PROBLEMATIKA PŘECHODU MEZI PRVNÍM A DRUHÝM STUPNĚM ZŠ

Při přechodu žáků se specifickými poruchami učení na 2. stupeň základní školy není třeba obávat se problémů, pokud si všechny zúčastněné strany (rodiče, učitel, speciální pedagog i žák) uvědomí, které aspekty je potřeba brát v úvahu a jak předcházet eventuelním problémům při zvládání matematiky.

Na úspěšnost žáků v matematice na 2. stupni má vliv mnoho faktorů. Především je třeba ověřit, zda výkony žáka v matematice jsou výrazně odlišné od výkonů v jiných předmětech a zda jsou v rozporu s úrovní inteligence žáka. Odborná vyšetření v pedagogicko-psychologické poradně jsou východiskem k další činnosti žáka v matematice. Také je třeba zjistit vliv dalších specifických poruch učení (zejména dyslexie a dysgrafie) na proces učení v matematice, neboť i tyto poruchy mohou ovlivnit úspěšnost žáků v matematice. Rovněž je nutné seznámit se s dříve prováděnými reedukačními cvičeními a pomůckami a s jejich úspěšností při orientaci žáků ve světě čísel. Sledování schopnosti logického uvažování žáka, používání jazyka matematiky i používání samotné matematiky jako nástroje k řešení praktických problémů (např. nákupy, využívání číselných údajů v běžném životě) a v neposlední řadě úroveň jeho matematických vědomostí je součástí analytické činnosti učitele matematiky.

Některé matematické pojmy je třeba připomenout, některé zopakovat, jiné vytvořit, některé upřesnit. V návaznosti na první stupeň je třeba sledovat přetrvávající problémy v rámci provádění operací s přirozenými čísly i v rámci geometrie.

Naše výzkumy a postupy předpokládají, že pracujeme se žáky, u kterých je diagnostikována dyskalkulie v pedagogicko-psychologické poradně, tj. žáky, kteří mají inteligenci v pásmu průměru až nadprůměru a mají problémy v některých částech matematického učiva. Dále předpokládáme, že žáci mají zájem se něčemu naučit, že jejich problémy nejsou způsobeny nedostatečnou přípravou nebo nezájmem o školní výuku.

Příčiny problémů žáků v matematice

Adaptace na odborné vyučování

Na prvním stupni základní školy se žáci setkávali s odborným vyučováním jednotlivých předmětů výjimečně. Vesměs většinu předmětů učí jedna paní učitelka nebo jeden pan učitel a žáci jsou po celou dobu vyučování fixováni na jednu osobnost. Na druhém stupni se tato situace mění, protože zpravidla každý předmět vyučuje jiný učitel. I když je ve třídě určen třídní učitel a i když matematika může mít během týdne více vyučovacích hodin, dětem chybí během dne „pevný bod“, kterým byl pedagog na 1. stupni. Někteří žáci si zvykají delší dobu na změnu učitele po jednotlivých vyučovacích hodinách.

Sociální zařazení ve třídě

V 6. ročníku základní školy se žák zpravidla dostává do nového kolektivu spolužáků a znovu si utváří své sociální zařazení mezi nimi. Vyváří se nové vztahy mezi učitelem a žáky. Pro žáka se specifickou poruchou učení nastává nová situace a je třeba sledovat, zda se nedostává do role outsidera nebo žáka, který je kritizován za eventuelní úpravu učebních postupů, požadavků či klasifikace. Zpravidla žák se specifickou poruchou učení musí vykonat mnohem více práce než jeho spolužáci. Jeho postavení v třídním kolektivu se někdy musí napomoci.

Změna stylu práce v matematice

Výuka matematiky na 2. stupni základní školy se poněkud odlišuje, neboť na prvním stupni jsou metody a formy práce rozmanitější – využívá se ve větší míře her, práce ve skupinách, činností na koberci apod. Na druhém stupni začíná převažovat výuka v tradičním pojetí, někdy jsou přísnější podmínky a náročnější požadavky pro klasifikaci žáků, apod. Navíc přibývá mnoho nových pojmů, které jsou abstraktní a kterým by měl žák porozumět.

