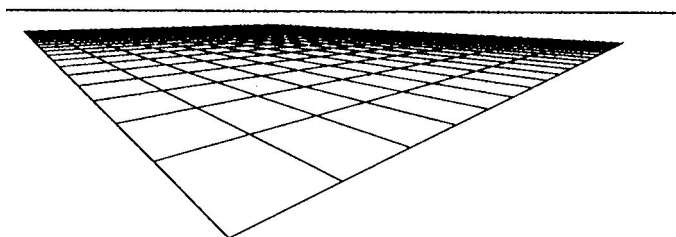
### Perspektiva pro malíře

Se znalostí dvojpoměru čtyř bodů umíme přesvědčivě dokázat, která čtveřice bodů na obr. 9.28 je a která naopak není projektivním průmětem čtyř ekvidistantních bodů. Všimněte si, že výsledek umíte celkem bezpečně uhodnout ještě před tím, než začnete cokoli měřit/počítat!



Obrázek 9.28: [St] Která čtveřice bodů je projektivním obrazem stejně vzdálených bodů?

Předchozí úloha souvisí s problémem věrného zobrazení čtvercové dlažby a podobných běžných věcí. Na obr. 9.29 je naznačena užitečná pomůcka — *horizont*, což je průmět nevlastní přímky zobrazované roviny (sr. s obr. 9.21).



Obrázek 9.29: [St] Perspektivní průmět čtvercového dláždění roviny.

Těchto pár postřehů ve skutečnosti stačí k tomu, abychom korektně sestrojili perspektivní průmět libovolného bodu v rovině, resp. v prostoru, jsou-li dány průměty 4, resp. 5 bodů v dostatečně obecné poloze (ve smyslu důsledku 9.4). Tyto dovednosti jsme procvičovali v konstrukční geometrii s pravítkem a kružítkem, v kapitole IV naznačíme, jak řešit podobné problémy analyticky.

### Porovnání perspektivních snímků

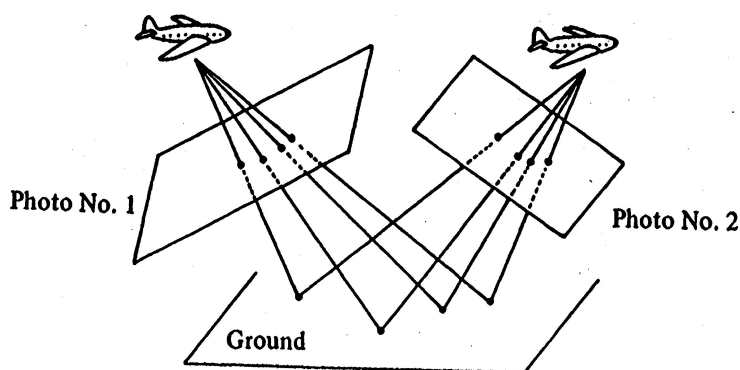
Potřebujeme-li sestavit větší snímek z několika dílčích, pracujeme s několika referenčními body, které se snažíme na sebe „nějak napasovat“ a zbytek „nějak transformovat“. Se základními znalostmi projektivní geometrie všechny neurčitosti v předchozím popisu mizí:

Předpokládejme, že snímáme rovinu jako na obr. 9.30. Korespondence mezi snímkem 1 a snímkem 2 je složením dvou perspektiv, je to tedy projektivní zobrazení. Podle důsledku 9.4 je toto zobrazení jednoznačně určeno obrazem 4 bodů, z nichž žádné 3 neleží na jedné přímce. V kapitole IV se naučíme, jak toto zobrazení vyjádřit analyticky. . .

## 9.7 Cvičení

- (1) Řešte některou z předchozích úloh v homogenních souřadnicích, viz např. úlohy ze cvičení 6.7 a 7.4.





Obrázek 9.30: [Be] Pro porovnání dvou perspektivních obrazů téže roviny nám stačí obrazy 4 bodů, z nichž žádné 3 nejsou kolineární.

- (2) Dokažte, že pro libovolnou čtveřici kolineárních bodů platí

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

- (3) Dokažte, že vzhledem k označení  $(ABCD) = k$  platí

$$(ACBD) = 1 - k, (ABDC) = \frac{1}{k}, \dots$$

- (4) Obecná projektivní transformace projektivní přímky má v homogenních souřadnicích následující vyjádření:

$$f(x_0 : x_1) = (kx_0 + lx_1 : mx_0 + nx_1),$$

kde  $k, l, m, n \in \mathbb{R}$ . Dokažte, že  $f$  zachovává dvojpoměry.

- (5) Připomeňte si některé konstrukce zmiňované v předchozím textu, viz např. obr. 9.29.
- (6) Pomocí vektorové algebry dokažte nějaké tvrzení elementární projektivní geometrie, např. Pappovu větu.

Algebraická definice eukleidovského prostoru je taková, že je to afinní prostor s eukleidovskou metrikou, což je metrika kompatibilní s afinní strukturou. Eukleidovská metrika je určena skalárním součinem na zaměření.

Pomocí skalárního součinu se definuje velikost vektoru — odtud velikost úsečky neboli vzdálenost dvou bodů. Dále pak kolmost a odchylka dvou vektorů — odtud velikost úhlu. Pojem kolmosti, vzdálenosti a odchylky poté přirozeně rozšíříme na libovolné podprostory v obecném eukleidovském prostoru. Geometrická charakterizace dvojic bodů (resp. vektorů), v nichž se vzdálenost (resp. odchylka) realizuje, zobecňuje naše poznatky z konstrukční geometrie a je založena na kolmosti, resp. kolmém průmětu. Celá kapitola končí diskuzí nad obsahy rovnoběžníků, resp. objemy obecných rovnoběžnostěn s několika užitečnými algebraickými konstrukcemi jako je vnější a vektorový součin.

## 10 Eukleidovské prostory, shodná a podobná zobrazení

### 10.1 Úvod

V eukleidovské geometrii dominuje — vedle rovnoběžnosti — pojem **shodnosti**. Chceme tedy analyticky interpretovat shodnost, což v první řadě znamená shodnost úseček a úhlů. Vzhledem k tomu, s jakou oblibou používáme reálná čísla, budeme přiřazovat úsečkám a úhlům jejich velikosti a prohlásíme, že

- úsečky, resp. úhly jsou shodné, pokud mají stejnou velikost.

Je jasné, že ne každá funkce, která úsečkám přiřazuje jejich velikosti, určuje shodnost jak ji chápeme v eukleidovském prostoru. Přirozené požadavky jsou:

(a)  $|AB| \geq 0$ ,

(b)  $|AB| = 0 \iff A = B$ ,

(c)  $|AB| = |BA|$ ,

$$(d) |AC| \leq |AB| + |BC|,$$

kde  $A, B, C$  jsou libovolné body a  $|AB|$  značí velikost úsečky  $AB$ , neboli vzdálenost bodů  $A$  a  $B$ . Požadavky (a)–(b) jsou právě axiomy obecného *metrického prostoru*, tudíž každý eukleidovský prostor je metrickým prostorem. Tyto předpoklady však určitě nestačí — bylo by např. velmi podivné, kdyby protilehlé strany v rovnoběžníku měly mít jinou velikost. Jinými slovy, aby metrický prostor byl eukleidovským prostorem, musí být metrika kompatibilní s **rovnoběžností**, tj. s afinní strukturou:

$$(e) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies |AB| = |CD|.$$

Eukleidovská metrika tedy musí být určena nějakou funkcí na zaměření, která vektorům přiřazuje jejich velikost, a to tak, že velikost úsečky bude určena velikostí odpovídajícího vektoru. Takto se pomalu dostáváme k pojmu skalárního součinu. . .

## 10.2 Skalární součin

Standardní skalární součin v  $\mathbb{R}^n$  přiřazuje dvěma vektorům  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots)$  a  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots)$  reálné číslo

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots \quad (10.1)$$

Toto přiřazení má následující vlastnosti, jež jsou právě definujícími vlastnostmi pro obecný skalární součin na obecném vektorovém prostoru  $V$ :

- (a)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ ,
- (b)  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ ,
- (c)  $(r\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = r(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ ,
- (d)  $\mathbf{u} \neq \mathbf{o} \implies \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$ ,

kde  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  jsou libovolné vektory a  $r$  je libovolné reálné číslo. Stručně a jasně můžeme říct, že:

**Definice.** *Skalární součin* na vektorovém prostoru  $V$  je symetrická (a), bilineární (a)–(c), pozitivně definitní (d) forma  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ .

Velikost vektoru  $\mathbf{u}$  je (díky pozitivní definitnosti dobře definované!) reálné číslo

$$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

Ačkoli je to více než zřejmé, pro jistotu připomínáme, že  $\|\mathbf{o}\| = 0$ , resp.  $\|\mathbf{u}\| = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{o}$ .

⇒ Přímo z definujících vlastností, hlavně tedy z (d), se v lineární algebře odvodilo několik užitečných nerovností. Nejprve tzv. *Cauchyova–Schwartzova nerovnost*,

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|, \quad (10.2)$$

odkud pak plyne tzv. *trojúhelníková nerovnost*,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|. \quad (10.3)$$

Přitom v obou případech platí rovnost právě tehdy, když vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  jsou lineárně závislé.



Vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  jsou *kolmé*, pokud  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ; značíme  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ .

Z nerovnosti (10.2) plyne, že podíl  $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$  má vždy hodnoty v intervalu  $[-1, 1]$ . *Odchylka nenulových vektorů  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$*  se definuje jako

$$\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}, \quad (10.4)$$

což je reálné číslo z intervalu  $[0, \pi]$ . Motivace k této definici jistě není na první pohled zřejmá, proto se k ní ještě vrátíme, a to hned v následujícím odstavci. V každém případě platí:

- vektory jsou kolmé právě tehdy, když mají odchylku  $\frac{\pi}{2}$ .

K dalším algebraickým záležitostem odvozeným ze skalárního součinu se vrátíme v podkap. 13.

Báze vektorového prostoru je *ortonormální*, pokud všechny báze vektory jsou navzájem kolmé a mají velikost 1. Z (10.1) plyne, že standardní báze  $\mathbb{R}^n$  je vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu ortonormální. Naopak, z bilinearity plyne, že

- souřadnicové vyjádření jakéhokoli skalárního součinu vzhledem k libovolné ortonormální bázi má tvar (10.1).

Skalární součin na  $V$  je tedy jednoznačně určen tím, že nějakou bázi  $V$  prohlásíme za ortonormální.

Skalární součin na vektorovém prostoru  $V$  kanonicky ztotožňuje  $V$  s jeho duálním prostorem  $V^*$ , což je vektorový prostor všech lineárních zobrazení  $V \rightarrow \mathbb{R}$ . Toto ztotožnění vypadá tak, že vektoru  $\mathbf{v} \in V$  odpovídá forma  $v : V \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že

$$v(\mathbf{x}) := \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \quad (10.5)$$

pro libovolný  $\mathbf{x} \in V$ . Speciálně — pro standardní skalární součin na  $\mathbb{R}^n$  — vektoru  $\mathbf{v} = (a_1, a_2, \dots)$  odpovídá lineární forma  $v(\mathbf{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots$ . Tento jednoduchý poznatek používáme při rovnicovém vyjadřování podprostorů a jejich kolmých doplňků...

### 10.3 Eukleidovský prostor

Vektorový prostor se skalárním součinem se obvykle nazývá eukleidovský vektorový prostor. Pokud mluvíme jenom o eukleidovském prostoru, máme na mysli eukleidovský bodový (afinní) prostor:

**Definice.** *Eukleidovský prostor* je afinní prostor  $\mathcal{E}$  se skalárním součinem na zaměření  $\vec{\mathcal{E}}$ .

*Velikost úsečky  $AB$*  je rovna *vzdálenosti* jejich krajních bodů  $A$  a  $B$ , jež je rovna velikosti odpovídajícího vektoru  $\overrightarrow{AB}$ ; značíme

$$|AB| := v(A, B) := \|\overrightarrow{AB}\|. \quad (10.6)$$

Odtud a z definujících vlastností skalárního součinu plyne, že jsou splněny všechny axiomy metrického prostoru vyjmenované na str. 47. Axióm (d) zřejmě odkazuje na nerovnost (10.3), přičemž

- $|AC| = |AB| + |BC|$  právě tehdy, když bod  $B$  je mezi  $A$  a  $C$ .



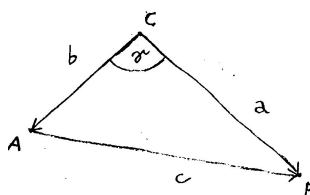
Úhel v afinní rovině je definován jako průnik dvou polorovin, viz 8.2. Je-li bod  $A$  vrcholem úhlu a body  $B$  a  $C$  jsou libovolné body, z nichž každý leží na jedné hraniční polopřímce (a žádný nesplývá s  $A$ ), pak *velikost úhlu* rozumíme odchylku vektorů  $\vec{AB}$  a  $\vec{AC}$ ; značíme

$$\sphericalangle BAC := \sphericalangle(\vec{AB}, \vec{AC}). \quad (10.7)$$

Uvědomte si, že definice skutečně nezávisí na výběru bodů  $B$  a  $C$  na ramenech úhlu.

### Poznámky k definici odchylky vektorů

Nyní se ještě stručně vrátíme k motivacím předchozích definic kolmosti a odchylky vektorů v odst. 10.2. V trojúhelníku  $ABC$  označíme postupně vektory  $\vec{CB} = \mathbf{a}$ ,  $\vec{CA} = \mathbf{b}$ ,  $\vec{AB} = \mathbf{c}$ , jejich velikosti  $\|\mathbf{a}\| = a$ ,  $\|\mathbf{b}\| = b$ ,  $\|\mathbf{c}\| = c$  a velikost úhlu  $\sphericalangle ACB = \gamma$ .



Obrázek 10.1: V obecném trojúhelníku v eukleidovské rovině platí  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ .

Základní věta eukleidovské geometrie, která vyjadřuje vztah mezi stranami trojúhelníku a jeho vnitřními úhly — **kosinová věta**<sup>1</sup> — říká:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Na druhé straně, pro dané vektory platí  $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$  a z obecných vlastností skalárního součinu snadno odvodíme:

$$\|\mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Porovnáním těchto dvou vyjádření dostáváme

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma, \quad (10.8)$$

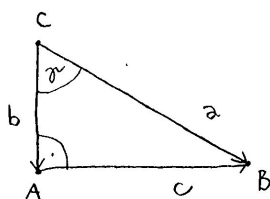
kde  $\gamma = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , což je akorát jinak napsaná rovnost (10.4).

Odtud vidíme, že rovnost (10.4) je ekvivalentní kosinové větě, což zdůrazňujeme proto, aby bylo jasné, že tato věta — stejně jako její speciální případy a všechny důsledky — platí v libovolném eukleidovském prostoru! Ve speciálním případě, když je trojúhelník pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu  $C$ , dostáváme Pythagorovu větu. V pravoúhlém trojúhelníku s pravým úhlem u vrcholu  $A$  dostáváme  $\cos \gamma = \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{a}\|}$ , viz obr. 10.2.

## 10.4 Shodná a podobná zobrazení

Shodné zobrazení je takové zobrazení, které zobrazuje shodné věci na shodné. Shodnými věcmi primárně myslíme shodné úsečky a úhly, přičemž shodnost úhlů je zaručena shodností úseček (viz předchozí rozbor nebo větu SSS). Shodnost úseček charakterizujeme pomocí jejich velikostí, tudíž shodné zobrazení je takové zobrazení, které zachovává eukleidovskou metriku:

<sup>1</sup>Viz II.12–13 v [Eu].



Obrázek 10.2: Protože  $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ , je  $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$  ekvivalentní s  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ . V takovém případě platí  $\cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{a}\|}$ .

**Definice.** Zobrazení mezi eukleidovskými prostory  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  se nazývá *shodné*, pokud pro libovolné body  $A, B \in \mathcal{E}$  platí

$$|f(A)f(B)| = |AB|.$$

Bijektivní shodné zobrazení se jmenuje *shodnost*.

Velikost úsečky je definována jako velikost odpovídajícího vektoru a ta je odvozena ze skalárního součinu. Zřejmě tedy pokud je  $f$  takové afinní zobrazení, že indukované lineární zobrazení  $\vec{f}$  zachovává skalární součin, pak  $f$  je nutně shodné. Ukážeme, že platí také opačná implikace:

Předpokládejme, že  $f$  zachovává vzdálenosti bodů a uvažme libovolnou trojici kolineárních bodů, kde  $B$  je mezi body  $A$  a  $C$ . Tato vlastnost je charakterizována rovností  $|AC| = |AB| + |BC|$ . Abychom se neupsali, budeme značit obrazy jednotlivých bodů  $f(A) =: A'$  apod. Podle našeho předpokladu můžeme doplnit

$$|AC| = |AB| + |BC| = |A'B'| + |B'C'| = |A'C'|,$$

odkud přímo vyplývá, že:

- bod  $B'$  je mezi body  $A'$  a  $C'$ , tzn.  $f$  zobrazuje kolineární body na kolineární body,
- dělicí poměr trojice  $(A, B, C)$  je stejný jako dělicí poměr trojice  $(A', B', C')$ .

To znamená, že  $f$  je afinní zobrazení a z předpokladu nyní plyne, že indukované lineární zobrazení  $\vec{f}$  zachovává velikosti vektorů. Rádi bychom ukázali, že odtud také plyne, že  $\vec{f}$  zachovává skalární součin. K tomu stačí umět vyjádřit jakýkoli skalární součin  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  pomocí velikostí vektorů: stejně jako v předchozím odstavci, rozepsáním a úpravou  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$  snadno odvodíme

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2).$$

Celkem tedy můžeme předchozí definici vyslovit následovně:

**Definice** (ekvivalentní). Zobrazení mezi eukleidovskými prostory  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  je *shodné*, pokud  $f$  je afinní zobrazení takové, že indukované lineární zobrazení  $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}'}$  zachovává skalární součin, tzn. pro libovolné  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \vec{\mathcal{E}}$  platí

$$\vec{f}(\mathbf{u}) \cdot \vec{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Dalším fundamentálním pojmem eukleidovské geometrie je **podobnost**. Trojúhelníky jsou podobné, když mají po dvou shodné vnitřní úhly, ekvivalentně, když poměr velikostí odpovídajících stran je konstantní; tento poměr se nazývá koeficient podobnosti. Shodné trojúhelníky jsou tedy podobné s koeficientem 1. Ačkoli se to nezdá, právě existence podobných a neshodných trojúhelníků je jednou z klíčových vlastností eukleidovských prostorů.

Obecné podobné zobrazení je takové zobrazení, které zachovává eukleidovskou metriku až na nějaký konstantní nenulový násobek:

**Definice.** Zobrazení mezi eukleidovskými prostory  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  se nazývá *podobné zobrazení*, pokud pro libovolné body  $A, B \in \mathcal{E}$  platí

$$|f(A)f(B)| = k \cdot |AB|,$$

kde  $k > 0$  je tzv. *koeficient* podobného zobrazení  $f$ . Bijektivní podobné zobrazení se jmenuje *podobnost*.

Ekvivalentně,  $f$  je podobné zobrazení s koeficientem  $k$ , pokud  $f$  je afinní zobrazení takové, že indukované lineární zobrazení  $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}'$  zachovává skalární součin až na násobek  $k^2$ , tzn. pro libovolné  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \vec{\mathcal{E}}$  platí

$$\vec{f}(\mathbf{u}) \cdot \vec{f}(\mathbf{v}) = k^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}).$$

Dalším studovaným typem zobrazení mezi eukleidovskými prostory jsou tzv. **ekviafinní** zobrazení, což jsou afinní zobrazení zachovávající obsahy, resp. objemy. K tomuto typu zatím neumíme nabídnout ekvivalentní algebraickou definici, ale s odkazem na podkap. 13 se k těmto (stejně jako ke všem ostatním dosud jmenovaným) zobrazením vrátíme v kapitole IV. Prozatím si aspoň můžeme uvědomit, že:



- shodná zobrazení jsou podobná zobrazení s koeficientem 1,
- shodná zobrazení jsou zobrazení, která jsou podobná a současně ekviafinní.



## 10.5 Cvičení

- (1) Připomeňte si z algebry důkaz Cauchyovy–Schwartzovy nerovnosti (10.2).
- (2) Ukažte, že níže uvedená zobrazení  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definují skalární součin a najděte nějakou ortonormální bázi  $V$ .

- Na vektorovém prostoru  $V = \mathbb{R}_n[x]$  všech polynomů v proměnné  $x$  stupně nejvýše  $n$ :

$$f \cdot g := \int_{-52}^{52} f(x) \cdot g(x) dx.$$

- Na vektorovém prostoru  $V$  všech symetrických (resp. antisymetrických) čtvercových matic řádu  $n$  (tr značí stopu matice, tj. součet čísel na hlavní diagonále):

$$A \cdot B := \text{tr}(A \cdot B).$$

- (3) Pomocí vektorové algebry dokažte nějaké tvrzení elementární eukleidovské geometrie, např. Thaletovu větu a větu opačnou.

## 11 Kolmost a kolmý průmět vektoru

### 11.1 Kolmost

Pomocí skalárního součinu jsme definovali kolmost dvou vektorů. Odtud je jasné, jak rozpoznat kolmost dvou přímek v libovolném eukleidovském prostoru. K dalšímu zobecňování pojmu kolmosti by nás měly navádět elementární definice, které jsme připomněli v odst. 1.1. Přímka je kolmá k rovině, pokud je směr přímky kolmý ke všem vektorům roviny (ekvivalentně, ke dvěma nezávislým vektorům). Dvě roviny jsou kolmé, pokud je normála jedné roviny obsažena ve druhé rovině (viz obr. 11.3). Zejména si všimněte, že pro určení kolmosti pracujeme výhradně se směry, tzn. je úplně lhostejné, zda se diskutované podprostory protínají, či nikoli. Kolmost (stejně jako posléze odchylka) je zcela určena **zaměřením** daných podprostorů.

Inspirování předchozími příklady vyslovíme následující obecnou definici:

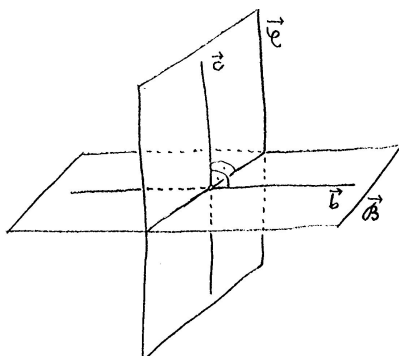
**Definice.** Podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  jsou *kolmé*, pokud jsou kolmá jejich zaměření  $\vec{\mathcal{B}}$  a  $\vec{\mathcal{C}}$  v  $\vec{\mathcal{E}}$ ; značíme  $\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$ .

Přitom vektorové podprostory  $\vec{\mathcal{B}}$  a  $\vec{\mathcal{C}}$  v  $\vec{\mathcal{E}}$  jsou *kolmé*, pokud  $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}^\perp$  nebo  $\vec{\mathcal{B}} \supseteq \vec{\mathcal{C}}^\perp$ , kde

$$\vec{\mathcal{C}}^\perp := \{\mathbf{x} \in \vec{\mathcal{E}} : \mathbf{x} \perp \vec{\mathcal{C}}\}$$

značí tzv. *kolmý doplněk podprostoru  $\vec{\mathcal{C}}$  v  $\vec{\mathcal{E}}$* .

Pokud dokonce platí  $\vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{C}}^\perp$ , říkáme, že  $\vec{\mathcal{B}}$  a  $\vec{\mathcal{C}}$  (příp.  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ ) jsou *kolmé totálně*.



Obrázek 11.3: Kolmé podprostory v eukleidovském prostoru: (1)  $\vec{b} \perp \vec{c}$ , (2)  $\vec{b} \perp \vec{\mathcal{C}}$ , (3)  $\vec{b} \perp \vec{\mathcal{C}}$  a  $\vec{b} \subset \vec{\mathcal{B}} \implies \vec{\mathcal{B}} \perp \vec{\mathcal{C}}$ , ...

Z důvodů, které jsou vysvětleny v odst. 11.2, občas zdůrazňujeme, že podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  jsou *kolmé v  $\mathcal{E}$*  (místo podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v  $\mathcal{E}$  jsou kolmé).

Pojmenování  $\vec{\mathcal{C}}^\perp$  kolmým doplňkem má své opodstatnění —  $\vec{\mathcal{C}}$  a  $\vec{\mathcal{C}}^\perp$  v obecném eukleidovském prostoru jsou vždy doplňkové (komplementární):



**Věta.** Pro libovolný vektorový podprostor  $\vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{E}}$  platí, že  $\vec{\mathcal{C}}^\perp$  je komplementární k  $\vec{\mathcal{C}}$ , tzn.

$$\vec{\mathcal{C}} \oplus \vec{\mathcal{C}}^\perp = \vec{\mathcal{E}},$$

neboli  $\vec{\mathcal{C}} + \vec{\mathcal{C}}^\perp = \vec{\mathcal{E}}$  a  $\vec{\mathcal{C}} \cap \vec{\mathcal{C}}^\perp = \{\mathbf{o}\}$ .

Toto pozorování má následující sice triviální, ale užitečné důsledky:

(1) Libovolný vektor  $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{E}}$  lze vyjádřit **jednoznačným** způsobem ve tvaru

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad (11.9)$$

pro nějaké vektory  $\mathbf{u} \in \vec{\mathcal{C}}$  a  $\mathbf{w} \in \vec{\mathcal{C}}^\perp$ .

(2) Totálně kolmé afinní podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$  se protínají v bodě.

Vektor  $\mathbf{u}$ , resp.  $\mathbf{w}$  z rozkladu (11.9) se jmenuje *kolmý průmět* vektoru  $\mathbf{v}$  do podprostoru  $\vec{\mathcal{C}}$ , resp.  $\vec{\mathcal{C}}^\perp$ . Důsledek (2) je bezprostředním důsledkem důsledku 7.1(1).

☞ Ještě všimneme několika jednoduchostí — každé tvrzení ilustrujte vhodným obrázkem, poté dokažte obecně.

**Věta.** Pro libovolné podprostory  $U_1$  a  $U_2$  v eukleidovském vektorovém prostoru  $V = \vec{\mathcal{E}}$  platí:

$$(1) (U_1^\perp)^\perp = U_1,$$

$$(2) (U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp,$$

$$(3) (U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp,$$

$$(4) U_1 \subseteq U_2 \iff U_1^\perp \supseteq U_2^\perp.$$

Odtud konečně plyne, že výše uvedená definice kolmosti je skutečně symetrická:

$$\mathcal{B} \perp \mathcal{C} \iff (\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}^\perp \text{ nebo } \vec{\mathcal{B}} \supseteq \vec{\mathcal{C}}^\perp) \iff (\vec{\mathcal{B}}^\perp \supseteq \vec{\mathcal{C}} \text{ nebo } \vec{\mathcal{B}}^\perp \subseteq \vec{\mathcal{C}}) \iff \mathcal{C} \perp \mathcal{B}.$$

Na závěr ještě jedno technické pozorování: Uvědomte si, že díky identifikaci  $V \cong V^*$  v (10.5) můžeme každou lineární rovnici s neznámými  $(x_1, x_2, \dots) = \mathbf{x}$  psát jako  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = c$ , kde  $i$ -tá souřadnice vektoru  $\mathbf{v}$  je právě koeficient u neznámé  $x_i$ . Kolmý doplněk podprostoru  $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \rangle$  má rovnicové vyjádření

$$U^\perp = \{\mathbf{x} \in V : \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x} = 0, \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{x} = 0, \dots\}$$

a opačně...

## 11.2 Speciální a podivné případy

Ačkoli je naše definice kolmosti celkem přirozená, zahrnuje několik zvláštností, které nemusí být na první pohled patrné. Tak např. z  $\{\mathbf{o}\}^\perp = \mathcal{E}$  plyne, že jakýkoli podprostor  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$  je kolmý ke všem triviálním podprostorům v  $\mathcal{E}$  (to jsou právě body a celý  $\mathcal{E}$ ). Toto je jen speciální a docela degenerovaný případ kolmosti, který nás příliš nezajímá. Poněkud podivnějším se může zdát následující postřeh.

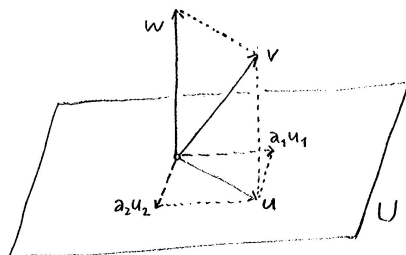
Kolmost je definována pomocí kolmých doplňků. Kolmý doplněk k  $\vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{E}}$  je určen nejen podprostorem  $\vec{\mathcal{C}}$ , ale dost podstatně také okolním prostorem  $\vec{\mathcal{E}}$ . Pokud uvažujeme podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  v  $\mathcal{E}$ , které ve skutečnosti patří do nějakého meziprostoru  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ , může se klidně stát, že

- $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  jsou kolmé v  $\mathcal{F}$ , ale nejsou kolmé v  $\mathcal{E}$ !

Uvědomte si, že tento fenomén lze pozorovat pouze v případě, kdy  $\vec{\mathcal{B}}$  a  $\vec{\mathcal{C}}$  mají netriviální průnik, a najdete vhodný příklad. Z uvedeného je jasné, proč jsme si této zvláštnosti zatím asi nikdy ne všimli — v trojrozměrném eukleidovském prostoru takový příklad nenajdeme... ◀

## 11.3 Jak určit kolmý průmět vektoru?

Uvažujme vektor  $\mathbf{v}$  v zaměření eukleidovského prostoru  $V = \vec{\mathcal{E}}$  a nějaký podprostor  $U \subset V$  (typicky zaměření nějakého afinního podprostoru), do kterého chceme  $\mathbf{v}$  kolmo promítnout. Kolmý průmět vektoru budeme potřebovat zejména k určování odchylek podprostorů, viz následující odstavce.



Obrázek 11.4: Kolmý průmět vektoru  $\mathbf{v}$  do podprostoru  $U$ .

Přirozený návod plynoucí z rozkladu (11.9) by mohl vypadat následovně:

- (1) Vybereme nějakou bázi  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots)$  podprostoru  $U$  a nějakou bázi  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots)$  kolmého doplňku  $U^\perp$ . Vektory  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots)$  tvoří bázi  $V = U \oplus U^\perp$ , tudíž existují jednoznačně určená čísla  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  taková, že platí:<sup>2</sup>

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots + b_1 \mathbf{w}_1 + b_2 \mathbf{w}_2 + \dots$$

Kolmý průmět  $\mathbf{u}$  vektoru  $\mathbf{v}$  do  $U$  je pak roven

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots$$

K určení koeficientů  $a_i, b_i$  potřebujeme řešit soustavu lineárních rovnic, jejíž rozměr je roven dimenzi prostoru  $V = \vec{\mathcal{E}}$ , což může být zbytečně velké číslo.

<sup>2</sup>Tj. souřadnice vektoru  $\mathbf{v}$  vzhledem k popsané bázi.

Početně výhodnější je zpravidla následující úvaha:

(2) Kolmý průmět  $\mathbf{u}$  vektoru  $\mathbf{v}$  do  $U$  je charakterizován dvěma vlastnostmi:

- (a)  $\mathbf{u} \in U$ ,
- (b)  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u} \in U^\perp$ .

Pokud máme vybránu nějakou bázi  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots)$  podprostoru  $U$ , pak předchozí dvě podmínky jsou ekvivalentní s:

- (a')  $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots$ , pro nějaká  $a_i \in \mathbb{R}$ ,
- (b')  $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}_1, \mathbf{w} \perp \mathbf{u}_2, \dots$

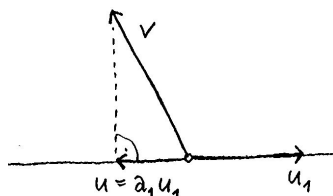
S předchozím vyjádřením vektoru  $\mathbf{w}$  a pomocí skalárního součinu můžeme vyjádřit  $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}_i$  jako  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i$ . Dosadíme-li nyní (a'), potom (b') je ekvivalentní se soustavou lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 + \dots &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1, \\ a_1\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + a_2\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \dots &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Jedná se o soustavu, jež má právě tolik rovnic jako neznámých,  $a_i$ , a těch je právě tolik, kolik je dimenze  $U$  (tzn. nezávisle na dimenzi okolního prostoru  $V$ ). Z podstaty věci má tato soustava jednoznačně určené řešení; po vyřešení a dosazení do (a') dostáváme hledaný kolmý průmět  $\mathbf{u}$ .

V nejjednodušším případě, kdy  $U = \langle \mathbf{u}_1 \rangle$ , uvedená soustava sestává z jediné rovnice — po vyřešení a dosazení vidíme, že kolmá projekce vektoru  $\mathbf{v}$  do podprostoru  $U = \langle \mathbf{u}_1 \rangle$  je vektor:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1. \quad (11.10)$$



Obrázek 11.5: Kolmý průmět vektoru do jednorozměrného podprostoru.



## 11.4 Cvičení

- (1) Rozhodněte, zda podprostory ze cvičení 7.4 jsou kolmé.
- (2) Ve standardním eukleidovském prostoru  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$  určete všechny možné podprostory, které prochází bodem  $B = [0, 3, 2]$  a jsou kolmé k přímce

$$q = \{[1 + 7t, 2t, -3 - t] : t \in \mathbb{R}\}.$$



(3) Udejte příklad dvou rovin ve vhodném eukleidovském prostoru, které jsou kolmé a současně mimoběžné.

(4) V  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$  určete kolmý průmět vektoru  $\mathbf{v}$  do podprostoru  $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ , kde

$$\mathbf{v} = (1, 2, 0, 1), \quad \mathbf{u}_1 = (-1, 0, 2, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (1, 0, -1, 0).$$

## 12 Vzdálenosti a odchylky podprostorů

### 12.1 Vzdálenosti

Vzdálenost dvou bodů  $A, B \in \mathcal{E}$  je určena vztahem (10.6). Vzdálenost libovolných dvou podmnožin  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v libovolném metrickém prostoru je definována jako

$$v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) := \inf\{|XY| : X \in \mathcal{B}, Y \in \mathcal{C}\}.$$

Pokud mají podmnožiny  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  nějaký společný bod, je zřejmě  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$ .

Zpravidla se zajímáme o podmnožiny, které jsou afinními podprostory v  $\mathcal{E}$ . V takovém případě se vzdálenost vždy realizuje v nějakých konkrétních bodech, tzn. množina na pravé straně předchozího výrazu má vždy minimum:

**Definice.** Vzdálenost podprostorů  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  je

$$v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) := \min\{|XY| : X \in \mathcal{B}, Y \in \mathcal{C}\}. \quad (12.11)$$

Geometrické určení vzdálenosti spočívá v charakterizaci takové dvojice bodů, v nichž se tato vzdálenost realizuje. Tak jsme to dělali už v konstrukční geometrii, nyní naše dosavadní zkušenosti zobecníme. Díky tomu budeme vždycky umět poměrně jednoduše určit body  $B \in \mathcal{B}$  a  $C \in \mathcal{C}$  takové, že

$$v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = |BC|,$$

aniž bychom museli minimalizovat nějakou funkci více proměnných.

#### Vzdálenost bodu od podprostoru

Pokud je některý z podprostorů bodem, např.  $\mathcal{B} = B$ , pak můžeme uvažovat následovně (viz obr. 12.6):

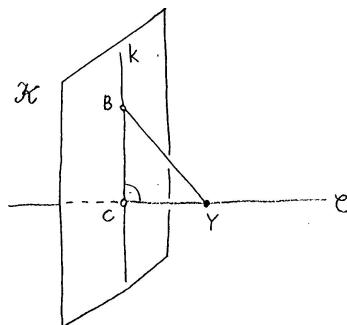
- (1) „spustíme kolmici“  $\mathcal{K}$  z bodu  $B$  na podprostor  $\mathcal{C}$ , tj. totálně kolmý podprostor  $\mathcal{K} = B + \vec{\mathcal{C}}^\perp$ ,
- (2) určíme „patu kolmice“, tj.  $C = \mathcal{C} \cap \mathcal{K}$ ,
- (3) prohlásíme, že  $v(B, \mathcal{C}) = |BC|$ .

To, že tato úvaha je správná a obecně platná v libovolném eukleidovském prostoru plyne jednak z důsledku (2) věty 11.1 (bod  $C$  je určen jednoznačně) a jednak z Pythagorovy věty: pro jakýkoli jiný bod  $Y \in \mathcal{C}$  je  $|BY|^2 = |BC|^2 + |CY|^2$ , přitom  $|CY| > 0$ , tudíž  $|BY| > |BC|$ .

Tím jsme zdůvodnili následující tvrzení:

**Věta.** Pro libovolný podprostor  $\mathcal{C}$  v eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  a libovolný bod  $B \notin \mathcal{C}$  platí, že  $v(B, \mathcal{C}) = |BC|$  právě tehdy, když přímka  $BC$  je **kolmá** k  $\mathcal{C}$ .

Přímku  $BC$  nazýváme *kolmicí* (bez uvozovek) z bodu  $B$  k podprostoru  $\mathcal{C}$ .



Obrázek 12.6: Vzdálenost bodu  $B$  od podprostoru  $\mathcal{C}$  je rovna vzdálenosti  $B$  od paty  $C$  kolmice  $k$ .

### Vzdálenost obecně

**Věta.** Pro libovolné podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  platí:

- (1)  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$  právě tehdy, když  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  mají společný bod.
- (2) Pokud  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \neq 0$ , pak  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = |BC|$  pro nějaké  $B \in \mathcal{B}$  a  $C \in \mathcal{C}$  právě tehdy, když přímka  $BC$  je **kolmá** k  $\mathcal{B}$  a současně k  $\mathcal{C}$ , tj.  $\overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{\mathcal{B}}^\perp \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}^\perp$ .
- Navíc dvojice  $B, C$  je určena jednoznačně právě tehdy, když podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  nemají společné směry, tj.  $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}} = \{\mathbf{o}\}$ .

Přímka  $BC$  je příčkou podprostorů  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ , která je nejkratší možná; každou takovou příčku nazýváme *osou*  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ . Zdůvodnění věty je následující:

- (1) Toto tvrzení platí v obecném metrickém prostoru, a to díky ekvivalenci  $|XY| = 0 \iff X = Y$  (axióm (b) na str. 47).
- (2) To, že podmínka  $\overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{\mathcal{B}}^\perp \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}^\perp$  je nutná k tomu, aby  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = |BC|$ , plyne z předchozích úvah okolo obr. 12.6: Pokud je  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = |BC|$ , pak taky  $|BC| = v(B, \mathcal{C})$  a současně  $|BC| = v(\mathcal{B}, C)$ . Přitom  $|BC| = v(B, \mathcal{C}) \implies \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{\mathcal{C}}$  a současně  $|BC| = v(\mathcal{B}, C) \implies \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{\mathcal{B}}$ .

Ukážeme, že je tato podmínka také dostatečná (viz obr. 12.7): Uvažme libovolné body  $X \in \mathcal{B}$ ,  $Y \in \mathcal{C}$  a pomocný bod

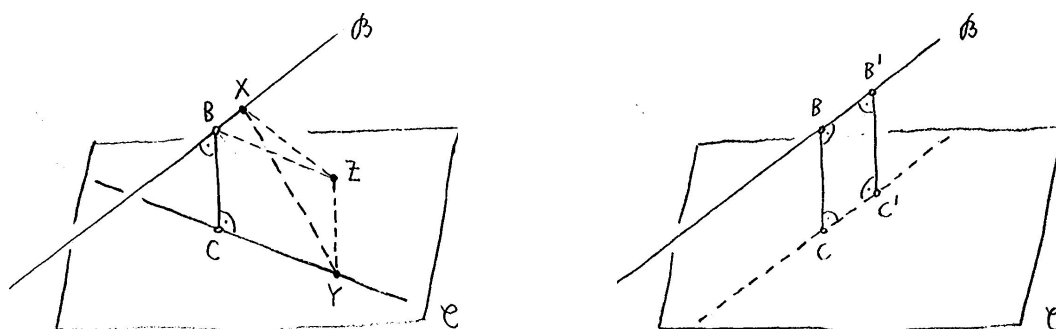
$$Z = Y + \overrightarrow{CB}.$$

Vektor  $\overrightarrow{ZX}$  je součtem  $\overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{YC} + \overrightarrow{BX}$ , tudíž patří do  $\vec{C} + \vec{B}$ . Protože  $\overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{BC}$ , je podle předpokladu  $\overrightarrow{ZY} \perp \overrightarrow{ZX}$ . Nyní z Pythagorovy věty v trojúhelníku  $XZY$  plyne

$$|XY| \geq |ZY| = |BC|.$$

Body  $X \in \mathcal{B}$ ,  $Y \in \mathcal{C}$  byly libovolné, skutečně tedy platí  $|BC| = \min\{|XY| : X \in \mathcal{B}, Y \in \mathcal{C}\}$ .

Dovětek týkající se jednoznačnosti plyne z právě dokázané ekvivalence: Je-li  $B \in \mathcal{B}$  a  $C \in \mathcal{C}$  dvojice taková, že  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = |BC|$ , pak  $\overrightarrow{BC} \in \vec{B}^\perp \cap \vec{C}^\perp$ . Podobně pro jakoukoli další dvojici  $B' \in \mathcal{B}$  a  $C' \in \mathcal{C}$  platí  $\overrightarrow{B'C'} \in \vec{B}'^\perp \cap \vec{C}'^\perp$ . Odtud zejména plyne  $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC}$ , což znamená, že  $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$ , což je evidentně vektor z  $\vec{B} \cap \vec{C}$ . Celkem tedy  $B = B'$  a  $C = C'$  právě tehdy, když  $\vec{B} \cap \vec{C} = \{\mathbf{o}\}$ .  $\square$



Obrázek 12.7: Vzdálenost bodů  $B \in \mathcal{B}$  a  $C \in \mathcal{C}$  je minimální, právě když přímka  $BC$  je kolmá jak na  $\mathcal{B}$ , tak na  $\mathcal{C}$ . Navíc dvojice  $B, C$  je určena jednoznačně, právě když podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  nemají společné směry.

## 12.2 Jak určit vzdálenost podprostorů?

### Vzdálenost bodu od podprostoru

Jistý návod v případě, že jeden z podprostorů je bod, jsme představili výše. Pro porovnání rychle zopakujeme, předp.  $\mathcal{B} = B$ :

- (1) Určíme totálně kolmý podprostor  $\mathcal{K} = B + \vec{C}^\perp$ , určíme průsečík  $C = \mathcal{C} \cap \mathcal{K}$ , vyjádříme  $|BC|$  a podtrhneme  $v(B, \mathcal{C}) = |BC|$ .

Při určování bodu  $C$  řešíme průnik dvou komplementárních podprostorů v  $\mathcal{E}$ , což může představovat zbytečně velkou soustavu rovnic. Početně výhodnější je zpravidla následující postup, který navíc budeme schopni okamžitě zobecnit pro libovolné podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ . Ignorujeme doplňkový podprostor  $\mathcal{K}$  a hledáme přímo patu kolmice, tj. bod  $C$ :

- (2) Pata  $C$  kolmice je charakterizována dvěma vlastnostmi:

- (a)  $C \in \mathcal{C}$ ,
- (b)  $\overrightarrow{BC} \in \vec{C}^\perp$ .

Předpokládejme, že  $\mathcal{C}$  je zadán parametricky  $\mathcal{C} = Y + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \rangle$  a vektory  $(\mathbf{u}_i)$  jsou lineárně nezávislé. Potom předchozí dvě podmínky jsou ekvivalentní s:

$$(a') \quad \mathcal{C} = Y + a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots, \text{ pro nějaká } a_i \in \mathbb{R},$$

$$(b') \quad \overrightarrow{BC} \perp \mathbf{u}_1, \overrightarrow{BC} \perp \mathbf{u}_2, \dots$$

Nyní  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BY} + a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots$ . Vyjádříme-li  $\overrightarrow{BC} \perp \mathbf{u}_i$  pomocí skalárního součinu, je (b') ekvivalentní se soustavou lineárních rovnic:

$$a_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 + \dots = \overrightarrow{YB} \cdot \mathbf{u}_1,$$

$$a_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + a_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \dots = \overrightarrow{YB} \cdot \mathbf{u}_2,$$

$$\vdots$$

Jedná se o soustavu, jež má právě tolik rovnic jako neznámých, a těch je právě tolik, kolik je dimenze  $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ . Řešení je určeno jednoznačně, po dosazení do (a') dostáváme hledanou patu kolmice  $\mathcal{C}$  a zbytek je jasný.

Není náhodou, že nám tento popis něco připomíná. Ve skutečnosti nejde o nic jiného než o výpočet kolmé projekce  $\mathbf{u}$  vektoru  $\mathbf{v} = \overrightarrow{YB}$  do podprostoru  $U = \overrightarrow{\mathcal{C}}$  a následné dosazení  $\mathcal{C} = Y + \mathbf{u}$ , viz obr. 12.6, příp. 12.7.

### Vzdálenost bodu od nadroviny

Ve speciálním případě, kdy  $\mathcal{C}$  je nadrovinou v  $\mathcal{E}$  můžeme pozorovat zajímavé zjednodušení, které se hodí zejména v případě, kdy  $\mathcal{C}$  je dána rovnicí

$$\mathcal{C} = \{X \in \mathcal{E} : \overrightarrow{YX} \cdot \mathbf{n} = 0\},$$

kde  $Y$  je nějaký (libovolný) bod v  $\mathcal{C}$  a  $\mathbf{n}$  je normálový vektor.

Nesoustředíme se na průmět  $\mathbf{u} \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$ , ale raději na průmět  $\mathbf{w} \in \overrightarrow{\mathcal{C}}^\perp = \langle \mathbf{n} \rangle$ . Podle (11.10) víme, že tento průmět je

$$\mathbf{w} = \frac{\overrightarrow{YB} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n}. \quad (12.12)$$

Odtud umíme vyjádřit patu kolmice  $\mathcal{C} = B - \mathbf{w}$ . Vzdálenost je rovna velikosti vektoru  $\mathbf{w}$ :

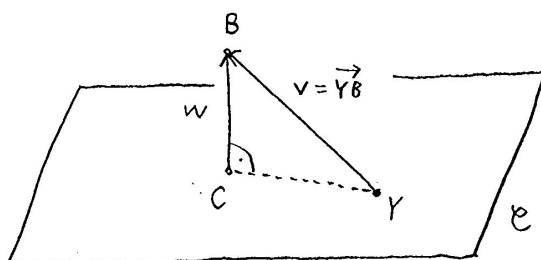
$$v(B, \mathcal{C}) = \frac{|\overrightarrow{YB} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}. \quad (12.13)$$

⇒ (V učebnicích bývá tato rovnost formulována různými způsoby — porovnejte všechna vyjádření, která najdete.)

Rovnost (12.13) lze alternativně odvodit z pravoúhlého trojúhelníku  $YCB$  jako na obr. 12.8: Značí-li  $\alpha$  velikost úhlu  $CYB$ , pak zřejmě platí

$$v(B, \mathcal{C}) = \|\overrightarrow{YB}\| \cdot \sin \alpha.$$

⇒ Odchyly diskutujeme hned v následujících odstavcích, takže pokud nahlédneme na str. 65 a dosadíme (12.15) do předchozího vyjádření, zjistíme, že všechno krásně souhlasí. . .



Obrázek 12.8: Vzdálenost bodu od nadroviny.

**Vzdálenost obecně**

Slibované zobecnění (2) pro obecné podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{E}$  zní:

(2') Dvojice bodů  $B$  a  $C$ , pro niž platí  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = |BC|$ , je podle věty 12.1 charakterizována následujícími vlastnostmi:

- (a)  $B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}$ ,
- (b)  $\overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{\mathcal{B}}^\perp \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}^\perp$ .

Předpokládejme, že oba podprostory jsou dány parametricky  $\mathcal{B} = X + \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ ,  $\mathcal{C} = Y + \langle \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_\ell \rangle$ . Potom předchozí podmínky jsou ekvivalentní s:

- (a')  $B = X + a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_k \mathbf{u}_k$ ,  $C = Y + a_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \dots + a_\ell \mathbf{u}_\ell$ , pro nějaká  $a_i \in \mathbb{R}$ ,
- (b')  $\overrightarrow{BC} \perp \mathbf{u}_i$ , pro všechna  $i = 1, \dots, \ell$ .

Nyní

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{XY} - a_1 \mathbf{u}_1 - \dots - a_k \mathbf{u}_k + a_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \dots + a_\ell \mathbf{u}_\ell$$

a (b') je ekvivalentní se soustavou lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} -a_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 - \dots + a_\ell \mathbf{u}_\ell \cdot \mathbf{u}_1 &= \overrightarrow{XY} \cdot \mathbf{u}_1, \\ -a_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 - \dots + a_\ell \mathbf{u}_\ell \cdot \mathbf{u}_2 &= \overrightarrow{XY} \cdot \mathbf{u}_2, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{12.14}$$

Po vyřešení soustavy a dosazení do (a') dostáváme hledanou dvojici bodů  $B$  a  $C$ ...

Všimněte si, že tentokrát nemůžeme jen tak předpokládat lineární nezávislost vektorů  $(\mathbf{u}_i)$ , nicméně můžeme aspoň předpokládat, že každá skupina  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$  a  $(\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_\ell)$  je tvořena nezávislými vektory. Přesto zmiňovaná soustava nemusí být jednoznačně řešitelná, což nám říká něco o vzájemné poloze  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ !

**Vzájemná poloha alternativně**

Pokud jsou podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  incidentní nebo různoběžné, pak  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$ . Tyto dva případy jsou rozlišeny tím, že v prvním případě je dimenze prostoru řešení soustavy (12.14) rovna dimenzi menšího z podprostorů  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ . Stejným způsobem umíme rozlišit rovnoběžnost od mimoběžnosti,

kdy  $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \neq 0$ . Celkem tedy vidíme, že vzájemnou polohu a vzdálenost podprostorů lze určit současně z jednoho počítání.

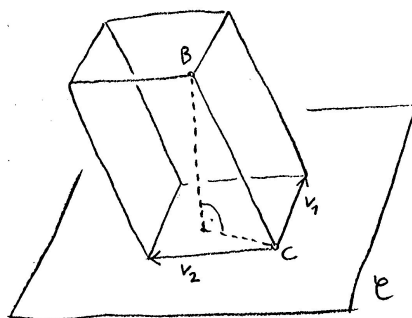
Pokud kvůli stručnosti označíme  $v := v(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ ,  $d :=$  dimenzi prostoru řešení soustavy (12.14) a  $m := \min(\dim \mathcal{B}, \dim \mathcal{C})$ , potom předchozí klasifikace vzájemných poloh vypadá následovně:

**Důsledek.** Podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  jsou

- *incidentní*  $\iff v = 0$  a  $d = m$ ,
- *různoběžné*  $\iff v = 0$  a  $d < m$ ,
- *rovnoběžné různé*  $\iff v \neq 0$  a  $d = m$ ,
- *mimoběžné*  $\iff v \neq 0$  a  $d < m$ .

### Vzdálenost alternativně

V podkap. 13 se budeme zabývat obsahy a objemy, zejména rovnoběžníků a rovnoběžnostěnů. Objem rovnoběžnostěnu je roven obsahu základny násobenému velikostí výšky. Odtud je možné vyjádřit výšku rovnoběžnostěnu, která často reprezentuje vzdálenost nějakých podprostorů, viz motivační obr. 12.9. Vtip je v tom, že tento postřeh lze zobecnit pro libovolné podprostory v libovolném eukleidovském prostoru. Tímto způsobem pak budeme umět vyjadřovat vzdálenosti, aniž bychom řešili jakoukoli soustavu rovnic, viz větu na str. 75. Uvědomte si, že takto nikdy neurčíme dvojici bodů, v nichž se vzdálenost realizuje, natož pak vzájemnou polohu podprostorů.



Obrázek 12.9: Velikost výšky naznačeného rovnoběžnostěnu je rovna vzdálenosti bodu  $B$  od roviny  $C = C + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ .

### 12.3 Odchylky

Odchylka dvou nenulových vektorů je definována rovností (10.4), příp. (10.8). Podobně jako u kolmosti, odchylka dvou afinních podprostorů je zcela určena jejich **zaměřeními**.

Pokud mají zaměření triviální průnik, pak je definice jasná — stačí uvažovat minimum ze všech možných odchylek mezi vektory, z nichž jeden patří do jednoho a druhý do druhého podprostoru. V opačném případě by tato definice automaticky dávala 0, což jistě nekoresponduje s našimi představami o odchylce. Modelový příklad tohoto typu představují dvě roviny jako na

obr. 12.10 — odchylka rovin je odchylkou přímek, z nichž každá je obsažena v jedné z daných rovin a obě mají tu vlastnost, že jsou **kolmé** k průniku rovin. V případě, kdy zaměření mají netriviální průnik, musíme navíc rozlišovat případ, kdy jeden podprostor je obsažen ve druhém — v tomto případě je odchylka rovna 0 (skutečně musíme deklarovat samostatně, neboť předchozí konstrukce je v této situaci jaksí degenerovaná).

**Definice.** *Odchylka* netriviálních afinních podprostorů  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  je rovna odchylce jejich zaměření  $\vec{\mathcal{B}}$  a  $\vec{\mathcal{C}}$  v  $\vec{\mathcal{E}}$ :

$$\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) := \sphericalangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}}).$$

Přitom *odchylka* netriviálních vektorových podprostorů  $\vec{\mathcal{B}}$  a  $\vec{\mathcal{C}}$  v zaměření  $\vec{\mathcal{E}}$  je definována následovně:

(a) pokud  $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{\mathbf{o}\}$ , pak

$$\sphericalangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}}) := \min\{\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \in \vec{\mathcal{B}}, \mathbf{v} \in \vec{\mathcal{C}}\},$$

(b) pokud  $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}$ , pak

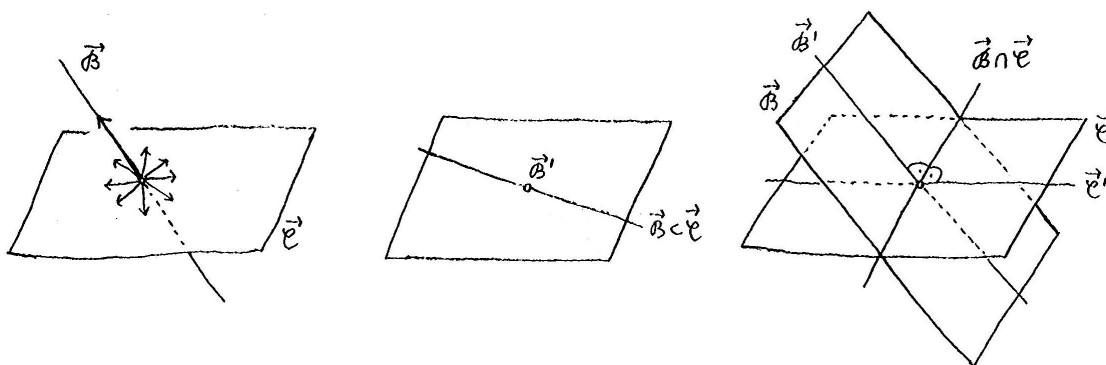
$$\sphericalangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}}) := 0,$$

(c) pokud  $\vec{\mathcal{B}} \not\subseteq \vec{\mathcal{C}}$  a  $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} \neq \{\mathbf{o}\}$ , pak

$$\sphericalangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}}) := \sphericalangle(\vec{\mathcal{B}}', \vec{\mathcal{C}}'),$$

kde  $\vec{\mathcal{B}}'$ , resp.  $\vec{\mathcal{C}}'$  jsou podprostory obsažené v  $\vec{\mathcal{B}}$ , resp.  $\vec{\mathcal{C}}$ , jež jsou **kolmé** k průniku  $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$ , tj.  $\vec{\mathcal{B}}' = \vec{\mathcal{B}} \cap (\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}})^\perp$  a  $\vec{\mathcal{C}}' = \vec{\mathcal{C}} \cap (\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}})^\perp$ .

Uvědomte si, že v případě (c) se odkazujeme na definici podle (a), tzn. podprostory  $\vec{\mathcal{B}}'$  a  $\vec{\mathcal{C}}'$  mají vždy triviální průnik (a současně jsou oba netriviální).



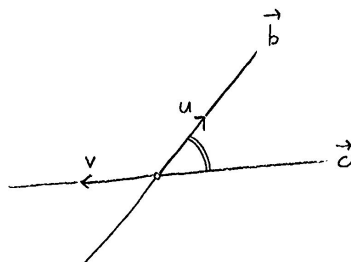
Obrázek 12.10: K definici odchylky  $\vec{\mathcal{B}}$  a  $\vec{\mathcal{C}}$ : (a) odchylka je minimem ze všech možných odchylek, (b) odchylka je 0, (c) odchylka je odchylkou menších podprostorů  $\vec{\mathcal{B}}'$  a  $\vec{\mathcal{C}}'$ , jež jsou kolmé k průniku.

### Odchylka dvou přímek

Jsou-li oba podprostory přímky se zaměřeními  $\vec{b} = \langle \mathbf{u} \rangle$  a  $\vec{c} = \langle \mathbf{v} \rangle$ , pak je podle definic jasně, že

$$\sphericalangle(b, c) = \arccos \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}.$$

Pravá strana rovnosti skutečně nezávisí na výběru směrových vektorů a absolutní hodnota v čitateli zaručuje, že ze dvou možných odchylek vybíráme právě tu menší ( $\cos \alpha \geq 0 \iff \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ).



Obrázek 12.11: Odchylka přímek.

### Odchylka přímky od podprostoru

Pokud není přímka kolmá k podprostoru, pak zdravý názor velí přímku kolmo promítnout do podprostoru a měřit odchylku těchto dvou přímek. Následující věta ukazuje, že tento nápad je platný v libovolném eukleidovském prostoru:

**Věta.** Pro libovolnou přímku  $b$  a libovolný podprostor  $\mathcal{C}$  v eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  platí:

(1) pokud  $b \perp \mathcal{C}$ , potom  $\sphericalangle(b, \mathcal{C}) = \frac{\pi}{2}$ ,

(2) pokud  $b \not\perp \mathcal{C}$ , potom  $\sphericalangle(b, \mathcal{C}) = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{\mathcal{C}})$ , kde  $\mathbf{u} \in \vec{b}$  je libovolný směr přímky a  $\mathbf{u}_{\mathcal{C}} \in \vec{\mathcal{C}}$  je jeho kolmý průmět do  $\vec{\mathcal{C}}$ .

První případ je jasný. Druhý případ zahrnuje také možnost  $b \parallel \mathcal{C}$ , tj.  $\vec{b} \subseteq \vec{\mathcal{C}}$ , kdy podle definice vychází  $\sphericalangle(b, \mathcal{C}) = 0$ : kolmý průmět je v tomto případě  $\mathbf{u}_{\mathcal{C}} = \mathbf{u}$ , tedy  $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{\mathcal{C}}) = 0$  a rovnost platí.

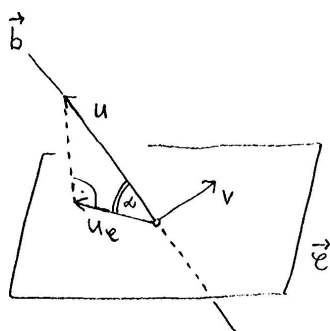
Zdůvodnění generického případu, tj.  $b \not\perp \mathcal{C}$  a  $b \not\parallel \mathcal{C}$ , je odvozeno z Cauchyovy–Schwartzovy nerovnosti (10.2): Uvažme libovolný vektor  $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{C}}$  a označme  $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{\mathcal{C}})$ ,  $\alpha' = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . Chceme dokázat, že  $\alpha \leq \alpha'$  nebo ekvivalentně  $\cos \alpha \geq \cos \alpha'$ . Nejprve si všimneme klíčového předpokladu, tj.  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{C}}) \perp \vec{\mathcal{C}}$ , což v důsledku znamená, že  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_{\mathcal{C}} \cdot \mathbf{v}$ . Celkem tedy dostáváme:

$$\cos \alpha' = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \leq \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{C}} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{u}_{\mathcal{C}}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{u}_{\mathcal{C}}\|}{\|\mathbf{u}\|} \cos \alpha. \quad \square$$

Uvědomte si, že z uvedeného také přímo vyplývá, že

$$\sphericalangle(b, \mathcal{C}) + \sphericalangle(b, \mathcal{C}^{\perp}) = \frac{\pi}{2}.$$





Obrázek 12.12: Odchylka přímky a obecného podprostoru.

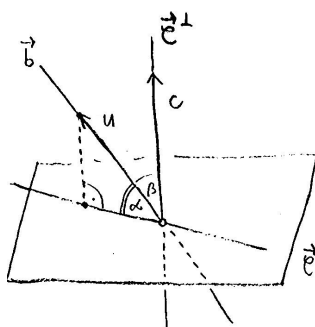
Tento postřeh lze dále zobecňovat pro obecnější situace, viz následující odstavce.

### Odchylka přímky od nadroviny

Jak už jsme zvyklí, když je  $\mathcal{C}$  nadrovinou, pozorujeme jistá zjednodušení: Z poslední poznámky a známého faktu  $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$  odvozujeme

$$\angle(b, \mathcal{C}) = \arcsin \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}|}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{c}\|}, \quad (12.15)$$

kde  $\mathbf{c} \in \vec{\mathcal{C}}^\perp$  značí normálu nadroviny (a  $\mathbf{u} \in \vec{b}$  směr přímky stejně jako výše).

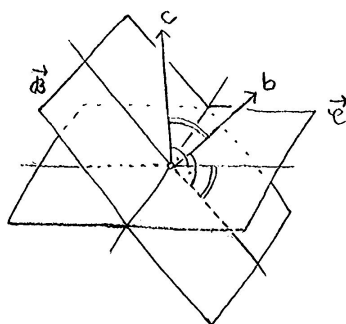
Obrázek 12.13: Odchylka přímky a nadroviny:  $\cos \beta = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$ .

### Odchylka dvou nadrovin

Jsou-li oba podprostory nadrovinami s normálovými vektory  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{c}$ , pak ve všech případech, které si umíme představit platí

$$\angle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \angle(\langle \mathbf{b} \rangle, \langle \mathbf{c} \rangle) = \arccos \frac{|\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|}{\|\mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{c}\|}.$$

Tato rovnost samozřejmě platí pro libovolné nadroviny v jakémkoli eukleidovském prostoru; obecné zdůvodnění lze najít v [HoJa, věta 16.5].



Obrázek 12.14: Odchylka nadrovin.

### Odchylky obecně

Obecně stačí diskutovat pouze takové podprostory, jejichž zaměření mají triviální průnik. Nej-jednodušší další případ, který není zahrnut mezi předchozími, může být reprezentován dvěma rovinami ve čtyřrozměrném prostoru. Geometrické řešení této (stejně jako jakékoli jiné) úlohy spočívá v nalezení takové dvojice vektorů  $\mathbf{u} \in \vec{\mathcal{B}}$  a  $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{C}}$ , že

$$\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Dosud jsme vystačili s kolmým promítáním vektoru do podprostoru, nejinak tomu bude i nyní.

Pro výše jmenované vektory totiž platí

$$\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sphericalangle(\mathbf{u}, \vec{\mathcal{C}}) = \sphericalangle(\vec{\mathcal{B}}, \mathbf{v}),$$

což podle věty na str. 64 znamená, že tato odchylka je rovna buď  $\frac{\pi}{2}$  nebo odchylce

$$\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{\mathcal{C}}) = \sphericalangle(\mathbf{v}_{\mathcal{B}}, \mathbf{v}),$$

kde  $\mathbf{u}_{\mathcal{C}}$  značí kolmý průmět vektoru  $\mathbf{u}$  do  $\vec{\mathcal{C}}$  a  $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$  značí kolmý průmět vektoru  $\mathbf{v}$  do  $\vec{\mathcal{B}}$ . Odtud zejména vyplývá, že  $\mathbf{u}_{\mathcal{C}} \in \langle \mathbf{v} \rangle$  a současně  $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} \in \langle \mathbf{u} \rangle$ . Pokud znovu kolmo promítneme  $\mathbf{u}_{\mathcal{C}}$  do  $\vec{\mathcal{B}}$ , resp.  $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$  do  $\vec{\mathcal{C}}$  dostaneme

$$\mathbf{u}_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = b\mathbf{u}, \text{ resp. } \mathbf{v}_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = c\mathbf{v}$$

pro nějaká  $b, c \in \mathbb{R}$ . Jinými slovy, vektor  $\mathbf{u} \in \vec{\mathcal{B}}$  je charakteristickým vektorem (odpovídajícím charakteristickému číslu  $b$ )<sup>3</sup> transformace  $\vec{\mathcal{B}} \rightarrow \vec{\mathcal{B}}$  složené ze dvou zmiňovaných kolmých projekcí, které označíme  $p_{\mathcal{C}} : \vec{\mathcal{B}} \rightarrow \vec{\mathcal{C}}$  a  $p_{\mathcal{B}} : \vec{\mathcal{C}} \rightarrow \vec{\mathcal{B}}$ . Podobně pro vektor  $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{C}}$ ...

Odtud by mělo být jasné, jak určit odchylku  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v případě, že nemůžeme použít žádný z předchozích speciálních postřehů:

- ☞ • popíšeme nějak kolmé projekce  $p_{\mathcal{C}} : \vec{\mathcal{B}} \rightarrow \vec{\mathcal{C}}$  a  $p_{\mathcal{B}} : \vec{\mathcal{C}} \rightarrow \vec{\mathcal{B}}$ ,
- uvažujeme složené zobrazení  $p_{\mathcal{B}} \circ p_{\mathcal{C}} : \vec{\mathcal{B}} \rightarrow \vec{\mathcal{B}}$ ,
- určíme charakteristické vektory transformace  $p_{\mathcal{B}} \circ p_{\mathcal{C}}$  (může jich být víc!),

<sup>3</sup>Připomenutí pojmů charakteristických čísel a vektorů najdete na 87

- odchylka  $\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  je pak určena takovou dvojicí vektorů  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{u}_C = p_C(\mathbf{u})$ , pro něž je  $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{u}_C)$  nejmenší,
- následující věta dodává, že takové  $\mathbf{u}$  odpovídá největšímu charakteristickému číslu  $b$ .

(Podobně můžeme uvažovat složení  $p_C \circ p_B : \vec{\mathcal{C}} \rightarrow \vec{\mathcal{C}}$ ; výsledek je samozřejmě stejný.)

Poznámka ke třetímu kroku: transformace tohoto typu jsou docela speciální a obecně pro ně platí, že z jejich charakteristických vektorů lze vždy sestavit bázi prostoru  $\vec{\mathcal{B}}$ .<sup>4</sup> Pokud má transformace aspoň dvě různá charakteristická čísla, je třeba v následujícím kroku vybírat. Pokud by náhodou byla všechna stejná, tak to znamená, že transformace je násobkem identity a je jedno, který vektor vybereme...

**Věta.** Pro libovolné podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ , jež nemají žádné společné směry, platí:

(1) pokud  $\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$ , potom  $\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{\pi}{2}$ ,

(2) pokud  $\mathcal{B} \not\perp \mathcal{C}$ , potom  $\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{u}_C) = \sphericalangle(\mathbf{v}_B, \mathbf{v})$ , kde  $\mathbf{u} \in \vec{\mathcal{B}}$ , resp.  $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{C}}$  je charakteristický vektor odpovídající největšímu charakteristickému číslu transformace  $p_B \circ p_C : \vec{\mathcal{B}} \rightarrow \vec{\mathcal{B}}$ , resp.  $p_C \circ p_B : \vec{\mathcal{C}} \rightarrow \vec{\mathcal{C}}$ .

V každém případě můžeme dodat:

(3) pokud  $b$  a  $c$  jsou největší charakteristická čísla zmiňovaných transformací, potom je  $0 \leq b = c < 1$  a  $\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \arccos \sqrt{b} = \arccos \sqrt{c}$ .

První část tvrzení je jasná a uvádíme ji hlavně pro zdůraznění podobnosti s větou na str. 64 (tuto větu nyní chápeme jako důsledek věty právě formulované). V předcházející diskuzi jsme zdůvodnili téměř všechno. Potřebujeme si uvědomit už jen následujících pár drobností:

Odchylka  $\alpha := \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{u}_C)$  je minimální právě tehdy, když  $\cos \alpha$  je maximální. Navíc pro vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{u}_C$  a  $\mathbf{u}_{CB}$  platí

$$\cos \alpha = \frac{\|\mathbf{u}_C\|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\|\mathbf{u}_{CB}\|}{\|\mathbf{u}_C\|}.$$

Přitom  $\mathbf{u}_{CB} = b\mathbf{u}$ , což po dosazení a úpravě dává

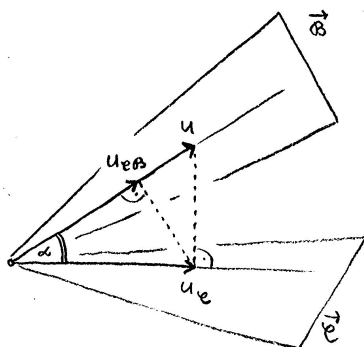
$$b = \frac{\|\mathbf{u}_C\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} = \cos^2 \alpha.$$

Přitom  $0 \leq \|\mathbf{u}_C\| < \|\mathbf{u}\|$ , tudíž  $0 \leq b < 1$  a  $\cos \alpha = \sqrt{b}$ . Podobně můžeme argumentovat s vektorem  $\mathbf{v}$ , což pochopitelně přeskakujeme. Uvědomte si, že tvrzení (3) skutečně platí i v případě, kdy  $\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$ . ◻

## Závěr

Tím diskuzi o odchylkách končíme, což však neznamená, že jsme téma zcela vyčerpali. Na závěr znovu upozorňujeme na zvláštní fenomén, který v obecných eukleidovských prostorech musíme mít na zřeteli:

<sup>4</sup>Jedná se o tzv. *symetrické* lineární transformace a zdůvodnění uvedeného faktu najdete v jakékoli učebnici lineární algebry, která se o těchto transformacích zmiňuje; viz např. [Zl, část 23.3].



Obrázek 12.15: K obecné diskuzi o odchylce. . .

- Odchylka  $\frac{\pi}{2}$  není totéž co kolmost!

Pokud mají zaměření podprostorů triviální průnik, pak tyto dva vztahy splývají; v opačném případě můžeme říct nanejvýš, že

$$B \perp C \implies \angle(B, C) = \frac{\pi}{2}.$$

Opačná implikace obecně neplatí, avšak nejmenší protipříklad lze vymyslet až v prostoru dimenze 4 (viz odst. 11.2 pro nápovědu).

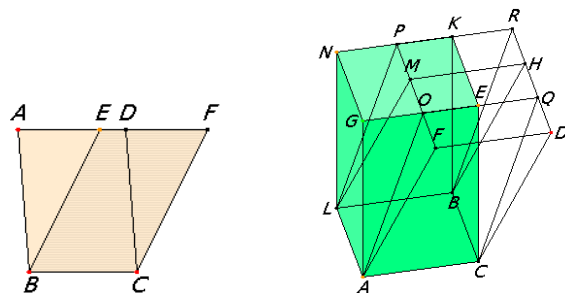
## 12.4 Cvičení

- (1) Pro všechny možné dvojice podprostorů z předchozích cvičení určete jejich vzdálenosti a odchylky.
- (2) Neopomeňte zejména podprostory ze cvičení 7.4(1) a zamyslete se znovu nad jejich vzájemnou polohou.
- (3) Pro nějaké jednoduché, ale netriviální, případy zkuste určit jejich vzdálenost a odchylku podle definice.
- (4) Ve vhodném eukleidovském prostoru udejte příklad dvou nadrovin, které mají vzdálenost 2.
- (5) Ve vhodném eukleidovském prostoru udejte příklad dvou podprostorů, které mají odchylku  $\frac{\pi}{2}$  a přitom nejsou kolmé.

## 13 Obsahy, objemy a další

### 13.1 Úvod a první definice

V [Eu] není pojem obsahu, resp. objemu nijak vymezen, avšak nakládá se s ním jako s každou jinou veličinou podle vyslovených axiomů. Série tvrzení v I., resp. XI. knize velmi názorně zdůvodňuje, že rovnoběžníky, resp. rovnoběžnostěny se stejnou základnou a výškou mají stejný obsah, viz obr. 13.16.



Obrázek 13.16: [Eu<sub>1</sub>] Rovnoběžníky, resp. rovnoběžnostěny se stejnou základnou a výškou mají stejný obsah, resp. objem.

V VI. knize se dokazuje, že poměr obsahů rovnoběžníků se stejnou výškou je stejný jako poměr jejich základen. K číselnému vyjadřování obsahů rovnoběžníků tedy stačí definovat obsah jednotkového čtverce jako 1. Pomocí infinitezimálního počtu je pak možné určovat obsahy obecnějších rovinných oblastí. Analogická diskuze platí pro objemy v prostoru.

V celé této části bereme předchozí poznatky jako výchozí a soustředíme se hlavně na algebraické možnosti určování objemů obecných rovnoběžnostěnů. Objem rovnoběžnostěny určeného vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$  v obecném eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  budeme značit  $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$ .<sup>5</sup> Objem  $k$ -rozměrného rovnoběžnostěny chápeme jako zobrazení  $V$ , které přiřazuje  $k$ -tici vektorů nezáporné reálné číslo. Definice kopírující předchozí pozorování vypadají následovně:

- jsou-li určující vektory ortonormální, pak  $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = 1$ ,
- jsou-li tyto vektory ortogonální, pak  $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \dots$ ,

obecná induktivní definice je tato:

**Definice.** *Objem*  $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$  rovnoběžnostěny určeného vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$  je nezáporné reálné číslo takové, že

- $V(\mathbf{v}_1) := \|\mathbf{v}_1\|$ ,
- $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\|$ , kde  $\mathbf{w}_2$  kolmý průmět vektoru  $\mathbf{v}_2$  do  $\mathbf{v}_1^\perp$ ,
- $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) := V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \cdot \|\mathbf{w}_3\|$ , kde  $\mathbf{w}_3$  je kolmý průmět vektoru  $\mathbf{v}_3$  do  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$ ,
- atd. . .

Vektor  $\mathbf{w}_2$ , resp.  $\mathbf{w}_3$  představuje výšku rovnoběžníku, resp. rovnoběžnostěny; číslo  $\|\mathbf{w}_2\|$ , resp.  $\|\mathbf{w}_3\|$  je velikost této výšky.

Přímo z definice vidíme, že

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3, \dots) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\| \cdot \|\mathbf{w}_3\| \cdot \dots,$$

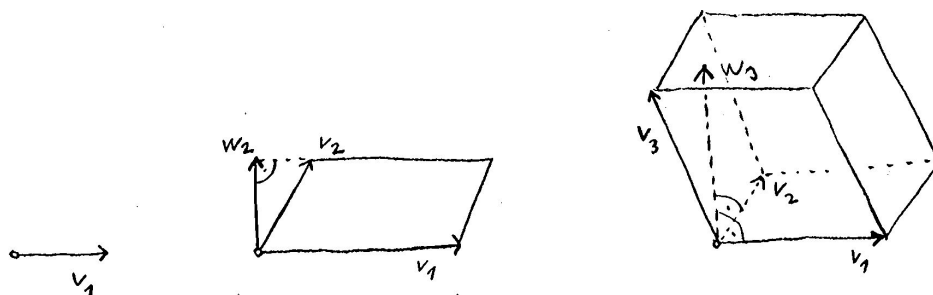
<sup>5</sup>Pro jednoduchost mluvíme v obecných formulacích pouze o rovnoběžnostěnech, přičemž máme na mysli, že rovnoběžnostěn určený dvěma vektory je rovnoběžník a rovnoběžnostěn určený jedním vektorem je úsečka.

kde vektory  $\mathbf{w}_i$  jsou navzájem kolmé vektory postupně sestrojené podle návodu výše. Tento nakolmovací algoritmus jste v algebře jmenovali jako tzv. Gramův–Schmidtův proces. Odtud také vyvozujeme, že objem  $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$  může vyjít 0, což se stane právě tehdy, když vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$  jsou lineárně závislé.

⇒ Vyjádřit obsah rovnoběžníku podle definice je snadné:

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin \alpha, \quad (13.16)$$

kde  $\alpha = \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ . Počítání vícerozměrného objemu podle definice však může být docela otravné, proto se poohlédneme po nějakých zjednodušeních.



Obrázek 13.17: K objemu rovnoběžnostěny...

## 13.2 Gramův determinant

Začneme s malým experimentem: vybereme náhodně vektory v nějakém eukleidovském vektorovém prostoru a zjišťujeme, že platí:

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{vmatrix}}.$$

Na první pohled je jasné, že rovnost platí pro libovolné kolmé vektory  $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$ . Pokud vyjádříte obecně  $\mathbf{w}_2$  (viz (11.10)) a dosadíte přímo do definující rovnosti  $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2)$ , uvidíte, že tato rovnost je skutečně obecně platná.

⇒

Matice pod odmocninou se jmenuje *Gramova matice*. Determinant z Gramovy matice je *Gramův determinant*; značíme  $G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ . Definice pro libovolnou  $k$ -tici vektorů je analogická. Právě diskutovaná rovnost má následující přirozené zobecnění:

**Věta.** Pro libovolnou  $k$ -tici vektorů v eukleidovském prostoru platí

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = \sqrt{G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)}.$$

Sledovat předchozí zdůvodnění pro více než dva vektory může být trochu problém, proto nabízíme alternativní zdůvodnění, které je odvozeno ze základních vlastností každého determinantu. Pro

přehlednost formulujeme pouze pro trojici vektorů, následné zobecnění by mělo být zřejmé:

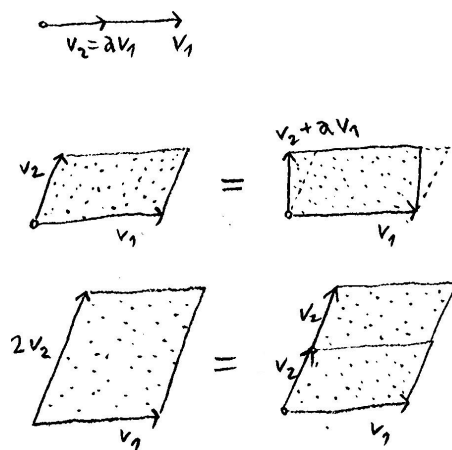
$$\begin{aligned} G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) &= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} = \|\mathbf{v}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_2\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_3\|^2. \end{aligned}$$

Na vysvětlenou dodáváme, že determinant se nezmění, když k libovolnému řádku/sloupci přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních. To je přesně úprava, kterou jsme postupně dělali nejdřív s řádky, poté se sloupci:  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - a\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - b\mathbf{v}_1 - c\mathbf{v}_2$ , ...

Poslední rovnost plyne z toho, že vektory  $\mathbf{w}_i$  nejsou jen tak nějaké vektory uvedeného tvaru, ale právě kolmé průměty  $\mathbf{v}_i$  do  $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle^\perp$ . Všechny skalární součiny v Gramově matici mimo hlavní úhlopříčku jsou tedy nutně nulové.  $\square$

### 13.3 Vnější součin a orientovaný objem

To, že při určování objemu dříve nebo později narazíme na determinant by nemělo být žádným překvapením. Objem totiž můžeme chápat jako zobrazení  $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \times \dots \rightarrow \mathbb{R}$ , které má velice stejné vlastnosti jako právě determinant — je **multilineární** a pro lineárně závislé vektory dává nulu, viz obr. 13.18. (Nejužitečnější důsledek těchto dvou vlastností jsme použili v důkazu předchozí věty.) Jediný rozdíl je ten, že hodnota objemu je nezáporná, kdežto hodnota determinantu může být jakákoli (determinant je antisymetrický).



Obrázek 13.18: Vlastnosti obsahu/objemu jakožto multilineárního zobrazení se nápadně podobají vlastnostem determinantu:  $V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) = 0$ ,  $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ,  $V(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2) = b \cdot V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ .

Abychom však mohli mluvit o determinantu, potřebujeme čtvercovou matici — uvažme tedy právě  $n$  vektorů v prostoru dimenze  $n$ :

**Definice.** *Vnější součin*  $n$ -tice vektorů  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  v eukleidovském prostoru dimenze  $n$  je determinant matice tvořené po sloupcích souřadnicemi těchto vektorů (v tomto pořadí) vzhledem k nějaké **ortonormální** bázi; značíme

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] := \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

☞ Uvědomte si, že definice nezávisí na volbě ortonormální báze! Vnějšímu součinu se též přezdívá *orientovaný objem*, což je víc než pochopitelné:

**Věta.** *Pro  $n$ -tici vektorů v  $n$ -rozměrném eukleidovském prostoru platí*

$$G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]^2,$$

tudíž

$$V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = |[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]|.$$

Zdůvodnění plyne z Cauchyovy věty o součinu determinantů:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]^2 &= \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)^2 = \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)^T \cdot \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \\ &= \det((\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)^T \cdot (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_n \end{vmatrix} = G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n). \end{aligned}$$

Zbytek plyne z věty 13.2. □

### 13.4 Vektorový součin

Pojem vektorového součinu bezpečně známe pro dva vektory v trojrozměrném eukleidovském prostoru. Ze souřadnicového vyjádření  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  a  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vzhledem k nějaké ortonormální bázi jsou odvozeny souřadnice vektorového součinu takto:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left( \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Při počítání jsme zvyklí si pomáhat následovně:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} x_3, \quad (13.17)$$

načež koeficienty u  $x_i$  bereme jako souřadnice vektorového součinu  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ .<sup>6</sup> Konceptní interpretace tohoto postupu je taková, že vektorový součin  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  je jednoznačně určený vektor splňující

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}$$

pro libovolný vektor  $\mathbf{x}$ . Tento postřeh zobecňujeme pro libovolnou  $(n - 1)$ -tici vektorů v  $n$ -rozměrném prostoru:

<sup>6</sup>Přitom je celkem jedno, zda jsou souřadnice vektorů v matici na levé straně psány po sloupcích nebo po řádcích.



**Definice.** Vektorový součin  $(n-1)$ -tice vektorů  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$  v eukleidovském prostoru dimenze  $n$  je jednoznačně určený vektor  $\mathbf{w}$  splňující

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x}] = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$$

pro všechna  $\mathbf{x} \in \vec{\mathcal{E}}$ ; značíme  $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$ .

Souřadnicové vyjádření vektorového součinu se obecně dá dělat úplně stejně jako v úvodním příkladu; rovnost (13.17) totiž není nic jiného než Laplaceův rozvoj determinantu podle posledního sloupce...

Vektorový součin má spoustu užitečných vlastností:

**Věta.** Pro  $(n-1)$ -tici vektorů v  $n$ -rozměrném eukleidovském prostoru platí:

- (1) přiřazení  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \mapsto \mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$  definuje antisymetrické multilineární zobrazení  $\vec{\mathcal{E}} \times \dots \times \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$ ,
- (2)  $\mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{0} \iff$  vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$  jsou lineárně závislé,
- (3)  $\mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$  je kolmý ke všem vektorům  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ ,
- (4) pokud jsou vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$  lineárně nezávislé, pak posloupnost  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w})$  tvoří kladnou bázi prostoru  $V$ ,
- (5)  $\|\mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}\| = V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ .

Tvrzení (1)–(3) plynou přímo z definující rovnosti a vlastností vnějšího součinu, tzn. determinantu. Tvrzení (4) v podstatě také:

$$\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}) = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}] = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} > 0.$$

Tvrzení (5) zdůvodníme tak, že ještě trochu rozepíšeme předchozí vztah:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}) = V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}) = V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \cdot \|\mathbf{w}\|,$$

kde odkazujeme postupně na větu 13.3, předchozí nerovnost (všechno je kladné, takže nepíšeme absolutní hodnoty) a před chvílí zdůvodněné tvrzení (3). Po dělení  $\|\mathbf{w}\|$  máme hledanou rovnost.  $\square$

Ve speciálním případě, kdy  $\dim \mathcal{E} = 3$ , je podle tvrzení (1) vektorový součin bilineární antisymetrické zobrazení  $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$ . Jakožto binární operace na množině  $\vec{\mathcal{E}}$  však vektorový součin **není** asociativní. Neasociativita plyne z následující rovnosti (kterou lze dokázat velice přímo v souřadnicích):

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}. \quad (13.18)$$

Odtud také vyplývá platnost tzv. Jacobiho identity:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (13.19)$$

Trojrozměrný eukleidovský prostor s operací vektorového součinu je tedy příkladem velice užitečné struktury, které se říká Lieova algebra. . .

Ve tomto speciálním případě ( $\dim \mathcal{E} = 3$ ) je podle tvrzení (5) velikost vektorového součinu  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$  rovna obsahu rovnoběžníku určeného vektory  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$ . V tomto případě však navíc umíme obsah vyjádřit podle (13.16). Celkem tedy platí

$$\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin \alpha, \quad (13.20)$$

kde  $\alpha$  je odchylka vektorů  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$ .

## 13.5 Shrnutí a užitek

### Stručné shrnutí

Z předchozích odstavců vidíme několik způsobů, jak určovat objem obecného rovnoběžnostěnu, které jsou zpravidla mnohem efektivnější než počítání podle definice 13.1:

- Věta 13.2 je univerzální a pracuje s Gramovým determinantem, jež má právě takový řád, jaký je počet vektorů ve hře (tedy naprosto nezávisle na dimenzi okolního prostoru).
- Objem  $n$ -rozměrného rovnoběžnostěnu v  $n$ -rozměrném prostoru můžeme určit pomocí vnějšího součinu vektorů podle věty 13.3.
- Objem  $(n - 1)$ -rozměrného rovnoběžnostěnu v  $n$ -rozměrném prostoru můžeme vyjádřit pomocí vektorového součinu vektorů podle věty 13.4(5).

### Objem simplexu a mnohostěnu

Obecné (myšleno i šikmé) hranoly, příp. libovolné mnohostěny lze vždy rozložit na jednodušší objekty, u nichž umíme objemy vyjádřit. Tady zpravidla narážíme na jehlany, resp. simplexu, o kterých jsme se zatím nezmiňovali, proto přikládáme několik poznámek.

$k$ -rozměrným *simplexem* se myslí konvexní obal  $k + 1$  bodů v obecné poloze. Dvourozměrným simplexem je samozřejmě trojúhelník, trojrozměrný simplex je trojboký jehlan neboli čtyřstěn. Obsah trojúhelníku je roven polovině obsahu opsaného rovnoběžníku; objem čtyřstěnu je roven třetině objemu opsaného hranolu, tzn. šestině objemu opsaného rovnoběžnostěnu. Zobecnění těchto faktů je následující:

**Věta.** *Objem  $k$ -rozměrného simplexu je roven  $\frac{1}{k!}$  objemu opsaného rovnoběžnostěnu.*


Zdůvodnění tohoto tvrzení pro obecné  $k$  je úplně analogické těm, které známe pro  $k = 2$  a  $3$ , zejména pokud bereme jako fakt, že dva simplexu se stejnou základnou a stejnou výškou mají také stejný objem. To je sice v duchu našich úvodních pozorování v odst. 13.1, avšak elementární zdůvodnění tohoto faktu kupodivu neexistuje už pro  $k = 3$ . Pro podrobnosti odkazujeme na Dodatek 26, kde jsou připomenuta také některá relevantní tvrzení z [Eu].

### Vzdálenosti podprostorů

V odst. 12.2 poblíž obr. 12.9 jsme formulovali nápad, jak interpretovat vzdálenost podprostorů jakožto výšku vhodného rovnoběžnostěnu. Zobecnění uvedeného nápadu vypadá následovně:

**Věta.** Pro afinní podprostory  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  v eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$  uvažme libovolné body  $X \in \mathcal{B}$  a  $Y \in \mathcal{C}$  a nějakou bázi  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$  součtu zaměření  $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ . Potom vzdálenost podprostorů je rovna velikosti výšky rovnoběžnostěnu určeného vektory  $\vec{XY}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$  na stěnu určenou vektory  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ . Krátce:

$$v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{V(\vec{XY}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots)}{V(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots)}.$$

Všimněte si, že nestačí tupě dosazovat vektory z parametrického vyjádření podprostorů — v takovém případě by se mohlo stát, že měříte nulovou vzdálenost, přestože je ve skutečnosti nenulová! Umíte si představit nějaký takový příklad? 

### Normála nadroviny

Z věty 13.4(3) víme, jak je možné najít vektor, který je kolmý k  $n - 1$  vektorům v  $n$ -rozměrném prostoru, aniž bychom řešili soustavu rovnic! Tato dovednost se dá použít např. při určování rovnicového vyjádření libovolné nadroviny v libovolném eukleidovském prostoru.

### 13.6 Cvičení

(1) Ve standardní eukleidovské rovině jsou dány body

$$K = [1, 3], \quad L = [0, 5], \quad M = [1, 4].$$

Alespoň čtyřmi různými způsoby určete obsah trojúhelníku  $KLM$ .

(2) Řešte tutéž úlohu v prostoru  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ :

$$K = [1, 3, -5], \quad L = [0, 5, -3], \quad M = [1, 4, -3].$$

(3) Pro pěti bodů  $A, B, C, D, E$  ze cvičení 8.4(1) určete:

- obsah trojúhelníku  $ABD$ , objem čtyřstěnu  $ABDE$ , objem mnohostěnu  $ABCDE$ ,
- vzdálenost bodu  $E$  od roviny  $ABD$ , vzdálenost přímk  $AD$  a  $BE$ ,
- rovnicové vyjádření roviny  $ABC$ .

(4) V eukleidovském prostoru  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$  jsou dány vektory:

$$\mathbf{v}_1 = (3, 2, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 2, 0).$$

Určete vektorový součin  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$  a objem rovnoběžnostěnu určeného vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ .

(5) Pro vektorový součin v prostoru dimenze 3 dokažte (13.18), příp. (13.19).

(6) Uvědomte si, že vektorový součin je formálně definován také pro jeden vektor v eukleidovském prostoru dimenze 2. Určete výsledek např. pro  $\mathbf{v}_1 = (-1, 2)$ .



---

## Geometrická zobrazení

---

O různých geometrických zobrazeních jsme se poměrně zevrubně bavili již v kurzu konstrukční geometrie, viz [Žá, zejména kap. III]. V tomto kurzu odkazujeme právě na tyto znalosti, pročez jsme si mohli dovolit začít rovnou s obecnými pojmy. Zatím jsme si postupně připomněli definice afinních (podkap. 5), projektivních (odst. 9.4), shodných a podobných zobrazení (odst. 10.4) a současně jsme zformulovali jejich ekvivalentní (algebraické) definice.

V této kapitole doplníme analytická vyjádření všech zmiňovaných typů zobrazení a naučíme se je podle toho rozeznávat. Zejména se budeme soustředit na transformace, tj. zobrazení nějakého prostoru do sebe, a jejich charakterizace pomocí samodružných prvků. Zvláštní pozornost věnujeme tzv. základním transformacím a jejich skládání. Na závěr uvádíme jemnější klasifikace shodností v rovině a v prostoru a několik dalších poznámek.

## 14 Opakování

Přehled dosavadních poznatků včetně typických příkladů z každé skupiny shrnujeme v tabulce tab. 14.1. Jediný sloupec, který v této tabulce zatím nemusí být srozumitelný, se týká právě analytického vyjádření. Jako příklad u každého typu zobrazení je v tabulce uvedena tzv. základní transformace v rovině. K tomuto pojmu se budeme vracet a zobecníme pro libovolnou dimenzi. Ještě připomínáme, že projektivní, afinní, podobné, resp. shodné zobrazení, které je bijektivní, nazýváme *kolineace* (nebo *projektivita*), *afinita*, *podobnost*, resp. *shodnost*.

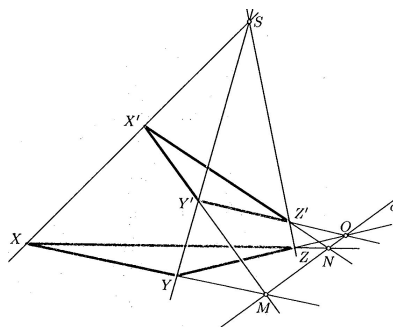
Všechny diskutované typy zobrazení spadají do třídy **projektivních** zobrazení a takto je také budeme od začátku interpretovat.

### 14.1 Projektivní

Projektivní zobrazení je zobrazení mezi projektivními prostory, které zobrazuje přímky na přímky nebo body. Základní věta projektivní geometrie nám říká, že každé projektivní zobrazení  $f : \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W')$  je určeno nějakým **lineárním** zobrazením

$$F : W \rightarrow W'$$

mezi zastupujícími vektorovými prostory, a to tak, že obraz  $X' = f(X)$  je reprezentován vektorem  $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$ , kde  $\mathbf{x} \in W$  je libovolný vektor reprezentující bod  $X \in \mathcal{P}(W)$  (viz definice 9.4). Dva různé vektory  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  reprezentují jeden a ten samý bod  $X$  právě tehdy, když se liší o nějaký nenulový násobek. Proto dvě různá lineární zobrazení  $F_1, F_2$  zadávají jedno a to samé projektivní zobrazení  $f$  právě tehdy, když  $F_1 = k \cdot F_2$  pro nějaké  $k \neq 0$ . Z uvedeného mimo jiné vyplývá, že projektivní zobrazení je jednoznačně určeno obrazem  $n + 2$  bodů v dostatečně obecné poloze, přičemž  $n = \dim \mathcal{P}(W) = \dim W - 1$  (viz důsledek 9.4).



Obrázek 14.1: [Ku] Základní kolineace v rovině je osová kolineace.

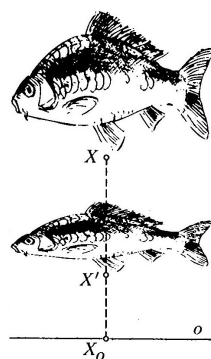
V tomto kurzu nepracujeme s obecnými projektivními prostory, ale výhradně s projektivními rozšířeními afinních prostorů,  $\mathcal{P}(W) = \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cap \infty_{\mathcal{A}}$ . Báze ve  $W$  proto vždycky volíme stejně jako v odst. 9.3, tzn. tak, abychom snadno rozpoznali body vlastní od nevlastních. Naše konvence je taková, že tyto rozlišujeme podle první (lépe řečeno nulté) souřadnice. To znamená, že afinní prostor  $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$  si představujeme jakožto nadrovinu ve  $W$  určenou rovnicí  $x_0 = 1$ .

## 14.2 Afinní

Afinní zobrazení je zobrazení mezi afinními prostory, které zobrazuje přímky na přímky nebo body a zachovává rovnoběžnost přímek (ekvivalentně, zachovává dělicí poměry trojic kolineárních bodů). Základní věta afinní geometrie nás dovedla k charakterizaci afinních zobrazení  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  v rámci všech projektivních zobrazení mezi projektivními rozšířeními  $\tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}'}$  jako takových zobrazení, která zobrazují **vlastní body na vlastní**, což je totéž jako nevlastní na nevlastní (viz odst. 9.6). To je ekvivalentní požadavku, aby zastupující lineární zobrazení  $F : W \rightarrow W'$  zobrazovalo podprostor  $\tilde{\mathcal{A}} \subset W$  do podprostoru  $\tilde{\mathcal{A}'} \subset W'$ . Zúžení  $F|_{\tilde{\mathcal{A}}} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}'}$  je potom právě indukované lineární zobrazení  $\vec{f}$  k afinnímu zobrazení  $f$ , o kterém se mluví v definici 5.2. Z této definice také plyne, že obraz libovolného bodu  $X \in \mathcal{A}$  lze vyjádřit ve tvaru

$$f(X) = \vec{f}(\vec{OX}) + f(O), \quad (14.1)$$

kde  $O \in \mathcal{A}$  je jeden vybraný referenční bod (obvykle počátek souřadné soustavy). Tzn., že obecné afinní zobrazení  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  je jednoznačně určeno lineárním zobrazením  $\vec{f}$  mezi zaměřenými a obrazem jednoho vybraného bodu. To v důsledku znamená, že afinní zobrazení je jednoznačně určeno obrazem  $n + 1$  bodů v obecné poloze, kde  $n = \dim \mathcal{A}$ .



Obrázek 14.2: [Ku] Základní afinita v rovině je osová afinita.

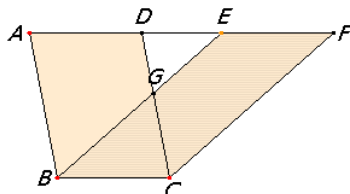
Pokud jsou afinní prostory, mezi kterými zobrazujeme, navíc eukleidovské, rozlišujeme další typy zobrazení:

### 14.3 Ekviafinní

Ekviafinní zobrazení jsou taková afinní zobrazení, která zachovávají obsahy, resp. objemy. Objemová forma v eukleidovském prostoru je určena vnějším součinem vektorů (viz odst. 13.3). Vnější součinem vektorů může být libovolné číslo, objem je vždy nezáporný, proto

- zobrazení  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  je ekviafinní právě tehdy, když indukované lineární zobrazení  $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}'}$  zachovává **vnější součin** až na znaménko.

Protože vnější součin je multilineární operace, je tato podmínka ekvivalentní s požadavkem, aby se některý (následně potom každý) rovnoběžnostěn s jednotkovým objemem zobrazil na rovnoběžnostěn s jednotkovým objemem.

Obrázek 14.3: [Eu<sub>1</sub>] Typická ekviafinita je elace.

### 14.4 Shodná

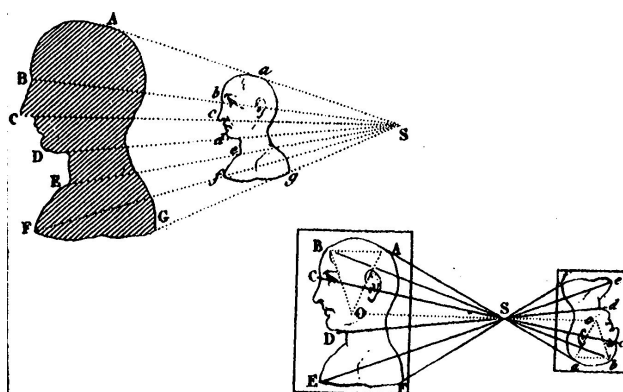
Význačnou podmnožinou ekviafinních zobrazení jsou samozřejmě zobrazení shodná. Shodná zobrazení jsou zobrazení, která zachovávají eukleidovskou metriku. Algebraická charakterizace v odst. 10.4 nám říká, že shodná zobrazení jsou právě taková afinní zobrazení, že indukované lineární zobrazení zachovává **skalární součin** vektorů. Protože skalární součin je bilineární operace, je tato podmínka ekvivalentní s požadavkem, aby se nějaká (následně potom každá) ortonormální báze zaměření  $\vec{\mathcal{E}}$  zobrazovala na ortonormální bázi  $\vec{\mathcal{E}'}$ .



Obrázek 14.4: [Se] Základní shodnost je souměrnost podle nadroviny.

### 14.5 Podobná

Podobná zobrazení jsou zobrazení, která zachovávají eukleidovskou metriku až na konstantní nenulový násobek (tzv. koeficient podobného zobrazení). Ta lze algebraicky charakterizovat jako afinní zobrazení, jejichž indukované lineární zobrazení zachovává skalární součin **až na nenulový násobek**. To je ekvivalentní podmínce, aby se nějaká (následně potom každá) ortonormální báze zaměření  $\vec{\mathcal{E}}$  zobrazovala na bázi  $\vec{\mathcal{E}'}$ , která je ortogonální a jejíž vektory jsou stejně dlouhé.



Obrázek 14.5: [Be] Základní podobnost je stejnoolehlost.

### 14.6 Poznámky

Shodná zobrazení jsou právě podobná zobrazení s koeficientem 1. Shodná zobrazení lze taky charakterizovat jako podobná zobrazení, která jsou současně ekviafinní. Kromě toho, tři posledně jmenované typy zobrazení mají něco společného:



- Každé ekviafinní, podobné, resp. shodné zobrazení je nutně **prosté**.

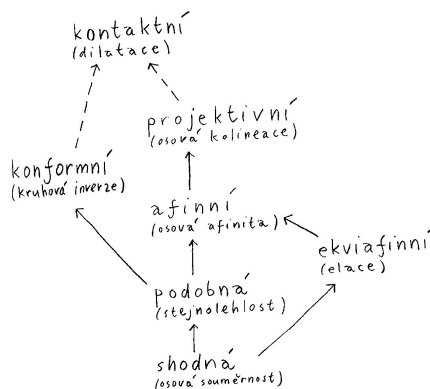
To v důsledku znamená, že každé ekviafinní, podobné, resp. shodné zobrazení mezi prostory stejné dimenze je nutně bijektivní.



jméno	definice	další vlastnosti	algebraická charakterizace	analytické vyjádření	příklady
projektivní $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$	zobrazuje přímky na přímky nebo body	zachovává dvojpo-měry čtveřic bodů	určeno lineárním zobrazením $F : W \rightarrow W'$	$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & \mathbf{b} \\ c & \mathbf{D} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}$	osová kolineace, středové promítání
afinní $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$	projektivní, které zachovává rovnoběžnost přímek	zachovává dělicí poměry trojic bodů	$F$ zobrazuje $\vec{\mathcal{A}} \subset W$ na $\vec{\mathcal{A}}' \subset W'$	$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ c & \mathbf{D} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}$	osová afinita, rovnob. promítání
ekviafinní $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$	afinní, které zachovává obsahy, resp. objemy		$\vec{f}$ zachovává vnější součin až na znaménko	$\det \mathbf{D} = \pm 1$	šikmá souměrnost, elace
podobné $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$	afinní, které zachovává vzdálenosti bodů až na konstantní násobek: $ X'Y'  = k \cdot  XY $	zachovává odchylky	$\vec{f}$ zachovává skalární součin až na násobek	$\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} = k^2 \cdot \mathbf{E}$	stejnolehlost
shodné $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$	podobné s koeficientem $k = 1$	zachovává vzdálenosti, odchylky, obsahy, ...	$\vec{f}$ zachovává skalární součin	$\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} = \mathbf{E}$	osová souměrnost

Tabulka 14.1: Přehled geometrických zobrazení. ( $\mathcal{E}$  značí obecný eukleidovský prostor,  $\mathcal{A}$  afinní prostor,  $\vec{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}$  projektivní rozšíření  $\mathcal{A}$ ,  $W$  je zastupující vektorový prostor pro  $\vec{\mathcal{A}}$ , tzn.  $\vec{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(W)$ . Pokud je  $f$  afinní, potom  $F|_{\vec{\mathcal{A}}} = \vec{f}$ .)

Složení dvou zobrazení stejného typu je opět zobrazení téhož typu. Proto množina všech ekviafinních, podobných, resp. shodných transformací eukleidovského prostoru (s operací skládání zobrazení) tvoří grupu. Ta je podgrupou grupy všech afinít, jež je podgrupou v grupě všech kolineací rozšířeného projektivního prostoru. Struktura uvedených vložení je znázorněna na obr. 14.6; pro připomenutí jsou na schématu další dva typy zobrazení, které dobře známe, avšak na tomto místě nediskutujeme.



Obrázek 14.6: Hierarchie geometrických zobrazení (v závorce uveden typický představitel z každé třídy).

## 15 Analytické vyjádření

### 15.1 Značení a jiné konvence

Analytické vyjádření jakéhokoli zobrazení závisí na volbě souřadných soustav. V afinním prostoru  $\mathcal{A}$  uvažujeme afinní souřadnice vzhledem k afinnímu repéru  $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$ . Pokud je navíc afinní prostor eukleidovský, pak zpravidla předpokládáme, že vektory  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$  jsou ortonormální; odpovídající souřadná soustava se pak jmenuje *kartézská*.

Homogenní souřadnice v projektivním rozšíření  $\vec{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \infty_{\mathcal{A}}$  budeme vždy uvažovat stejně jako v odst. 9.3, tzn. vzhledem k takové rozšířené bázi  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$  zastupujícího vektorového prostoru  $W$ , že vektory  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \in \vec{\mathcal{A}}$  jsou jako výše a vektor  $\mathbf{e}_0 \notin \vec{\mathcal{A}}$  reprezentuje právě bod  $O$ .

Homogenní souřadnice bodu  $X \in \vec{\mathcal{A}}$  píšeme

$$X = (x_0 : x_1 : x_2 : \dots),$$

což znamená, že tento bod je reprezentován vektorem  $\mathbf{x} \in W$ :

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Bod  $X$  je vlastní právě tehdy, když  $x_0 \neq 0$ , tj.  $\mathbf{x} \notin \vec{\mathcal{A}}$ . V takovém případě jsou jeho afinní souřadnice

$$\mathbf{X} = \left[ \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots \right].$$

Bod  $X$  je nevlastní právě tehdy, když  $x_0 = 0$ , tj.  $\mathbf{x} \in \vec{\mathcal{A}}$ . V takovém případě jsou afinní souřadnice odpovídajícího směru

$$\mathbf{X}_{\infty} = (x_1, x_2, \dots).$$

Uvažujme projektivní zobrazení  $f : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}'$  mezi projektivními rozšířeními afinních prostorů. Odpovídající lineární zobrazení mezi zastupujícími vektorovými prostory značíme  $F : W \rightarrow W'$ . Každé lineární zobrazení  $F$  je vzhledem k vybraným bázím určeno maticí  $\mathbf{F}$  tak, že

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$$

pro libovolný vektor  $\mathbf{x} \in W$ , resp. jeho souřadnice psány do sloupce. Pokud je  $\dim \tilde{\mathcal{A}} = m$  a  $\dim \tilde{\mathcal{A}}' = n$ , pak matice  $\mathbf{F}$  má  $m + 1$  sloupců a  $n + 1$  řádků. Obraz libovolného bodu  $X \in \tilde{\mathcal{A}}$  značíme  $X' \in \tilde{\mathcal{A}}'$  a vzhledem k předchozím konvencím jej budeme vyjadřovat jako

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}, \quad (15.2)$$

kde  $a$  je reálné číslo,  $\mathbf{b}$  je  $m$ -tice čísel v řádku,  $\mathbf{c}$  je  $n$ -tice čísel ve sloupci a  $\mathbf{D}$  je matice o rozměrech  $n \times m$ . Důvod, proč dělíme matici  $\mathbf{F}$  právě na takovéto bloky, bude zřejmý za chvíli.

## 15.2 Poznámky

Je-li  $\mathbf{F}$  matice zastupujícího lineárního zobrazení  $F$  vzhledem k vybraným bázím, pak v této matici po sloupcích postupně čteme souřadnice obrazů bázových vektorů  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots$ . Vzhledem k předchozím konvencím jsou tedy v prvním sloupci homogenní souřadnice obrazu počátku afinní souřadné soustavy prostoru  $\mathcal{A}$ , ve druhém sloupci jsou homogenní souřadnice obrazu nevlastního bodu první souřadné osy atd. Tento jednoduchý postřeh má velice užitečné důsledky jak při interpretaci zobrazení  $f$  daného maticí  $\mathbf{F}$ , tak při určování této matice v případě, že  $f$  je zadáno např. obrazy několika bodů; viz cvičení 15.5 a další.

Analytické vyjádření (15.2) bývá často vyjádřeno přímo v homogenních souřadnicích. Jedná se jen o jinou formu zápisu, takže tady není třeba hledat žádný problém — z maticového vyjádření lze vždy snadno určit souřadnicové a naopak. Pro představu, např. obecná projektivní transformace přímky

$$f(x_0 : x_1) = (kx_0 + lx_1 : mx_0 + nx_1)$$

ze cvičení 9.7(4) je reprezentována maticí

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}.$$

Jsou-li  $f, g$  projektivní zobrazení,  $F, G$  zastupující lineární zobrazení a  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  jejich matice, potom složené zobrazení  $g \circ f$  je reprezentováno lineárním zobrazením  $G \circ F$ , které má matici  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{F}$ . Při skládání zobrazení je proto obvykle výhodnější pracovat s odpovídajícími maticemi než se souřadnicovým vyjádřením.

Zobrazení  $f$  je injektivní, surjektivní, resp. bijektivní právě tehdy, když zastupující lineární zobrazení  $F$  má tutéž vlastnost. Na základě jednoduchých poznatků z lineární algebry můžeme směle tvrdit, že projektivní zobrazení  $f$  reprezentované maticí  $\mathbf{F}$  je

- injektivní, právě když  $\mathbf{F}$  má triviální jádro,
- surjektivní, právě když hodnota  $\mathbf{F}$  je rovna počtu jejich řádků,
- bijektivní, právě když matice  $\mathbf{F}$  je čtvercová a  $\det \mathbf{F} \neq 0$ .

Zobrazení s netriviálním jádrem se nazývají *singulární*; typickými příklady jsou různá promítání. Matice  $\mathbf{F}$  je čtvercová, právě když  $f$  zobrazuje mezi prostory stejné dimenze. V případě obecných projektivních zobrazení, nemá hodnota  $\det \mathbf{F}$  žádný geometrický význam (rozlišujeme pouze, zda je determinant nulový či nenulový).

### 15.3 Charakterizace

Nyní konečně umíme nabídnout charakterizaci jednotlivých typů zobrazení podle jejich analytického vyjádření.

**Věta.** Předpokládejme, že projektivní zobrazení  $f$  mezi projektivními rozšířeními afinních prostorů je v homogenních souřadnicích vyjádřeno jako v (15.2). Potom platí, že

- $f$  je afinní právě tehdy, když  $a \neq 0$  a  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

Zobrazení  $f$  je afinní, právě když zobrazuje všechny nevlastní body na nevlastní a všechny vlastní body na vlastní. Z první podmínky vzhledem k předchozím volbám plyne, že  $\mathbf{b}$  musí sestávat ze samých nul. Ze druhé podmínky plyne, že  $a \neq 0$  (jinak by se úplně všechny body zobrazovali na nevlastní body).  $\square$

Pokud tedy je zobrazení  $f$  afinní, můžeme je reprezentovat jednoznačně určenou maticí  $\mathbf{F}$ , ve které platí  $a = 1$ :


$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{c} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}. \quad (15.3)$$

Pro vzory tvaru  $\mathbf{x} = (1, x_1, x_2, \dots)$  jsou také obrazy tvaru  $\mathbf{x}' = (1, x'_1, x'_2, \dots)$ , takže celá první (nultá) složka v předchozím vyjádření je vlastně zbytečná. (15.3) je proto ekvivalentní následujícímu vyjádření v afinních souřadnicích:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{D} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{c}. \quad (15.4)$$

Afinní zobrazení mezi prostory stejné dimenze dále rozlišujeme takto:<sup>1</sup>

- pokud  $\det \mathbf{D} > 0$ , pak  $f$  je *přímá* afinita,
- pokud  $\det \mathbf{D} < 0$ , pak  $f$  je *nepřímá* afinita.

 Determinant  $\det \mathbf{D}$  se nazývá *modul* afinního zobrazení  $f$ . Uvědomte si, že pro transformace, tj. zobrazení  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , modul nezávisí na volbě souřadné soustavy! Absolutní hodnota modulu odpovídá tomu, jak se mění obsahy, resp. objemy. Znaménko modulu je kladné/záporné, právě když afinita zachovává/mění orientaci prostoru.

**Věta.** Předpokládejme, že afinní zobrazení  $f$  mezi eukleidovskými prostory je v kartézských souřadnicích vyjádřeno jako v (15.4), resp. v homogenních souřadnicích jako v (15.3). Potom platí, že

- $f$  je ekviafinní právě tehdy, když  $\det \mathbf{D} = \pm 1$ ,
- $f$  je podobné s koeficientem  $k$  právě tehdy, když  $\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} = k^2 \cdot \mathbf{E}$ ,
- $f$  je shodné právě tehdy, když  $\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} = \mathbf{E}$ ,

<sup>1</sup>Vzhledem k vyjádření (15.3) je  $\det \mathbf{F} = \det \mathbf{D}$ .

Aby první část tvrzení měla vůbec nějaký význam, pak  $f$  musí být buď zobrazením mezi prostory stejné dimenze, nebo se uvažuje jeho restrikce na obraz. Pro zbylé dvě části žádný takový předpoklad nepotřebujeme. Jako obvykle,  $\mathbf{E}$  značí jednotkovou matici (jejíž rozměry odpovídají dimenzi cílového prostoru).

Všechny tři části plynou přímo z algebraických charakterizací, jež jsme připomněli v úvodním opakování v podkap. 14, a ze znalosti pojmu matice lineárního zobrazení: v matici  $\mathbf{D}$  jsou po sloupcích shromážděny souřadnice obrazů báзовých vektorů  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ .  $\square$

## 15.4 Obzvlášť jednoduché případy

Tady jmenujeme zobrazení s nejjednoduššími analytickými vyjádřeními. Ve všech případech se jedná o afinní transformace, jejichž indukované lineární zobrazení je násobkem identity. V dalších odstavcích jsou tyto transformace zmiňovány jako takové základní transformace, které mají samodružné všechny směry. Jinými slovy můžeme tyto transformace charakterizovat jako takové afinní transformace, které zobrazují libovolnou přímku na přímku s ní rovnoběžnou (nebo bod). Jsou to:

(1) identita:

$$X' = X,$$

(2) posunutí o vektor  $\mathbf{v}$ :

$$X' = X + \mathbf{v},$$

(3) stejnoolehlost se středem  $S$  a koeficientem  $k$ :

$$X' = kX + (1 - k)S, \tag{15.5}$$

(4) středová souměrnost:

$$X' = -X + 2S,$$

(5) promítání do bodu  $S$ :

$$X' = S.$$

Jediný případ, který bychom měli aspoň stručně komentovat je (3):

**Definice.** *Stejnolehlost* je afinní transformace určená středem  $S$  a koeficientem  $k \in \mathbb{R}$ , a to tak, že

$$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}, \text{ neboli } X' = S + k \cdot \overrightarrow{SX}.$$

Tyto vztahy jsou zřejmě ekvivalentní s (15.5).

Speciální, resp. degenerované případy — které zpravidla za stejnoolehlost neprohlašujeme — odpovídají hodnotám  $k = 1, -1$ , resp.  $0$  a jsou to výše zmiňovaná identita, středová souměrnost, resp. promítání do bodu.

Identita, posunutí a stejnoolehlost s koeficientem  $k > 0$  jsou přímé afinity. Stejnolehlost s koeficientem  $k < 0$  je přímá právě tehdy, když dimenze afinního prostoru je sudá. Promítání do jediného bodu je maximálně degenerované (singulární) zobrazení, často přezdívané nulové zobrazení.

K výše uvedeným transformačním rovnicím ještě pro pořádek přidáváme matice zastupujících lineárních zobrazení:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & \mathbf{E} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ (1-k)\mathbf{S} & k\mathbf{E} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 2\mathbf{S} & -\mathbf{E} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_5 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Ve všech těchto případech jsme schopni během několika sekund rozhodnout o druhu zobrazení, známe-li jeho analytické vyjádření. V ostatních případech se tomu budeme učit, a to zejména analyzováním tzv. samodružných prvků.



## 15.5 Cvičení

(1) Projektivní transformace v rovině jsou dány maticemi zastupujících lineárních zobrazení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

V každém z těchto čtyř případů:

- začnete s obrázkem a pokuste se odhadnout typ transformace,
- určete typ transformace a rozhodněte, zda je transformace regulární/singulární,
- v případě afinít určete modul a rozhodněte, zda je transformace přímá/nepřímá/upřímná,
- určete obraz několika dalších bodů, např. bodu  $E = [1, 1]$  či nevlastních bodů odpovídajících souřadným osám.

(2) Další čtyři projektivní transformace jsou dány obrazy bodů

$$A = [0, 0], B = [2, 0], C = [0, 2], D = [2, 2],$$

a to následujícími způsoby:

- $A' = [6, 2], B' = [9, 2], C' = [7, 4], D' = [9, 3],$
- $A' = [6, 2], B' = [9, 2], C' = [7, 4], D' = [10, 4],$
- $A' = [9, 4], B' = [9, 1], C' = [6, 4], D' = [6, 1],$
- $A' = [9, 4], B' = [9, 2], C' = [7, 4], D' = [7, 2].$

Určete analytická vyjádření těchto transformací a řešte předchozí sérii úloh.

(3) Pokud toho ještě nemáte dost, slozte některé z výše uvedených transformací a řešte znovu některé z předchozích úloh.

## 16 Samodružné prvky

Ve zbytku této kapitoly diskutujeme téměř výhradně **transformace**  $f : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  projektivního rozšíření nějakého afinního prostoru  $\mathcal{A}$ . Velmi užitečnou informaci o druhu dané transformace poskytují samodružné, neboli invariantní prvky. Několik příkladů klasifikací podle samodružných prvků uvádíme v podkap. 18.

*Samodružná* podmnožina  $M \subset \tilde{\mathcal{A}}$  transformace  $f$  je taková podmnožina, která se zobrazuje sama do sebe, tj.

$$f(M) \subseteq M.$$

Speciálně, samodružné body jsou právě pevné body transformace. Samodružné body mohou být jak vlastní, tak nevlastní. Nevlastním samodružným bodům se říká samodružné směry.

Nezapomeňte, že je nutné rozlišovat mezi samodružnými podmnožinami a podmnožinami samodružných bodů!

## 16.1 Samodružné body

Bod  $X \in \tilde{\mathcal{A}}$  je samodružným bodem transformace  $f$ , pokud

$$f(X) = X,$$

což je ekvivalentní podmínce

$$F(\mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{x}, \quad (16.6)$$

kde  $\mathbf{x} \in W$  je vektor reprezentující bod  $X \in \tilde{\mathcal{A}}$ ,  $F : W \rightarrow W$  je lineární transformace odpovídající projektivní transformaci  $f : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  a  $\lambda$  je nějaké reálné číslo. To znamená, že samodružné body projektivní transformace  $f$  odpovídají právě (nenulovým) **charakteristickým vektorům** zastupující lineární transformace  $F$ .

### Algebraická odbočka

Určit charakteristické vektory lineární transformace  $F$  bychom měli umět z lineární algebry: Podmínka (16.6) je v souřadnicích ekvivalentní soustavě lineárních rovnic

$$(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (16.7)$$

kde  $\mathbf{F}$  je matice zobrazení  $F$  a  $\mathbf{E}$  je jako obvykle jednotková matice. Tato soustava má netriviální řešení právě tehdy, když

$$\det(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}) = 0. \quad (16.8)$$

Determinant na levé straně je polynom v proměnné  $\lambda$ , jehož kořeny jsou tzv. charakteristická čísla transformace  $F$ .<sup>2</sup>

Charakteristické vektory odpovídající příslušným charakteristickým číslům získáme řešením soustavy (16.7), kam postupně tato čísla dosazujeme za  $\lambda$ . Zejména, charakteristické vektory odpovídající témuž charakteristickému číslu tvoří vektorový podprostor ve  $W$ . Naopak, nenulové charakteristické vektory odpovídající různým charakteristickým číslům jsou nutně lineárně nezávislé.

### Afinní případ

Pokud je transformace  $f$  afinní, pak vzhledem k charakterizacím z odst. 15.3 můžeme soustavu (16.7) psát jako

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{c} & \mathbf{D} - \lambda \mathbf{E} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (16.9)$$

<sup>2</sup>Místo přívlastku *charakteristický/-á/-é* se v algebře zpravidla stručněji říká *vlastní*. Z pochopitelných důvodů se raději držíme prvního pojmenování.

Odtud vidíme, že vlastní samodružné body ( $x_0 \neq 0$ ) afinní transformace  $f$  nutně odpovídají charakteristickému číslu  $\lambda = 1$  a jsou řešením soustavy

$$(\mathbf{D} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = -\mathbf{c}, \quad (16.10)$$

zatímco samodružné směry, tj. nevlastní samodružné body ( $x_0 = 0$ ) mohou odpovídat jakýmkoli charakteristickým číslům  $\lambda$  a jsou řešením soustavy

$$(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X}_\infty = \mathbf{0}. \quad (16.11)$$

## 16.2 Jednoduchá pozorování

Z předchozího výkladu bezprostředně vyplývá několik geometricky zajímavých výsledků s velmi jednoduchým algebraickým zdůvodněním. Samodružný bod bez dalšího přívlastku může být jak vlastní, tak nevlastní; tyto případy rozlišujeme pouze tam, kde to je nutné.

### Projektivní a afinní

**Věta.** Každá projektivní transformace projektivního prostoru sudé dimenze má aspoň jeden samodružný bod.

Matice zastupujícího lineárního zobrazení má rozměry o 1 větší než je dimenze prostoru. To znamená, že charakteristický polynom (16.8) je lichého stupně. Protože je to polynom s reálnými koeficienty, má nutně aspoň jeden reálný kořen. Pro každý takový kořen máme garantováno netriviální řešení soustavy (16.7), jež určuje samodružné body transformace.  $\square$

**Věta.** (1) Každá afinní transformace (afinního prostoru libovolné dimenze) má aspoň jeden samodružný bod.

(2) Pokud má afinní transformace nějaké vlastní samodružné body, pak všechny tyto body tvoří afinní podprostor.

Matice zastupujícího lineárního zobrazení je tvaru (15.3). Odtud plyne, že  $\lambda = 1$  je vždy kořenem charakteristického polynomu (16.8).

Vlastní samodružné body jsou (v afinních souřadnicích) určeny jakožto řešení soustavy lineárních rovnic (16.10). Množina všech vlastních samodružných bodů je proto buď prázdná, nebo tvoří afinní podprostor v  $\mathcal{A}$ .  $\square$

$\Rightarrow$  Povšimněte si, že žádné tvrzení analogické (2) neuvádíme v předchozí větě o projektivních transformacích. Jediné, co můžeme v této souvislosti říct, je, že všechny samodružné body, které při řešení (16.7) odpovídají témuž charakteristickému číslu, tvoří projektivní podprostor. Úplně klidně se tak může stát, že projektivní transformace v rovině má právě tři různé samodružné body, což je v afinním případě nemožné!

### Podobné a shodné

Nyní zúžíme naši pozornost na podobnosti a shodnosti. V následující větě jsou shodnosti zahrnuty jakožto podobnosti s koeficientem  $k = 1$ :



**Věta.** Pro každou podobnost  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  s koeficientem  $k$  platí:

- (1) Modul transformace  $f$  je roven  $\pm k^n$ , kde  $n = \dim \mathcal{E}$ .
- (2) Je-li  $\lambda$  reálné charakteristické číslo transformace  $\vec{f}$ , pak  $\lambda = \pm k$ .
- (3) Samodružné směry odpovídající různým charakteristickým číslům jsou navzájem kolmé.
- (4) Je-li  $U \subseteq \vec{\mathcal{E}}$  samodružný podprostor transformace  $\vec{f}$ , pak také kolmý doplněk  $U^\perp$  je samodružným podprostorem.

Všechna tvrzení plynou přímo z definicí:

(1) Modul  $f$  je podle definice právě determinant  $\det \mathbf{D}$ , přičemž matice  $\mathbf{D}$  je tvořena obrazy vektorů ortonormální báze. Modul  $f$  je tedy (orientovaný) objem obrazu jednotkové krychle. Pokud je  $f$  podobnost, může to být jedině  $\pm k^n$ .


(2) Indukované zobrazení  $\vec{f}$  zachovává velikosti vektorů až na konstantní násobek  $k$ .

(3) Charakteristické vektory odpovídající různým charakteristickým číslům jsou lineárně nezávislé; vybrané vektory označíme  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ . Přitom charakteristická čísla jsou v našem případě pouze  $k$  a  $-k$ , tudíž jeden z vektorů se zobrazuje na svůj  $k$ -násobek a druhý na  $-k$ -násobek; řekněme  $\mathbf{u}' = k\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}' = -k\mathbf{v}$ . Odchylka vektorů se zachovává  $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sphericalangle(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$  a současně

$$\sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \sphericalangle(\mathbf{u}', \mathbf{v}') = \sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}') = \sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \pi.$$

Odtud plyne, že  $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sphericalangle(\mathbf{u}', \mathbf{v}') = \frac{\pi}{2}$ .


(4) Uvažme libovolný vektor  $\mathbf{w} \in U^\perp$ , tzn.  $\mathbf{w} \perp U$ . Podle předpokladu je také  $\mathbf{w}' \perp U'$ , kde  $U' \subseteq U$  značí obraz podprostoru  $U$ . Zúžení podobnosti na jakýkoli invariantní podprostor je zase podobnost (tedy bijekce), proto je obrazem  $U$  tentýž podprostor (tedy nikoli nějaký menší podprostor). Proto je  $\mathbf{w}' \perp U$ , neboli  $\mathbf{w}' \in U^\perp$ .  $\square$

Díky druhému tvrzení nemusíme při určování samodružných směrů podobných (tedy i shodných) transformací pracně hledat kořeny charakteristického polynomu! Stačí jenom ověřit jediné dva možné kandidáty  $\lambda = k$  a  $\lambda = -k$ . 


**Věta.** Každá podobná transformace, která není shodností, má právě jeden vlastní samodružný bod.

Vlastní samodružné body jsou řešením soustavy rovnic (16.10). Tato soustava má jednoznačné řešení právě tehdy, když determinant matice  $\mathbf{D} - \mathbf{E}$  je nenulový.

Kdyby byl tento determinant nulový, znamenalo by to, že indukovaná lineární transformace by měla charakteristické číslo 1. To by však bylo v rozporu s tvrzením (2) v předchozí větě, proto je  $\det(\mathbf{D} - \mathbf{E}) \neq 0$ .  $\square$

Uvedené analytické zdůvodnění je sice působivě jednoduché, ale poněkud nenázorné. Návod ke konstrukčnímu určení pevného bodu podobnosti v rovině (zadané obrazem trojúhelníku) lze najít v [Sek, str. 80 ve II. díle]. 

### 16.3 Cvičení

- (1) Pro každou transformaci ze cvičení 15.5 určete všechny její samodružné body. 

- (2) Zapřemýšlejte, zda některý z předchozích výsledků neumíte vymežit konstrukčně.
- (3) Udejte příklad projektivní transformace v rovině (včetně analytického vyjádření), která má vlastní samodružný bod  $B = [1, 0]$  a bod  $C = [0, -1]$  zobrazuje na  $C' = [3, 2]$ .

## 17 Základní transformace

### 17.1 Základní transformace v rovině

Z dřívějšíka známe několik příkladů základních transformací, a to zejména v rovině. Základní bijektivní (regulární) transformace v rovině jsou:

- osová kolineace (základní kolineace),
- osová afinita (základní afinita),
- stejnolehlost (základní podobnost),
- osová souměrnost (základní shodnost).

Základní singulární transformace v rovině jsou:

- středové promítání do přímky (základní projektivní),
- rovnoběžné promítání do přímky (základní afinní).

Význam slova základní taky známe:

- skládáním základních transformací je možné vyjádřit jakoukoli transformaci určitého typu.

V této části tento přehled okomentujeme, doplníme a jako obvykle zobecníme. V prvé řadě si všímáme, že všechny transformace ve výše uvedeném výčtu mají něco společného — všechny základní transformace mají:

- *osu* = přímku samodružných bod,
- *střed* = samodružný bod takový, že každá přímka jdoucí tímto bodem je samodružná.

Osa a střed mohou být jak vlastní, tak nevlastní a podle toho taky můžeme jednotlivé typy základních transformací rozlišovat. Před tím, než tak učiníme, připomeneme si několik základních informací o úplně nejzákladnější transformaci v rovině, tj. o **osové kolineaci**. Všechny ostatní základní transformace chápeme jako speciální, resp. limitní případy osové kolineace. . .

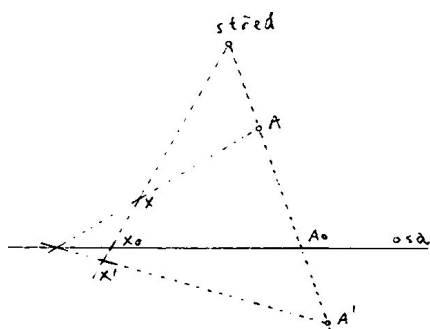
#### Osová kolineace

Konstrukci obrazu bodu  $X$  v osové kolineaci určené osou  $o$ , středem  $S$  a obrazem jednoho dalšího bodu  $A$  připomínáme na obr. 17.7. Konstrukce je odvozena z následující definice (a Pappovy věty).

**Definice.** *Osová kolineace* je transformace projektivní roviny určená osou  $o$ , středem  $S$  a obrazem  $A'$  bodu  $A$  ( $A \notin o$ ,  $A \neq S$ ), a to tak, že pro obraz  $X'$  libovolného bodu  $X$  platí

$$XX' \cap AA' = S \quad \text{a} \quad (X'X X_0S) = (A'A A_0S) = \text{konst.}, \quad (17.12)$$

kde  $X_0$ , resp  $A_0$ , značí průsečík přímky  $XX'$ , resp.  $AA'$ , s osou  $o$ .



Obrázek 17.7: Konstrukce obrazu bodu  $X$  v osové kolineaci určené osou, středem a obrazem bodu  $A$ .

Konstantě  $(A'A A_0 S)$  se říká *charakteristika* nebo *modul* osové kolineace.<sup>3</sup> V projektivní rovině umíme rozlišovat pouze následující tři případy:

- (1)  $A' \in o$ , tzn.  $A' = A_0$  a  $(A'A A_0 S) = 0$ : v tomto případě je taky obraz libovolného bodu  $X$  na ose  $o$  a transformace je promítání ze středu  $S$  do přímky  $o$ .
- (2)  $S \in o$ , tzn.  $S = A_0$  a  $(A'A A_0 S) = 1$ : v tomto případě se jedná o regulární zobrazení, kterému budeme říkat *projektivní elace*.
- (3)  $A' \notin o$  a  $S \notin o$ : obecná osová kolineace.

V projektivním rozšíření afinní roviny můžeme rozlišovat další případy podle toho, zda určující prvky osové kolineace jsou vlastní/nevlastní:

- (a)  $S$  nevlastní,  $o$  vlastní: osová afinita s modulem  $(A'A A_0 S_\infty) = (A'A A_0)$ .
- (b)  $S$  vlastní,  $o$  nevlastní: stejnoolehlost se středem  $S$  a koeficientem  $(A'A A_0 S) = (A'A S)$ .
- (c)  $S$  nevlastní,  $o$  nevlastní: posunutí.

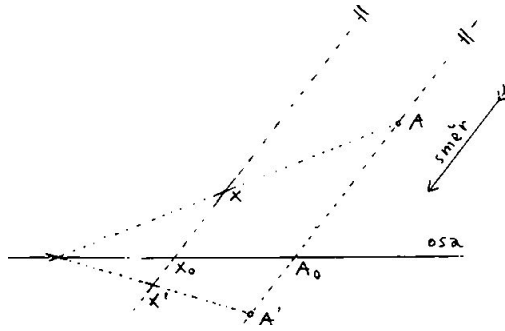
## Přehled

Přehled všech základních transformací v rovině podle typu a vzájemné polohy určujících prvků je v tab. 17.2. V tomto přehledu navíc rozlišujeme podle specifických hodnot modulu. Všimněte si, že v případě, že základní transformace je afinní, je tento modul totéž co modul afinní transformace ve smyslu definice na str. 84. ⊞

Případ identické transformace, resp. promítání do bodu uvádíme v závorkách, protože se jedná o triviální, resp. degenerovaný případ, který do tohoto přehledu sice patří, ale není základní transformací ve výše vymezeném smyslu. Termín „*harmonická souměrnost*“ není úplně obvyklý, pročez je raději v uvozovkách; v tomto případě je modul roven  $-1$ , což znamená, že každá čtveřice  $(X', X, X_0, S)$  je v harmonickém poměru. Šikmá souměrnost je harmonická souměrnost s nevlastním středem a osová souměrnost je navíc charakterizována tím, že směr souměrnosti je kolmý k ose.

Uvědomte si, že podmínky v jednotlivých sloupcích nejsou úplně nezávislé! Z předchozího ⊞

<sup>3</sup>Definici dvojpoměru čtveřice bodů najdete v odst. 9.5. Pojmenování modul se může zdát vzhledem k předchozímu užití pro afinní transformace nevhodné — níže vysvětlujeme, že tomu tak není.



Obrázek 17.8: Konstrukce obrazu bodu  $X$  v osové afinitě určené osou, směrem a obrazem bodu  $A$ .

např. víme, že pokud  $S \in o$ , potom je modul nutně roven 1. Taky se jistě nemůže stát, aby  $S$  i  $o$  byly nevlastní a současně  $S \notin o$ ...

střed $S$	osa $o$	$S \in o$	modul	druh
vlastní	vlastní	ne	0	středové promítání do přímky
		ano	1	projektivní elace
		ne	-1	„harmonická souměrnost“
		ne	jinak	osová kolineace
nevlastní	vlastní	ne	0	rovnoběžné promítání do přímky
		ano	1	elace
		ne	-1	šikmá, resp. osová souměrnost
		ne	jinak	osová afinita
vlastní	nevlastní	ne	0	(promítání do bodu)
		ne	1	(identita)
		ne	-1	středová souměrnost
		ne	jinak	stejnolehlost
nevlastní	nevlastní	ano	1	posunutí

Tabulka 17.2: Klasifikace základních transformací v rovině

## 17.2 Základní transformace obecně

V předchozím přehledu základních transformací v rovině jsme začali postřehem, že každá taková transformace má osu a střed. V tomto odstavci ukážeme, že existence těchto prvků spolu velmi úzce souvisí. Úvodní definice vypadají takto:

**Definice.** *Střed* projektivní transformace je samodružný bod takový, že každá přímka procházející tímto bodem je samodružná.

*Nadosa* projektivní transformace je nadrovina samodružných bodů.

Projektivní transformace, která má nadosu, se nazývá *základní transformace*.

Jinak můžeme říct, že základní transformace jsou neidentické transformace s maximálním možným podprostorem samodružných bodů. Nejzákladnější transformací v obecném projektivním prostoru tedy je **nadosová kolineace** a podobně modifikujeme ostatní pojmenování z předchozího odstavce. Klasifikace základních transformací je až na tyto změny v názvosloví úplně stejná jako v tab. 17.2, proto se jí dále nezabývat nebudeme.

Místo toho dokážeme několik obecných tvrzení, jež jsme zatím přehlíželi:

**Věta.** *Předpokládejme, že  $f$  je neidentická projektivní transformace. Potom platí:*


(1)  *$f$  má nadosu právě tehdy, když  $f$  má střed.*

(2)  *$f$  má buď právě jednu nadosu (a právě jeden střed), nebo žádnou nadosu (a žádný střed).*

Nejdřív trochu značení: dimenze projektivního prostoru je  $n$ , tzn. dimenze zastupujícího vektorového prostoru je  $n + 1$  (což je také stupeň charakteristického polynomu (16.8)).

(1) Nadosa  $\mathcal{O}$  je nadrovina samodružných bodů, jež odpovídá všem řešením soustavy (16.7). Odpovídající charakteristické číslo  $\lambda$  proto musí být kořenem charakteristického polynomu s násobností alespoň  $n$ . Protože má tento polynom reálné koeficienty a známe  $n$  jeho reálných kořenů, musí mít ještě jeden reálný kořen, který si označíme třeba  $\mu$ .

- (a) Pokud je  $\mu \neq \lambda$ , pak charakteristický vektor odpovídající  $\mu$  je lineárně nezávislý vzhledem ke všem vektorům odpovídajícím číslu  $\lambda$ . To znamená, že tento vektor reprezentuje samodružný bod  $S$ , který neleží v nadosě  $\mathcal{O}$ . Libovolná přímka jdoucí bodem  $S$  protíná nadrovinu  $\mathcal{O}$  v bodě, který je samodružný. Proto je libovolná přímka jdoucí bodem  $S$  samodružná, tudíž  $S$  je střed.
- (b) Pokud je  $\mu = \lambda$ , pak střed musíme hledat v nadosě  $\mathcal{O}$ . Uvažme libovolný bod  $A \notin \mathcal{O}$  a jeho obraz  $A'$ . Protože transformace není identita, platí  $A' \neq A$  a tyto dva body určují přímku, kterou označíme  $a$ . Přímka  $a$  protíná nadosu  $\mathcal{O}$  v samodružném bodě  $S_a$ , a proto je  $a$  samodružná. Podobně pro libovolný jiný bod  $B \notin \mathcal{O}$  platí, že  $b = BB'$  je samodružná přímka; průsečík  $b$  s nadosou  $\mathcal{O}$  označíme  $S_b$ . Protože  $a$  i  $b$  jsou samodružné přímky, je jejich průsečík samodružným bodem, a proto musí ležet v nadosě  $\mathcal{O}$ . Odtud plyne, že  $S_a = S_b$  je hledaný střed.

Naopak, předpokládejme, že  $S$  je středem transformace  $f$ . Uvažme  $n + 1$  libovolných bodů  $A_1, A_2, \dots$  takových, že spolu s bodem  $S$  jsou v nejobecnější možné poloze (tzn. žádná  $(n + 1)$ -tice neleží v jedné nadrovině). Podle předpokladu se aspoň jeden z těchto bodů musí zobrazit někam jinam než sám na sebe; řekněme, že  $A'_1 \neq A_1$ . Nyní postupně uvažujeme dvojice přímek  $a_i = A_1A_i$  a  $a'_i = A'_1A'_i$ , kde  $i = 2, 3, \dots$ . Protože každý bod  $A'_i$  leží na přímce  $SA_i$ , patří každá dvojice přímek  $a_i, a'_i$  do nějaké roviny. Proto se  $a_i$  a  $a'_i$  protínají, a to v samodružném bodě, který označíme  $C_i$ . Z úvodních předpokladů lze vydedukovat, že body  $C_2, C_3, \dots$  tvoří nadrovinu  $\mathcal{O}$ , jejíž každý bod je samodružný. Proto je  $\mathcal{O}$  nadosou. 

(2) Přemýšlejme, co by se stalo, kdyby transformace  $f$  měla dvě různé nadosy: Uvažme dvě libovolné přímky  $a$  a  $b$  jdoucí libovolným bodem  $C$ , který neleží ani v jedné nadosě. Jak  $a$ , tak  $b$  by protínala každou z nados v samodružných bodech, proto by jak  $a$ , tak  $b$  byla samodružnou přímkou. Odtud by plynulo, že  $C$  by byl samodružný bod, což by v důsledku znamenalo, že transformace by byla identická.



Podobně, se by se dalo zdůvodnit, že kdyby transformace měla dva různé středy, pak by to nutně byla identita, což by opět bylo ve sporu s předpokladem věty.  $\square$

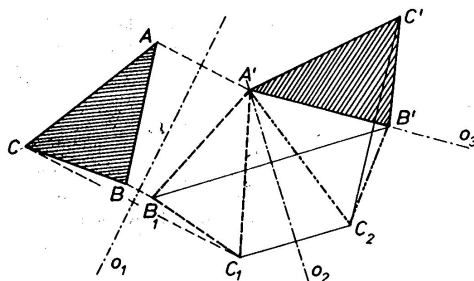
### 17.3 Skládání základních transformací

Na úvod začneme s tvrzením, které zobecňuje sérii pozorování v rovině, jimiž jsme se bavili v konstrukční geometrii.

**Věta.** Každá projektivní transformace v prostoru dimenze  $n$  lze vyjádřit jako složení nejvýše  $n + 2$  základních transformací.

Pokud je transformace regulární, musí být všechny základní transformace taky regulární. Maximální počet základních transformací ve zmiňovaném rozkladu souvisí s určeností projektivní transformace, viz důsledek 9.4. Pokud je transformace afinní, stačí nejvýše  $n + 1$  základních transformací, sr. s důsledkem 5.2.

Idea důkazu této věty je poměrně prostá — v podstatě zobecňuje celkem jasnou konstrukci v případě shodných transformací, kterou připomínáme na obr. 17.9. Zdůvodnění pro afinní transformace lze najít např. v [Sek, str. 38–39 ve II. díle]. Uvědomte si, že čím obecnější je typ transformace, tím více máme volnosti v možných rozkladech.



Obrázek 17.9: [Sek] Každá shodnost v rovině je složením nejvýše tří osových souměrností.

Vzhledem k předchozí jemnější klasifikaci základních transformací se můžeme ptát, co lze získat skládáním základních transformací jistého druhu. Úvahy tohoto typu doporučujeme jako užitečné cvičení. Jistou náповědou může být, že v afinním případě je modul složené transformace roven součinu modulů transformací, z nichž je tato složena. Na ukázkou uvádíme jeden z možných výsledků:



- Každá ekviafinita v prostoru dimenze  $n$  lze vyjádřit jako složení nejvýše  $n + 1$  šikmých souměrností.

(Šikmá souměrnost je tedy o něco základnější ekviafinita než oblíbená elace.)

Skládáním základních transformací, které mají stejnou nadosu, musí být zase základní transformace s toutéž nadosou. Speciálně, složením transformací s nevlastní nadosou (posunutí, stejnolehlost) dostáváme transformaci se stejnou vlastností. Jinými slovy, posunutí a stejnolehlost (a její speciální, příp. degenerované podoby) jsou jediné transformace, které mají všechny směry samodružné, a jejich skládáním nemůžeme dostat nic typově jiného. Triviálním poznatkem je, že

- složením posunutí o vektor  $\mathbf{u}$  a posunutí o vektor  $\mathbf{v}$  je posunutí o vektor  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ,

sr. s definicí 4.2. Méně triviální poznatek je zformulován v následující větě:

**Věta.** V libovolném eukleidovském prostoru uvažujme stejnolehlosti  $h_i$  se středy  $S_i$  a koeficienty  $k_i$  ( $i = 1, 2$ ); složené zobrazení  $h_2 \circ h_1$  označíme  $h$ .

(1) Pokud  $k_1 k_2 = 1$  a  $S_1 = S_2$ , potom je  $h$  identita.

(2) Pokud  $k_1 k_2 = 1$  a  $S_1 \neq S_2$ , potom je  $h$  posunutí o vektor  $\mathbf{v} = (1 - k_2) \overrightarrow{S_1 S_2}$ .

(3) V ostatních případech je  $h$  stejnolehlost s koeficientem  $k = k_1 k_2$  a středem

$$S = S_1 + \frac{1 - k_2}{1 - k_1 k_2} \overrightarrow{S_1 S_2}.$$

Konstrukční zdůvodnění téměř celé věty<sup>4</sup> v eukleidovské rovině známe z loňska. Všechno najednou a úplně obecně dokážeme z explicitního vyjádření složeného zobrazení pomocí (15.5).

Stejnolehlost  $h_1$ , resp.  $h_2$  je určena předpisem  $h_1(X) = k_1 X + (1 - k_1) S_1$ , resp.  $h_2(X) = k_2 X + (1 - k_2) S_2$ . Složené zobrazení  $h = h_2 \circ h_1$  je tedy určeno předpisem

$$h(X) = h_2(k_1 X + (1 - k_1) S_1) = \dots = k_2 k_1 X + k_2(1 - k_1) S_1 + (1 - k_2) S_2.$$

Odtud postupně vyvozujeme:

(1) Pokud je  $k_1 k_2 = 1$  a  $S_1 = S_2$ , potom po dosazení dostáváme

$$h(X) = X + 0,$$

což jsou transformační rovnice identického zobrazení.

(2) Pokud je  $k_1 k_2 = 1$  a  $S_1 \neq S_2$ , potom po dosazení a úpravě dostáváme

$$h(X) = X + (1 - k_2)(S_2 - S_1),$$

což jsou transformační rovnice posunutí o vektor  $\mathbf{v} = (1 - k_2) \overrightarrow{S_1 S_2}$ .

(3) V ostatních případech je  $h$  obecná stejnolehlost s koeficientem  $k = k_1 k_2$ . Pokud  $S$  značí střed stejnolehlosti  $h$ , pak její transformační rovnice jsou  $h(X) = kX + (1 - k)S$ . Porovnáním s předchozím vyjádřením  $h$  dostáváme

$$S = \frac{k_2(1 - k_1)}{1 - k} S_1 + \frac{1 - k_2}{1 - k} S_2,$$

což je ekvivalentní s vyjádřením ve větě. □

<sup>4</sup>Podstatná část tvrzení (3) tkví v tom, že střed  $S$  leží na přímce  $S_1 S_2$ .

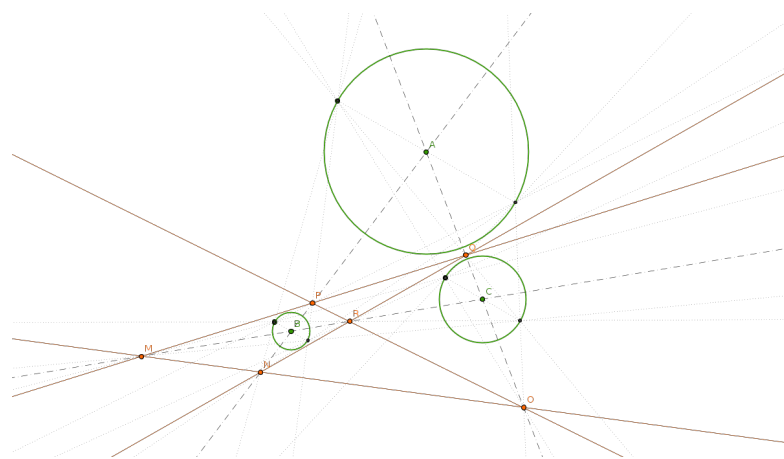
### Poznámky

Všechny stejnolehlosti, posunutí a identické zobrazení tvoří grupu, které se říká *Mongeova grupa*.

Jako bezprostřední důsledek předchozí věty zmiňujeme ještě klasickou větu Mongeovu. Jedná se o planimetrické tvrzení o kružnicích, odkazující na následující poznatky:

- Stejnolehlým obrazem kružnice je kružnice.
- Každé dvě kružnice jsou stejnolehlé, přičemž koeficient stejnolehlosti je roven poměru poloměru a možné středy stejnolehlosti jsou nejvýše dva.

**Věta (Mongeova).** *Pro tři kružnice v rovině platí, že jejich šest středů stejnolehlosti tvoří vrcholy tzv. úplného čtyřstranu, viz obr. 17.10.*



Obrázek 17.10: Vnější středy stejnolehlosti tří kružnic leží na přímce a stejně tak každé dva vnitřní a jeden vnější střed leží na přímce.



### 17.4 Cvičení

- Pro každou transformaci ze cvičení 15.5 rozhodněte, zda je nebo není základní; pokud je, tak ji pojmenujte.
- Udejte příklad transformace v rovině (včetně analytického vyjádření), která má vlastní osu, nevlastní střed a modul = 1.
- Transformace eukleidovské roviny je dána analytickým vyjádřením:

$$f(x_1, x_2) = (x_2 + 4, -x_1).$$

Dokažte, že  $f$  je shodnost a vyjádřete  $f$  jako složení osových souměrností.

- Jsou dány dvě transformace v rovině:



$f_1$  = stejnolehlost se středem  $S_1 = [2, 1]$  a koeficientem  $k_1 = 2$ ,

$f_2$  = stejnolehlost se středem  $S_2 = [4, -1]$  a koeficientem  $k_2 = \frac{1}{2}$ .

Určete druh a určující prvky transformace  $f_2 \circ f_1$ , resp.  $f_1 \circ f_2$ .

## 18 Další klasifikace a poznámky

V této části doplníme ještě několik postřehů k jednotlivým typům transformací, zejména ke shodnostem a podobnostem.

### 18.1 Shodnosti

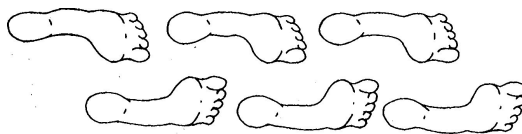
Již od útlého mládí známe všechny shodnosti v rovině a navíc je umíme pojmenovat. V tomto odstavci nabízíme zdůvodnění, proč jich není víc, představíme jejich klasifikaci pomocí samodružných prvků a současně řekneme něco o jejich analytickém vyjádření. Poté naznačíme, jak to vypadá se shodnostmi v obecném eukleidovském prostoru.

#### Klasifikace shodností v rovině

V rovině rozlišujeme následující druhy shodností:

- (1) identita,
- (2) posunutí,
- (3) otáčení,
- (3') středová souměrnost,
- (4) osová souměrnost,
- (5) posunutá souměrnost.

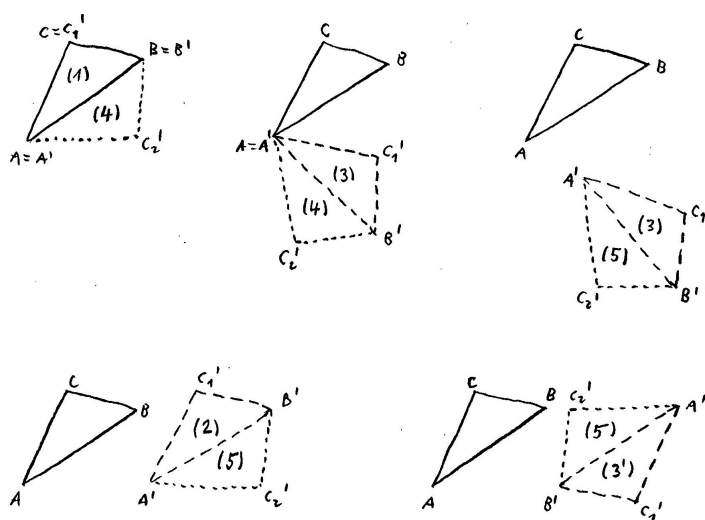
Středová souměrnost je otáčení o přímý úhel, proto ji podřazujeme obecnému otáčení. První tři transformace jsou přímé, poslední dvě nepřímé. Při prvním pokusu o vyjmenování všech shodností v rovině se obvykle zapomíná na posunutou souměrnost, což je složenina osově souměrnosti a posunutí (ve směru osy).



Obrázek 18.11: [Mar] Posunutá souměrnost.

Skládáním shodností můžeme dostat zase jenom shodnost — skládáním všech možných dvojic výše vyjmenovaných shodností lze ukázat, že tento výčet je úplný. ✎

Alternativní zdůvodnění téhož plyne z faktu, že každá shodnost v rovině je jednoznačně určena (shodným) obrazem  $A'B'C'$  nějakého trojúhelníku  $ABC$ . Postupně můžeme uvažovat všechny typově různé (shodné) obrazy úsečky  $AB$ , obraz bodu  $C$  je pak určen dvojznačně s tím, že jedna možnost odpovídá přímé shodnosti, druhá nepřímé. Tímto způsobem umíme vyčerpát všechny druhy shodností z výše uvedeného seznamu, viz obr. 18.12.



Obrázek 18.12: Přehled shodností v rovině pomocí obrazů trojúhelníku: (a)  $A'B' = AB$ , (b)  $A' = A$  a  $B' \neq B$ , (c)  $A' \neq A$  a  $B' \neq B$ , (c<sub>1</sub>)  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ , (c<sub>2</sub>)  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BA}$ .

### Klasifikace podle samodružných prvků

Při předchozím důkladném rozboru jsme si mohli povšimnout, že všechny typy shodností lze jednoznačně identifikovat podle samodružných prvků. Tento postřeh představuje možný návod k rozpoznávání shodností, a to zejména v případech, kdy jsou tyto dány transformačními rovnicemi. Přehledné shrnutí je v tab. 18.3.

### Analytické vyjádření, určující prvky a kanonický tvar

V tabulce 18.3 je o něco víc informací, než jsme zatím diskutovali. Obsahuje také transformační rovnice v tzv. kanonickém tvaru, což jsou nejjednodušší možná analytická vyjádření vzhledem k obzvláště vhodně zvoleným souřadným soustavám. Takové volby úzce souvisí s **určujícími prvky** toho kterého zobrazení, a ty jsou následující:

- (1) k identitě není co dodávat,
- (2) posunutí je určeno vektorem,
- (3) otáčení je určeno středem a úhlem,
- (3') středová souměrnost je určena středem,
- (4) osová souměrnost je určena osou,
- (5) posunutá souměrnost je určena osou a vektorem posunutí.

Vhodných souřadných soustav lze vždy najít více, nikoli však libovolně mnoho. Návod k určení takové soustavy tkví v porozumění pojmu matice zastupujícího lineárního zobrazení, viz odst. 15.2. Na základě předchozího přehledu určujících prvků by mělo být snadným cvičením zvolit souřadnou soustavu pro každou shodnost tak, aby transformační rovnice byly v kanonickém tvaru.



Samodružné směry \ Samodružné body	Žádný	Právě dva na sebe kolmé	Každý
Žádný		$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$ Posunutá souměrnost $N$	$X' = X + \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$ $e \neq 0$ Posunutí $P$
Právě jeden	$X' = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} X$ $P$ $\alpha \neq k\pi, k \text{ celé}$ Rotace o úhel $\alpha$ se středem v počátku		$X' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$ $P$ Středová souměrnost podle počátku
Vyplní přímku		$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$ $N$ Souměrnost podle osy $x$	
Každý			$X' = X$ $P$ Identita

Tabulka 18.3: [Ř1<sub>2</sub>] Klasifikace shodností v rovině podle samodružných prvků.


Analytické vyjádření shodnosti vzhledem k obecné kartézské souřadné soustavě není o moc komplikovanější než výše uvedené. Podmínka

$$D^T \cdot D = E$$

z druhé věty v odst. 15.3 je natolik omezující, že matice  $D$  může být pouze dvojího typu, a to

$$\text{buď } D_+ = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \text{ nebo } D_- = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (18.13)$$

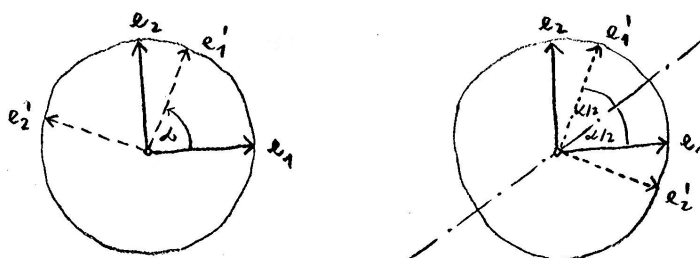
kde  $\alpha \in \mathbb{R}$  a znaménka zřejmě rozlišují shodnost přímkou a nepřímou. Názornou interpretaci parametru  $\alpha$  najdete na obr. 18.13.

Z uvedeného by mělo být zřejmé, že pro jakoukoli shodnost v rovině je velmi snadné určit její transformační rovnice, viz cvičení 18.4. 

### Shodnosti v prostoru

Shodností v prostoru je o něco víc než v rovině, jejich klasifikace se však velmi rychle redukuje na předchozí klasifikaci v rovině. Stačí si všimnout, že:

**Věta.** Každá shodnost v (trojrozměrném) prostoru má aspoň jeden samodružný směr.



Obrázek 18.13: Přímý a nepřímý obraz ortonormální báze podle (18.13).

Samodružné směry odpovídají řešením soustavy (16.11) pro reálná charakteristická čísla  $\lambda$ . Charakteristický polynom  $\det(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{E})$  je stupně 3 a má reálné koeficienty, proto má aspoň jeden reálný kořen.  $\square$

Kolmý doplněk k tomuto směru má dimenzi 2 a je to nutně samodružný podprostor (viz třetí větu v odst. 16.2). Zúžení shodnosti na tento podprostor je opět shodností, takže to musí být některá z výše diskutovaných shodností v dimenzi 2. Klasifikace shodností v prostoru je tedy odvozena z předchozí klasifikace v rovině — úplný výčet je následující:

- (1) identita,
- (2) posunutí,
- (3) otáčení,
- (3') osová souměrnost,
- (4) posunuté otáčení,
- (4') posunutá osová souměrnost,
- (5) souměrnost podle roviny (zrcadlení),
- (6) posunuté zrcadlení,
- (7) otočené zrcadlení,
- (7') středová souměrnost.

Prominentní postavení základní shodnosti v prostoru zaujímá souměrnost podle roviny neboli zrcadlení. Osová souměrnost v prostoru je přímá transformace, jakožto speciální případ otáčení kolem přímky. Středová souměrnost v prostoru je transformace nepřímá, zde chápána jako speciální případ otočeného zrcadlení, což je složenina otočení a zrcadlení podle roviny kolmé k ose otáčení. . .

Stejně jako v rovině platí, že všechny druhy shodností v prostoru je možné charakterizovat podle jejich samodružných prvků — přehled je uveden v tab. 18.4.

Transformační rovnice v této tabulce jsou opět v tzv. kanonickém tvaru. Shodnost v prostoru má aspoň jeden samodružný směr, který je generován vektorem odpovídajícím charakteristickému číslu  $\pm 1$ . Bereme-li takový vektor jako první a doplníme k němu další vektory do ortonormální

Samodružné směry Samodružné body	právé jeden	alespoň dva různé ale ne každý	každý
žádný	$X' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_\alpha \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha \neq k\pi, k \text{ celé}, c \neq 0$ Přemístění po šroubovici s osou $x_1$ $\alpha = \pi$	$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$ $(c, d) \neq (0, 0)$ Posunutě zrcadlení se samodružnou rovinou $\rho \equiv x_3 = 0$ $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $c \neq 0$ Posunutá osová souměrnost se samodružnou přímkou $x_1$	$X' = X + C$ $C \neq \mathbf{0}$ Posunutí
právé jeden	$X' = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_\alpha \end{pmatrix} X$ $\alpha \neq k\pi, k \text{ celé}$ Otočené zrcadlení složené z otočení kolem osy $x_1$ o úhel $\alpha$ a souměrnosti podle roviny $\rho \equiv x_1 = 0$		$X' = -X$ Středová souměrnost se středem v počátku
vyplní přímku	$X' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_\alpha \end{pmatrix} X$ $\alpha \neq k\pi, k \text{ celé}$ Otočení kolem osy $x_1$ o úhel $\alpha$	$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X$ Souměrnost podle osy $x_1$	
vyplní rovinu	$\alpha = \pi$	$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X$ Souměrnost podle roviny $\rho \equiv x_3 = 0$	
každý			$X' = X$ Identita

Tabulka 18.4: [Ř12] Klasifikace shodností v prostoru podle samodružných prvků.

báze celého prostoru, pak matice indukovaného lineárního zobrazení ke každé shodnosti vzhledem k takto vybrané bázi bude mít některý z následujících tvarů:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_- \end{pmatrix},$$

kde bloky  $\mathbf{D}_\pm$  jsou právě matice (18.13). (Aby to bylo zajímavější, v tabulce 18.4 vystupuje  $\mathbf{D}_+$  pod pseudonymem  $\mathbf{B}_\alpha$ .)

### Shodnosti obecně

Obecné závěry v eukleidovském prostoru obecné dimenze se dají vytušit z předchozí zkratky v dimenzi 3 a cvičení 18.4(2):

Charakteristický polynom může mít za reálné kořeny jediné  $\pm 1$  a komplexní kořeny jsou vždy v (komplexně sdružených) párech. Každý polynom má nad komplexními čísly právě tolik kořenů (včetně násobností), jaký je jeho stupeň, tzn. jaká je dimenze okolního prostoru. Reálným kořenům odpovídají reálné charakteristické vektory, které určují samodružné směry shodnosti. Komplexně sdruženým kořenům odpovídají dvojrozměrné samodružné podprostory takové, že zúžení na tyto podprostory je právě otáčení o úhel rovný argumentu odpovídajícího komplexního charakteristického čísla.

Na první pohled není zcela jasné, jakou roli hrají vyšší algebraické násobnosti kořenů, což na tomto místě nebudeme rozklíčovat. Bez dalšího zdůvodňování uvádíme následující charakterizaci, viz [Z1]:

**Věta.** Zobrazení  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  je shodnost právě tehdy, když platí, že zaměření  $\vec{\mathcal{E}}$  je přímým součtem navzájem kolmých jedno- a dvourozměrných invariantních podprostorů takových, že zúžení  $\vec{f}$  na kterýkoli jednorozměrný podprostor je  $\pm \text{id}$  a zúžení na kterýkoli dvourozměrný podprostor je otáčení o úhel rovný argumentu odpovídajícího komplexního charakteristického čísla.

⇒ Libovolnou shodnost lze tedy ve vhodné souřadné soustavě vyjádřit maticí, která má na hlavní diagonále právě čísla  $\pm 1$  nebo bloky  $\mathbf{D}_\pm$  a jinak samé 0...

## 18.2 Podobnosti

V tomto odstavci doplníme několik typických poznámek k podobnostem, které by bylo škoda opomenout.

### Rozklady podobností

Pokud obecnou podobnost  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  s koeficientem  $k$  složíme s nějakou stejnolehlostí  $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  s koeficientem  $\frac{1}{k}$ , pak výsledná transformace  $g := h \circ f$  je zřejmě shodná. Protože každá stejnolehlost je invertibilní, platí  $f = h^{-1} \circ g$ . Protože inverzní transformace ke stejnolehlosti je opět stejnolehlost, právě jsme zdůvodnili následující tvrzení:

**Věta.** Každou podobnost lze vyjádřit (mnoha různými způsoby) jako složení shodnosti a stejnolehlosti.

Ve čtvrté větě v odst. 16.2 jsme dokázali, že každá podobnost, která není shodností, má právě jeden vlastní samodružný bod. Tento bod může hrát docela zajímavou roli při rozkladech zmiňovaných v předchozí větě:

Uvažme podobnost  $f$  s koeficientem  $k$  a samodružným bodem  $S$ . Chceme vyjádřit  $f$  jako složení nějaké shodnosti  $g$  a stejnolehlosti  $h$  tak, aby platilo např.  $f = h \circ g$ . To lze samozřejmě realizovat tisícerým způsobem, ale pokud zvolíme střed stejnolehlosti  $h$  právě ve význačném bodě  $S$ , pak nutně musí být  $S$  také pevným bodem shodnosti  $g$ . Pro tento specificky zvolený rozklad navíc platí, že je jedno, v jakém pořadí stejnolehlost a shodnost skládáme, což rozhodně nemůžeme tvrdit obecně! Jinými slovy, pro takto (a právě takto) zvolený rozklad platí:

$$f = h \circ g = g \circ h.$$



### Klasifikace podobností

Odtud také plyne, že klasifikace podobností v libovolném eukleidovském prostoru se omezuje pouze na kompozice stejnolehlosti a shodnosti s nějakým pevným bodem. Např. v **rovině** tak dostáváme pouze tři typy podobností:

- (1) stejnolehlost,
- (2) stejnolehlost složená s otáčením (kolem středu stejnolehlosti),
- (3) stejnolehlost složená s osovou souměrností (jejíž osa prochází středem stejnolehlosti).

Bez ohledu na znaménko koeficientu stejnolehlosti platí, že první dva případy představují přímé podobnosti, třetí je nepřímá.

### 18.3 Afinity

Většinu afinit nemáme vůbec pojmenovánu, přičemž všechny, které pojmenovány máme, jsme zmínili mnohem dříve. Pro zajímavost a porovnání přikládáme přehled všech afinit v **rovině** podle jejich samodružných prvků, viz tab. 18.5. Seznam je pořád relativně malý a jen mírně rozšiřuje/zobecňuje klasifikaci shodností, která je v tab. 18.3. Všimněte si zejména míst, která byla v přehledu shodností prázdná.



Transformační rovnice v tabulce jsou opět v tzv. kanonickém tvaru, tj. vzhledem k velmi vhodné zvolené afinní (ne nutně kartézské) souřadné soustavě...

### 18.4 Cvičení



- (1) Pojmenujte všechny dosud nepojmenované shodnosti z předchozích cvičení.
- (2) Odvoďte charakterizaci (18.13) přímým výpočtem. Vyjádřete charakteristická čísla a charakteristické vektory transformací určených těmito maticemi a porovnejte výsledek s obr. 18.13.
- (3) V eukleidovské rovině určete transformační rovnice
  - otáčení kolem bodu  $S = [0, 2]$  o úhel  $\alpha = +60^\circ$ ,
  - osovou souměrnost podle přímky určené rovnicí  $2x - y = 2$ .
  - posunutou souměrnost určenou osou  $y = x + 1$  a vektorem  $\mathbf{v} = (-1, 1)$ .
- (4) Všechny podobnosti z předchozích cvičení vyjádřete jako složení shodnosti a stejnolehlosti.
- (5) Řešte tutéž úlohu tak, aby rozklad nezávisel na pořadí dílčích transformací.
- (6) Podle tab. 18.5 klasifikujte všechny afinity z předchozích cvičení.

	Žádný samodružný směr	právě jeden samodružný směr	alespoň dva různé samodružné směry ale ne každý	každý směr samodružný
Žádný samodružný bod		1 $\begin{array}{l} x' = x + by \\ y' = y + q \\ b \neq 0 \end{array}$	2 $\begin{array}{l} x' = x + p \\ y' = dy \\ p \neq 0, d \neq 0, d \neq 1 \end{array}$	3 $\begin{array}{l} x' = x + p \\ y' = y + q \\ (p, q) \neq (0, 0) \end{array}$
právě jeden samodružný bod	4 $\begin{array}{l} x' = ax + by \\ y' = -bx + ay \\ b \neq 0 \end{array}$	5 $\begin{array}{l} x' = ax + by \\ y' = ay \\ a \neq 0, a \neq 1, b \neq 0 \end{array}$	6 $\begin{array}{l} x' = ax \\ y' = dy \\ ad \neq 0, a \neq d, a \neq 1, d \neq 1 \end{array}$	7 $\begin{array}{l} x' = ax \\ y' = ay \\ a \neq 0, a \neq 1 \end{array}$
množinou všech samodružných bodů je přímka		8 $\begin{array}{l} x' = x + by \\ y' = y \\ b \neq 0 \end{array}$	9 $\begin{array}{l} x' = x \\ y' = dy \\ d \neq 0, d \neq 1 \end{array}$	
každý bod samodružný				10 $\begin{array}{l} x' = x \\ y' = y \end{array}$

1. Afinita složená z elace a translace
2. Afinita složená z osové afinity a translace
3. Translace
4. Afinita složená z rotace a stejnohlosti
5. Afinita složená z elace a stejnohlosti
6. Afinita složená z osové afinity a stejnohlosti
7. Stejnohlost
8. Elace
9. Osová afinita
10. Identita

Tabulka 18.5: [Ří<sub>2</sub>] Klasifikace afinit v rovině.

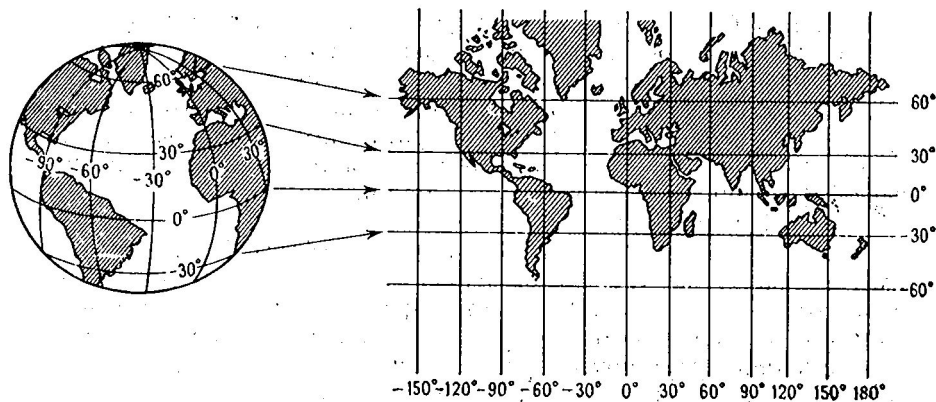


## 19 Pseudo-eukleidovské prostory

pseudo-skalární součin, pseudo-shodnosti apod., ...

## 20 Další geometrická zobrazení

konformní a kontaktní zobrazení, nějaká katografická zobrazení



## 21 Kuželosečky a kvadriky

přehled metrické/afinní/projektivní klasifikace, ...

## 22 Kleinova geometrie přímek

prostor přímek, průnik a vzdálenost přímek, průnik přímky s rovinou, ...

## 23 Lieova geometrie kružnic

prostor kružnic, dotyk a úhel průniku kružnic, Apollóniový úlohy, cyklografie, ...

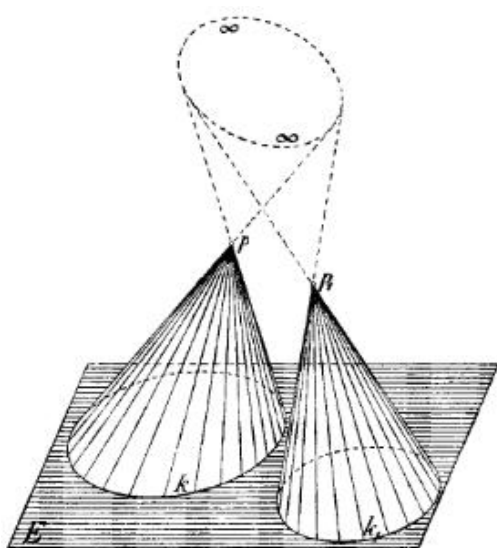


Fig. 75.

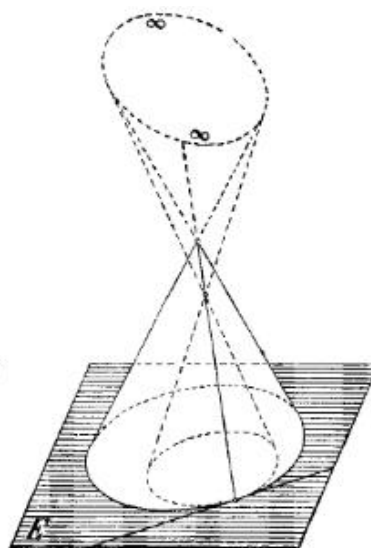


Fig. 76.

## 24 Grupové akce

### 24.1 Působení grupy na množině

Všechny bijektivní transformace na (jakékoli) množině  $X$  tvoří grupu (s operací skládání zobrazení), kterou značíme  $S_X$ .<sup>1</sup> Grupa  $S_X$ , stejně jako jakákoli její podgrupa  $G \subseteq S_X$ , přirozeně působí na množině  $X$ ; jedná se o nejjednodušší příklady *akce grupy na množině*. Např. grupa symetrií krychle působí na vrcholech krychle jakožto podgrupa  $S_8$ , grupa lineárních izomorfismů vektorového prostoru  $V$  je podgrupou  $S_V$  apod.

Obecnou akcí grupy  $G$  na množině  $X$  se myslí přiřazení, kdy každému prvku grupy  $G$  odpovídá nějaká bijekce na množině  $X$  tak, že násobení v  $G$  koreponduje se skládáním odpovídajících bijekcí. Stručněji můžeme říct, že

**Definice.** Akce grupy  $G$  na množině  $X$  je grupový homomorfismus  $\phi : G \rightarrow S_X$ .

Akci (nebo působení) konkrétního prvku  $g \in G$  na  $X$ , obvykle zapisujeme jako  $x \mapsto g(x)$  místo správnějšího  $x \mapsto \phi(g)(x)$ .

<sup>1</sup>Pokud je množina  $X$  konečná a má  $n$  prvků, místo  $S_X$  zpravidla píšeme  $S_n$  a mluvíme o *symetrické grupě* nebo *grupě permutací*.

## 24.2 Další příklady

- (1) přirozená akce  $GL(V)$  na  $V$  indukuje také akci na množině všech  $k$ -rozměrných podprostorů ve  $V$ ,
- (2) grupa  $O(n+1)$  působí na sféře  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ : zúžení přirozené akce na  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,
- (3)  $\mathbb{R}^*$  ( $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$  s operací násobení) působí na libovolném reálném vektorovém prostoru:  $r(\mathbf{v}) = r\mathbf{v}$ ,
- (4)  $V$  (vektorový prostor jakožto komutativní grupa) působí na každém afinním prostoru se zaměřením  $V: \mathbf{v}(A) = A + \mathbf{v}$ ,
- (5) libovolná grupa  $G$  působí sama na sobě, např. zprava:  $g(h) = hg$ ,
- (6)  $S_X$  působí na množině všech zobrazení  $X$  do  $Y$ :  $g(f) = f \circ g$ .

## 24.3 Orbity, tranzitivní a efektivní akce


*Orbita* prvku  $x \in X$  vzhledem k akci grupy  $G$  na  $X$  je podmnožina

$$G(x) = \{g(x) : g \in G\} \subseteq X.$$

Dvě různé orbity se nikdy neprotínají a sjednocení všech orbit je celá množina  $X$ . Akce grupy na množině tedy definuje relaci ekvivalence, jejíž třídy rozkladu jsou právě orbity akce. Např. akce grupy symetrií krychle na množině jejích vrcholů má jedinou orbitu (každý vrchol krychle lze zobrazit na kterýkoli jiný), akce  $GL(V)$  na  $V$  má dvě orbity (jednoprvková orbita  $\{\mathbf{o}\}$  a komplementární podmnožina  $V \setminus \{\mathbf{o}\}$ ) apod.

Akce  $G$  na  $X$  je *tranzitivní*, pokud má jedinou orbitu. Jinými slovy, jeden vybraný (ekvivalentně, každý) prvek z  $X$  lze zobrazit na kterýkoli jiný působením nějakého prvku z  $G$ . Množina  $X$  s tranzitivní akcí grupy  $G$  se jmenuje *homogenní prostor* grupy  $G$ . Každá orbita je tedy homogenním prostorem.

Akce je *efektivní* (nebo *věrná*), pokud jediný prvek z  $G$ , který působí jako identita na  $X$ , je neutrální prvek grupy  $G$ . Ekvivalentně, odpovídající homomorfismus  $\phi : G \rightarrow S_X$  je injektivní.

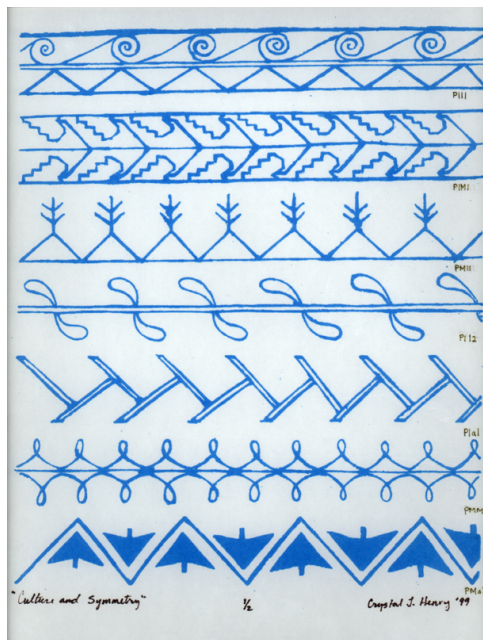
Rozhodněte, zda výše zmiňované akce jsou efektivní a tranzitivní; pokud nejsou tranzitivní, určete jejich orbity. 

## 25 Frízové a tapetové vzory

Specifickým příkladem grupové akce je akce grupy symetrií nějaké podmnožiny v eukleidovském prostoru: *Symetrie* podmnožiny  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je shodnost v  $\mathbb{R}^n$ , která zobrazuje  $X$  na sebe. Všechny symetrie  $X$  (s operací skládání) tvoří grupu, která může mít různé vlastnosti podle typu podmnožiny  $X$ .

Frízové a tapetové vzory v  $\mathbb{R}^2$  lze celkem jednoduše charakterizovat podle odpovídajících grup symetrií, které jsou sice nekonečné, ale diskrétní. Grupa symetrií frízového, resp. tapetového vzoru se nazývá frízová, resp. tapetová grupa. (Často se také mluví o jedno- a dvourozměrných krystalografických grupách, což naznačuje, že toto téma má přirozené vícerozměrné analogie.) Srozumitelný úvod do problematiky najdou zájemci např. v [Po].

**Věta.** Až na izomorfismus existuje právě 7 frízových a právě 17 tapetových grup.



Obrázek 25.1: Sedm frízových vzorů s různými grupami symetrií.

## 26 Třetí Hilbertův problém

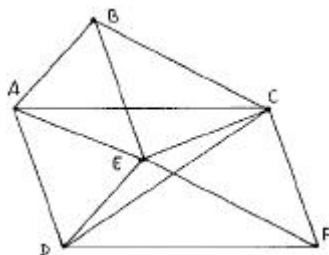
Tady doplňujeme diskuzi, kterou jsme vyprovokovali za větou 13.5, jež popisuje objem  $k$ -rozměrného simplexu jako  $\frac{1}{k!}$  objemu jím určeného rovnoběžnostěnu. Připomínáme, jak klasikové nahlíží tento problém pro  $k = 2$  a  $3$ ; veškeré nespécifikované citace jsou z [Eu]:

$k = 2$ : Jinými slovy můžeme říct, že úhlopříčka v rovnoběžníku jej rozděljuje na dva trojúhelníky se stejným obsahem. To je přesně obsahem tvrzení I.41, jež odkazuje na I.37. Těmto tvrzením perfektně rozumíme z kurzu konstrukční geometrie, a to s pouhým pravítkem, kružítkem a nůžkami v ruce!

$k = 3$ : V tomto případě stačí ukázat, že trojboký (obecně šikmý) hranol lze rozdělit na tři čtyřstěny se stejným objemem, což je právě tvrzení XII.7, viz obr. 26.2. Toto tvrzení se odkazuje na větu XII.5, jejíž zdůvodnění je však překvapivě mnohem komplikovanější než analogický výsledek v dimenzi 2.

Věta XII.5 je dokázána Eudoxovou exhaustivní metodou, což je technicky poměrně komplikovaná procedura, která je v podstatě ekvivalentní s infinitezimálními úvahami, jak je známe z matematické analýzy. Přírozenou otázkou je, zda to nejde udělat lépe. Právě tato pozorování jsou prazdrojem velice zajímavého Hilbertova problému č. 3: <sup>2</sup>

<sup>2</sup>[http://cs.wikipedia.org/wiki/Hilbertovy\\_prob1%C3%A9my](http://cs.wikipedia.org/wiki/Hilbertovy_prob1%C3%A9my)



Obrázek 26.2: [Ha] Objem trojbokého jehlanu je roven třetině objemu opsaného hranolu.

- Platí pro libovolné dva mnohostěny se stejným objemem, že jeden lze rozstříhat na konečný počet menších mnohostěňů, z nichž lze složit ten druhý?

Odpověď (z roku 1900) je záporná:

- Mnohostěny, pro které je toto možné, musí mít stejný tzv. Dehnův invariant.

Řešení je veskrze algebraické; celou zápletku i s rozumnými podrobnostmi lze najít např. v [Ha, podkap. 27].



## Kapitola II



### 4.4, str. 16 — Součet afinních podprostorů

Pokud vás nic nenapadá (ani nad obrázkem 4.3), uvažte např. dvojici různoběžných, resp. mimoběžných přímk v  $\mathbb{R}^3$ ...

### 4.5, str. 17 — Cvičení

(3) Všechna řešení uvedené rovnice jsou  $\{c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x + 2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ .

### 7.1, str. 28 — Zdůvodnění důsledků

(1)  $\vec{B}$  a  $\vec{C}$  jsou komplementární, pokud  $\vec{B} + \vec{C} = \vec{A}$  a  $\vec{B} \cap \vec{C} = \{\mathbf{o}\}$ . Z první rovnosti plyne, že každý vektor  $\vec{BC}$  patří do  $\vec{B} + \vec{C}$ , tudíž podprostory se protínají. Z druhé rovnosti plyne  $\dim(\vec{B} \cap \vec{C}) = \dim(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = 0$ , tudíž průnikem je bod.

(2) Jistě je  $\dim \mathcal{B}$  a  $\dim \mathcal{C} \geq 1$ , jinak by  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  byly rovnoběžné.

Z mimoběžnosti také plyne  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ , což podle předchozí věty a rovnosti (4.2) znamená, že  $\dim(\vec{B} + \vec{C}) = \dim(\vec{B} + \vec{C}) + 1$ . Dále zřejmě platí  $\dim \vec{A} \geq \dim(\vec{B} + \vec{C})$ . Podle (7.7) můžeme psát:

$$\dim \vec{A} \geq \dim(\vec{B} + \vec{C}) = \dim(\vec{B} + \vec{C}) + 1 = \dim \vec{B} + \dim \vec{C} - \dim(\vec{B} \cap \vec{C}) + 1.$$

Z mimoběžnosti dále plyne, že  $\vec{B} \cap \vec{C}$  není roven ani  $\vec{B}$  ani  $\vec{C}$  (jinak by  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  byly rovnoběžné), tzn. jak  $\dim \vec{B}$ , tak  $\dim \vec{C}$  je  $> \dim \vec{B} \cap \vec{C}$ . Jinými slovy jak rozdíl  $\dim \vec{C} - \dim(\vec{B} \cap \vec{C})$ , tak rozdíl  $\dim \vec{B} - \dim(\vec{B} \cap \vec{C})$  je  $\geq 1$ . Dosazením do pravé strany v předchozím výrazu vidíme, že platí jak  $\dim \mathcal{A} \geq \dim \mathcal{B} + 2$ , tak  $\dim \mathcal{A} \geq \dim \mathcal{C} + 2$ .

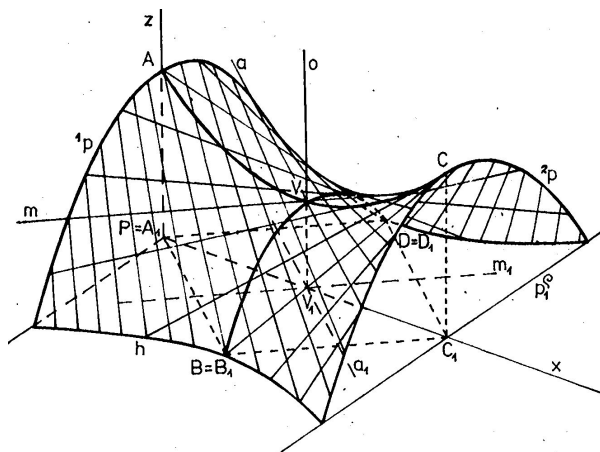
(3) Protože  $\mathcal{C}$  je nadrovina a  $\mathcal{B}$  je s ní různoběžný podprostor, platí  $\mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathcal{A}$ . Odtud také plyne  $\dim(\vec{B} + \vec{C}) = \dim \mathcal{A}$ . Podle (7.7) můžeme psát:

$$\dim(\vec{B} \cap \vec{C}) = \dim \vec{B} + \dim \vec{C} - \dim(\vec{B} + \vec{C}) = \dim \vec{B} + \dim \mathcal{A} - 1 - \dim \mathcal{A} = \dim \vec{B} - 1,$$

což se mělo dokázat. □

## 7.4, str. 32 — Cvičení

(4) viz obr. 26.3.



Obrázek 26.3: [Ma] Příčky ke dvěma mimoběžkám, jež jsou rovnoběžné s danou rovinou, tvoří tzv. parabolický hyperboloid.

## 8.4, str. 36 — Cvičení

(6) viz obr. 26.4:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{2\frac{x_1+x_3}{2} + 2\frac{x_2+x_4}{2}}{4} = \frac{3\frac{x_1+x_2+x_3}{3} + x_4}{4} = \dots$$

## 9.6, str. 45 — Dvojpoměr pro malíře

Jsou-li  $A, B, C, D$  kolineární body takové, že  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$ , pak jejich dvojpoměr podle (9.14) vychází

$$(ABCD) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

## Kapitola III



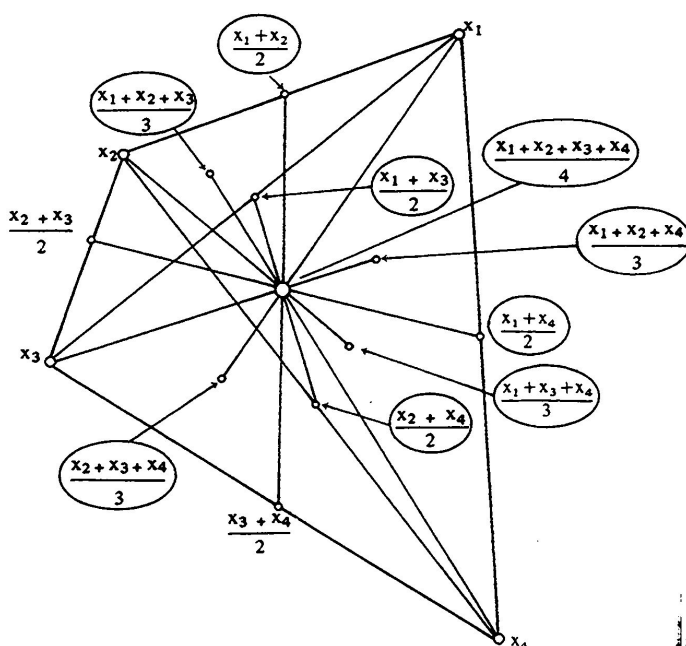
## 11.1, str. 53 — Zdůvodnění věty

Místo  $\vec{C} \subseteq \vec{E}$  píšeme  $U \subseteq V$ .

- $U^\perp$  je vektorový podprostor (plyne z definicí a bilinearity skalárního součinu):

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U^\perp \implies \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ a } \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ (pro lib. } \mathbf{u} \in U) \implies (\mathbf{ax} + \mathbf{by}) \cdot \mathbf{u} = 0 \implies \mathbf{ax} + \mathbf{by} \in U^\perp.$$



Obrázek 26.4: [Be] Konstrukce bodu  $\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ 

- $U \cap U^\perp = \{\mathbf{o}\}$  (plyne z pozitivní definitnosti skalárního součinu):

$$\mathbf{u} \in U \text{ a } \mathbf{u} \in U^\perp \implies \mathbf{u} \perp \mathbf{u} \implies \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$

- $U + U^\perp = V$  (plyne z definice a věty o součtu a průniku vektorových podprostorů):

Je-li  $\dim U = k$ ,  $\dim V = n$  a  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  je nějaká báze  $U$ , pak  $U^\perp$  je určeno soustavou  $k$  (nezávislých) rovnic v  $n$  neznámých:

$$U^\perp = \{\mathbf{x} \in V : \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \dots, \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k = 0\}.$$

Proto je  $\dim U^\perp = n - k$ . Navíc platí

$$\dim(U + U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp - \dim(U \cap U^\perp) = k + n - k - 0 = n.$$

Protože  $n = \dim V$ , musí být  $U + U^\perp = V$ . □

### 11.2, str. 55 — Podivné vlastnosti kolmosti

Uvažme 4-rozměrný eukleidovský prostor  $\mathcal{E}$  a nějakou kolmou bázi  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$  zaměření  $\vec{\mathcal{E}}$ . Stačí zvolit např. podprostory  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ , jejichž zaměření jsou  $\vec{\mathcal{B}} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ ,  $\vec{\mathcal{C}} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle$  a  $\vec{\mathcal{F}} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ .

V eukleidovském prostoru  $\vec{\mathcal{F}}$  platí  $\vec{\mathcal{B}}^\perp = \langle \mathbf{e}_3 \rangle \subset \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = \vec{\mathcal{C}}$ , tedy  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  jsou kolmé v  $\mathcal{F}$ .

Avšak v eukleidovském prostoru  $\vec{\mathcal{E}}$  pozorujeme:  $\vec{\mathcal{B}}^\perp = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$ , což v žádném případě neobsahuje, ani není obsaženo v  $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = \vec{\mathcal{C}}$ , tedy  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$  nejsou kolmé v  $\mathcal{E}$ .



- [Ar] B. Artmann, *Euclid: The Creation of Mathematics*, Springer, 1999
- [Be] M. Berger, *Geometry I, II*, Springer, 1987
- [Be<sub>2</sub>] M. Berger, *Geometry Revealed: A Jacob's Ladder to Modern Higher Geometry*, Springer, 2010
- [Co] H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley, 1989
- [Dv] T. Dvořáková, *Přínos Jánoše Bolyaie k základům neeuklidovské geometrie*, UK Praha, 2012
- [El] J. Elbelová, *Vektorové metody v euklidovské geometrii*, MU Brno, 2011,  
[http://is.muni.cz/th/13813/prif\\_d/dizerJE.pdf](http://is.muni.cz/th/13813/prif_d/dizerJE.pdf)
- [Eu] Eukleides, *Základy*, Alexandrie, –300  
(pro specifická vydání viz [Eu<sub>1</sub>, Eu<sub>2</sub>, Eu<sub>3</sub>] níže)
- [Ha] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000
- [Ha<sub>2</sub>] R. Hartshorne, *Teaching geometry according to Euclid*, Notices of AMS, 2000,  
<http://www.ams.org/notices/200004/fea-hartshorne.pdf>
- [Hi] D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 1902,  
<http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf>
- [HiCV] D. Hilbert, S. Cohn–Vossen, *Geometry and the imagination*, Chelsea, 1999
- [HoJa] P. Horák, J. Janyška, *Analytická geometrie*, Brno, 1997
- [Ku] F. Kuřina, *Deset geometrických transformací*, Prometheus, 2002
- [LiSch] S. Lie, G. Scheffers, *Geometrie der berührungstransformationen*, Teubner, 1896
- [Ma] F. Machala, *Plochy technické praxe*, Olomouc, 1986
- [MaSl] F. Machala, V. Slezák, *Geometrie grup kolineací*, Olomouc, 2001

- [Mar] G.E. Martin, *Transformation geometry*, Springer, 1982
- [Po] A. Pokorný, *Tapetové vzory a grupy*, MU Brno, 2008  
[http://is.muni.cz/th/106039/pedf\\_b/tapetove\\_vzory.pdf](http://is.muni.cz/th/106039/pedf_b/tapetove_vzory.pdf)
- [Rek] K. Rektorys a kol., *Přehled užití matematiky*, SNTL, 1968
- [Ří] O. Říha, *Konstrukční geometrie I, II*, Brno, 2002
- [Ří<sub>2</sub>] O. Říha, *Pomocné materiály do geometrie*, Brno, 2000
- [Sek] M. Sekanina a kol., *Geometrie I, II*, SPN, 1986
- [Se] O. Sekora, *Brouk Pytlík*, Albatros, 1969
- [St] J. Stillwell, *The four pillars of Geometry*, Springer, 2005
- [Zl] P. Zlatoš, *Lineárna algebra a geometria*, Bratislava, 2011,  
[http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/1a/LAG\\_A4.pdf](http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/1a/LAG_A4.pdf)
- [Žá] V. Žádník, *Konstrukční geometrie*, 2012,  
[http://is.muni.cz/el/1441/jaro2013/MA2BP\\_PKG/um/osnova.pdf](http://is.muni.cz/el/1441/jaro2013/MA2BP_PKG/um/osnova.pdf)

\* \* \*

- [Eu<sub>1</sub>] *Euclid's elements*, interaktivní edice D. Joyce podle překladu T. Heatha (1908–28),  
<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>
- [Eu<sub>2</sub>] *The elements of Euclid*, atraktivní vydání prvních 6 knih od O. Byrneho (1847),  
<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/byrne.html>
- [Eu<sub>3</sub>] *Eukleides, Základy, Knihy I–IV*, české vydání prvních 4 knih, jež zpracoval a komentářem opatřil P. Vopěnka podle překladu F. Servíta (1907), O.P.S., 2008

---

## Seznam obrázků

---

1.1	Eukleidův dodatečný postulát . . . . .	8
3.2	Hierarchie geometrií . . . . .	12
4.1	Kritérium rovnoběžnosti přímek . . . . .	13
4.2	Axiómy obecné afinní struktury . . . . .	14
4.3	Průnik a součet afinních podprostorů . . . . .	16
5.4	Osová afinita . . . . .	18
5.5	Afinní zobrazení indukují lineární zobrazení mezi zaměřeními. . . . .	19
5.6	Definice afinního zobrazení . . . . .	19
5.7	Středové promítání mezi rovinami. . . . .	20
6.8	Afinní souřadnice . . . . .	21
6.9	Přechod mezi dvěma afinními repéry . . . . .	22
6.10	Dvojí vyjádření téže roviny . . . . .	23
6.11	Obecné vyjádření přímky . . . . .	24
6.12	Podprostor jako průnik nadrovin . . . . .	25
6.13	Několikeré vyjádření téže přímky . . . . .	25
6.14	[Rek] Interpretace konstant z různých vyjádření přímky . . . . .	26
7.15	Vzájemné polohy afinních podprostorů. . . . .	28
7.16	Charakterizace neprázdného průniku podprostorů . . . . .	29
7.17	[LiSch] Ke dvěma mimoběžkám existuje $\infty^2$ různých příček. . . . .	32
8.18	Bod $X$ na úsečce $AB$ . . . . .	35
8.19	[Be] Těžiště mnohoúhelníku obecně není totéž, co těžiště bodové hmotné soustavy . . . . .	36
8.20	Stopy. . . . .	37
9.21	Středová projekce je projektivní zobrazení . . . . .	37
9.22	Na projektivní přímce relaci „mezi“ nemáme . . . . .	38
9.23	Projektivní rozšíření afinní roviny . . . . .	39
9.24	Homogenní souřadnice . . . . .	40
9.25	[Be] Ukázka z Lambertovy Perspektivy (1759) . . . . .	41
9.26	Charakterizace projektivního zobrazení . . . . .	41
9.27	Vyjádření nadroviny v projektivním prostoru . . . . .	44
9.28	[St] Která čtveřice bodů je projektivním obrazem stejně vzdálených bodů? . . . . .	45
9.29	[St] Perspektivní průmět čtvercového dláždění roviny. . . . .	45

9.30 [Be] Porovnání perspektivních průmětů téže roviny . . . . .	46
10.1 Kosinová věta . . . . .	50
10.2 K definici funkce $\cos$ . . . . .	51
11.3 Kolmé podprostory v eukleidovském prostoru . . . . .	53
11.4 Kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}$ do podprostoru $U$ . . . . .	55
11.5 Kolmý průmět vektoru do jednorozměrného podprostoru. . . . .	56
12.6 Vzdálenost bodu od podprostoru . . . . .	58
12.7 Vzdálenost podprostorů . . . . .	59
12.8 Vzdálenost bodu od nadroviny. . . . .	61
12.9 Vzdálenost bodu od roviny a výška rovnoběžnostěnu . . . . .	62
12.10K definici odchylky . . . . .	63
12.11Odchylka přímek. . . . .	64
12.12Odchylka přímky a obecného podprostoru. . . . .	65
12.13Odchylka přímky a nadroviny . . . . .	65
12.14Odchylka nadrovin. . . . .	66
12.15K obecné diskuzi o odchylce. . . . .	68
13.16[Eu <sub>1</sub> ] Rovnoběžníky se stejnou základnou a výškou mají stejný obsah . . . . .	69
13.17K objemu rovnoběžnostěnu. . . . .	70
13.18Vlastnosti obsahu/objemu se nápadně podobají vlastnostem determinantu . . . . .	71
14.1 [Ku] Základní kolineace v rovině je osová kolineace. . . . .	78
14.2 [Ku] Základní afinita v rovině je osová afinita. . . . .	79
14.3 [Eu <sub>1</sub> ] Typická ekviafinita je elace. . . . .	79
14.4 [Se] Základní shodnost je souměrnost podle nadroviny. . . . .	80
14.5 [Be] Základní podobnost je stejnolehlost. . . . .	80
14.6 Hierarchie geometrických zobrazení . . . . .	82
17.7 Konstrukce obrazu bodu v osové kolineaci . . . . .	91
17.8 Konstrukce obrazu bodu v osové afinitě . . . . .	92
17.9 [Sek] Každá shodnost v rovině je složením nejvýše tří osových souměrností. . . . .	94
17.10Mongeova věta . . . . .	96
18.11[Mar] Posunutá souměrnost. . . . .	97
18.12Přehled shodností v rovině pomocí obrazů trojúhelníku. . . . .	98
18.13Přímý a nepřímý obraz ortonormální báze . . . . .	100
25.1 [www.oswego.edu/~baloglou/103/crystal.html] Sedm frízových vzorů . . . . .	108
26.2 [Ha] Objem trojbokého jehlanu je roven třetině objemu opsaného hranolu. . . . .	109
26.3 [Ma] Parabolický hyperboloid . . . . .	112
26.4 [Be] Konstrukce bodu $\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ . . . . .	113

---

## Seznam tabulek

---

14.1	Přehled geometrických zobrazení . . . . .	81
17.2	Klasifikace základních transformací v rovině . . . . .	92
18.3	[Ř <sub>12</sub> ] Klasifikace shodností v rovině podle samodružných prvků. . . . .	99
18.4	[Ř <sub>12</sub> ] Klasifikace shodností v prostoru podle samodružných prvků. . . . .	101
18.5	[Ř <sub>12</sub> ] Klasifikace afinit v rovině. . . . .	104





- úhel, 34  
úsečka, 33
- afinita, 19, 103  
  ekvi-, 94  
  nepřímá, 84  
  osová, 18, 79, 92  
  přímá, 84
- afinní  
  geometrie, 19  
  obal, 16  
  podprostor, 15  
  poloprostor, 34  
  prostor, 14  
    standardní, 15  
  repér, 21  
  souřadnice, 21  
  zobrazení, 19, 78
- bod  
  nevlastní, 38  
  samodružný, 87  
  vlastní, 38
- Bolyai, J., 11
- Cantor, G., 11
- charakteristický  
  číslo, 87  
  polynom, 87  
  vektor, 87
- cvičení, 15, 17, 20, 22, 27, 32, 36, 45, 52, 56, 68,  
  75, 86, 89, 96, 103
- Dedekind, R., 9, 11  
Dehn, M., 109  
Desargues, G., 11
- Descartes, R., 10
- determinant  
  Gramův, 70
- doplňek, 28  
  kolmý, 53
- dvojpoměr, 42
- elace, 79, 92  
  projektivní, 91
- Eudoxos, 108  
Eukleides, 7  
Euler, L., 11
- Frobenius, F.G., 31
- Gauss, C.F., 11
- geometrie  
  absolutní, 9  
  afinní, 9, 13–36  
  eukleidovská, 9, 47–75  
  hierarchie —, 12  
  neeuclidovské, 9  
  projektivní, 9, 37–46
- Gergonne, J.D., 11  
Gram, J.P., 70
- grupa  
  akce, 15, 106  
  frízová, 107  
  tapetová, 107  
  transformační, 10
- Hamilton, W.R., 11  
Hilbert, D., 8, 108
- hyperboloid  
  eliptický, 32  
  parabolický, 32

- incidence, 8  
 Jacobi, C.G.J., 73  
 Klein, F., 10, 11  
 kolineace, 40  
   nadosová, 93  
   osová, 78, 90  
 kolmý  
   doplňek, 53  
   průmět, 54  
 kolmost, 7, 49, 53–55  
 Komenský, J.A., 3  
 konvexní  
   množina, 34  
   obal, 34  
  
 Laplace, P.S., 73  
 Lie, S., 10, 74  
 Lobačevský, N.I., 11  
  
 Möbius, A.F., 11  
 mimoběžnost, 27  
 modul  
   afinní transformace, 84  
   osové kolineace, 91  
 Monge, G., 96  
  
 nadosa, 93  
 nadrovina, 15  
 nerovnost  
   Cauchyova–Schwartzova, 48  
   trojúhelníková, 48  
  
 obal  
   afinní, 16  
   konvexní, 34  
 objem, 68–75  
 obsah, 68–75  
 odchylka, 49, 50, 62–68  
 orbita, 107  
 osa, 58, 90  
   nad-, 93  
  
 příčka, 31  
 Pappos, 11  
 Pascal, B., 11  
 Plücker, J., 11  
 podobné  
   zobrazení, 80  
  
 podobnost, 52, 102–103  
 poměr  
   dělicí, 18  
   dvoj-, 42  
   harmonický, 42  
 Poncelet, V., 11  
 postulát, 8  
 posunutí, 15, 85, 91, 95  
 projektivní  
   podprostor, 38  
   prostor, 38  
   rozšíření, 38  
   zobrazení, 40, 77  
 prostor  
   afinní, 14  
   eukleidovský, 49  
   metrický, 48  
   polo-, 34  
   projektivní, 38  
  
 rovnoběž-  
   -ky, 13, 18  
   -ník, 69  
   -nost, 8, 16, 27, 44, 62  
   -nostěn, 69  
  
 Schmidt, E., 70  
 shodnost, 8, 47, 51, 97–102  
 simplex, 74  
 součet, 16  
 součin  
   skalární, 48  
   vektorový, 73  
   vnější, 72  
 souřadnice  
   afinní, 21  
   barycentrické, 35  
   homogenní, 39  
   kartézské, 82  
 souměrnost  
   šikmá, 91, 94  
   harmonická, 91  
   osová, 80, 91  
   posunutá, 97  
   středová, 85  
 spojitost, 9  
 střed, 90, 93  
 Steiner, J., 11  
 stejnolehlost, 80, 85, 91, 95

- těžiště, 35
- transformace, 86–103
  - základní, 90–97
- uspořádání, 8, 33
- věta
  - kosinová, 50
  - Mongeova, 96
  - základní, 20, 41
- velikost
  - úhlu, 50
  - úsečky, 49
  - vektoru, 48
- vyjádření podprostoru
  - neparametrické, rovnicové, 24
  - parametrické, 23
- vzdálenost, 57–62, 74
  
- Weyl, H., 11
  
- Základy, 7–8
- zaměření, 14
- zobrazení
  - afinní, 19, 78
  - ekviafinní, 52, 79
  - podobné, 52, 80
  - projektivní, 40, 77
  - shodné, 51, 79



## Hilbert's Axioms for Plane Geometry

Undefined terms: Point, line, plane, between, congruence.

### Connection (Incidence)

- I-1. Through any two distinct points  $A, B$  there is always a line  $m$ .
- I-2. Through any two distinct points  $A, B$  there is not more than one line  $m$ .
- I-3. On every line there exist at least two distinct points. There exist at least three points which are not on the same line.
- I-4. Through any three points, not on the same line, there is one and only one plane.

### Order

- II-1. If point  $B$  is between points  $A$  and  $C$ , then  $A, B, C$  are distinct points on the same line, and  $B$  is between  $C$  and  $A$ .
- II-2. For any two distinct points  $A$  and  $C$ , there is at least one point  $B$  on the line  $AC$  such that  $C$  is between  $A$  and  $B$ .
- II-3. If  $A, B, C$  are three distinct points on the same line, then only one of the points is between the other two.

**Definition** By the *segment*  $AB$  is meant the set of all points which are between  $A$  and  $B$ . Points  $A$  and  $B$  are called the *endpoints* of the segment. The segment  $AB$  is the same as the segment  $BA$ .

II-4. (Pasch's Axiom) Let  $A, B, C$  be three points not all on the same line and let  $m$  be a line in the plane  $A, B, C$  which does not pass through any of the points  $A, B, C$ . Then if  $m$  passes through a point of the segment  $AB$ , it will also pass through a point of segment  $AC$  or a point of segment  $BC$ .

**Note:** II-4'. This postulate may be replaced by the *separation axiom*. A line  $m$  separates the points of the plane which are not on  $m$ , into two sets such that if two points  $X$  and  $Y$  are in the same set, the segment  $XY$  does not intersect  $m$ , and if  $X$  and  $Y$  are in different sets, the segment  $XY$  does intersect  $m$ . In the first case  $X$  and  $Y$  are said to be on the *same side* of  $m$ ; in the second case,  $X$  and  $Y$  are said to be on *opposite sides* of  $m$ .

**Definition** By the *ray*  $AB$  is meant the set of all points consisting of those which are between  $A$  and  $B$ , the point  $B$  itself, and all the points  $C$  such that  $B$  is between  $A$  and  $C$ . The ray  $AB$  is said to *emanate from* the point  $A$ .

A point on a given line  $m$ , divides  $m$  into two rays such that two points are on the same ray if and only if  $A$  is not between them.

**Definition** If  $A, B$  and  $C$  are three points not on the same line, then the system of three segments  $AB, BC, CA$ , and their endpoints is called the *triangle*  $ABC$ . The three segments are called the *sides* of the triangle, and the three points are called the *vertices*.

### Congruence

III-1. If  $A$  and  $B$  are distinct points on line  $m$  and if  $A'$  is a point on line  $m'$  (not necessarily distinct from  $m$ ), there is one and only one point  $B'$  on each ray of  $m'$  emanating from  $A'$  such that the segment  $A'B'$  is congruent to the segment  $AB$ .

III-2. If two segments are each congruent to a third, then they are congruent to each other. (From this it can be shown that congruence of segments is an equivalence relation; i.e.,  $AB \equiv AB$ ; if  $AB \equiv A'B'$ , then  $A'B' \equiv AB$ ; and if  $AB \equiv CD$  and  $CD \equiv EF$ , then  $AB \equiv EF$ .)

III-3. If point  $C$  is between  $A$  and  $B$ , and  $C'$  is between  $A'$  and  $B'$ , and if the segment  $AC \equiv A'C'$  and the segment  $CB \equiv C'B'$ , then segment  $AB \equiv$  segment  $A'B'$ .

**Definition** By an *angle* is meant a point (called the *vertex* of the angle) and two rays (called the *sides* of the angle) emanating from a point.

If the vertex of the angle is point  $A$  and if  $B$  and  $C$  are any two points other than  $A$  on the two sides of the angle, we speak of the angle  $BAC$  or  $CAB$  or simply the angle  $A$ .

III-4. If  $BAC$  is an angle whose sides do not lie on the same line and if in a given plane,  $A'B'$  is a ray emanating from  $A'$ , then there is one and only one ray  $A'C'$  on a given side of line  $A'B'$ , such that  $\angle B'A'C' \equiv \angle BAC$ . In short, a given angle in a given plane can be laid off on a given side of a given ray in one and only one way. Every angle is congruent to itself.

**Definition** If  $ABC$  is a triangle then the three angles  $BAC, CBA$ , and  $ACB$  are called the angles of the triangle. Angle  $BAC$  is said to be *included* by the sides  $AB$  and  $AC$ .

III-5. If two sides and the included angle of one triangle are congruent, respectively, to two sides and the included angle of another triangle, then each of the remaining angles of the first triangle is congruent to the corresponding angle of the second triangle.

### Parallel axiom

IV-1. (Playfair's postulate) Through a given point  $A$  not on a given line  $m$  there passes at most one line, which does not intersect  $m$ .

### Continuity

V-1. (Axiom of Measure—Archimedes axiom) If  $AB$  and  $CD$  are arbitrary segments, then there exists a number  $n$  such that if segment  $CD$  is laid off  $n$  times on the ray  $AB$  starting from  $A$ , then a point  $E$  is reached, where  $n \cdot CD = AE$ , and where  $B$  is between  $A$  and  $E$ .

V-2. (Axiom of linear completeness) the system of points on a line with its order and congruence relations cannot be extended in such a way that the relations existing among its elements as well as the basic properties of linear order and congruence resulting from Axioms I-III and V-1 remain valid.

**Note:** V'. These axioms may be replaced by *Dedekind's axiom of continuity*. For every partition of the points on a line into two nonempty sets such that no point of either lies between two points of the other, there is a point of one set which lies between every other point of that set and every point of the other set.