Zvýšené požadavky na samostatnost žáka

Předpokládá se větší samostatnost žáků při plnění běžných povinností ve škole i v matematice, např. starost o pomůcky (pero, které píše, ořezaná tužka pro rýsování, trojúhelník, funkční kružítko, sešit), samostatnost v rozhodování, ve schopnosti dokončit práci, samostatnost v organizaci práce i času apod.

Zvýšené požadavky na časové zvládnutí úkolů

Zvyšují se požadavky na pracovní tempo žáků, předpokládá se, že řada poznatků je zautomatizovaná, což u dětí se specifickými poruchami učení v matematice zpravidla není, a tak jim časový faktor činí velké problémy.

Vztah k matematice

Vztah žáků k matematice se utvářel již pět roků na 1. stupni základní školy ať již v pozitivním či negativním smyslu a s tímto vztahem přicházejí žáci na druhý stupeň. Ze zkušeností i z vyjádření mnoha studentů je nejvýznamnějším činitelem, který utváří vztah k matematice, právě učitel matematiky. Vztah se odvíjí také od toho, jak je žák v matematice úspěšný, jak se mu daří. Pedagogickým mistrovstvím učitele matematiky je budovat kladný vztah k matematice i u žáků, kteří mají s matematikou problémy.

Zvýšené požadavky na zobecňování a abstrakci

Postup vytváření pojmů v matematice má přesnou poznatkovou strukturu od činností s konkrétními, izolovanými modely přes modely univerzální až po abstraktní znalosti (např. Hejný 2009, s. 128 a další). Proces zobecňování vyžaduje určitou úroveň přemýšlení. Cílem pak je vytvoření obecnějších, abstraktních poznatků a radost z objevu, že určitý poznatek platí vždy.

Zvýšené požadavky na schopnost aplikovat učivo k řešení úloh

Schopnost aplikace zvládnutého učiva je v matematice nepřetržitý proces a úrovně aplikací se neustále zvyšují. Například nejprve se automatizují pamětné spoje základních početních operací s přirozenými čísly, ty se aplikují v písemných algoritmech, a dále se aplikace pamětného i písemného počítání vyžívají v řešení slovních úloh, kdy by měl žák uvědoměle volit početní operace potřebné k řešení slovní úlohy. Další aplikace souvisejí s řešením praktických úloh běžného života a profesního zaměření.

Neadekvátní způsob výuky vzhledem k poruše žáka

Pro žáky se specifickými poruchami učení je třeba hledat vhodné výukové postupy, kterým porozumí. Zpravidla je nutné učivo atomizovat, naučit nejelementárnější postupy, sledovat chyby žáků a didakticky je využívat. Výuka musí být zbavena jakéhokoliv formalismu, vysvětlovány by měly být všechny elementární jevy, aby žák učivo nejprve pochopil a teprve potom pamětně zvládnul. Málo vhodné jsou soutěže, ve kterých hraje roli rychlost (např. zamrzlík).

Úroveň motivace

Klíčovým faktorem pro práci se žáky se specifickými poruchami učení je jejich motivace. Žáka, který nevidí smysl učení, považuje výuku matematiky za zbytečnou, poznatky za nepotřebné, nebo který nemá o učení zájem, není možné čemukoliv naučit. K tomu, aby výuka matematiky byla úspěšná, je vždy třeba vlastní aktivity žáka. V matematice máme mnoho možností, jak žákům ukázat její krásu, avšak vždy musí být žákům srozumitelná. Výrazným motivačním faktorem je úspěch žáka nebo pochvala.

Nezvládnutí učiva nižší úrovně

Matematika je specifický vyučovací předmět v tom smyslu, že každý prvek nižší úrovně je nezbytným předpokladem zvládnutí prvků vyšší úrovně. Pokud má dítě nedostatky z nižších ročníků, je tomu třeba přizpůsobit další výuku. Je třeba vypracovat systém opakování potřebného učiva a rozhodnout, které učivo matematiky je pro žáka nezbytné a s kterým učivem se může seznámit pouze orientačně. Rovněž je třeba zvážit používání kompenzačních pomůcek a vhodných metod práce. Žáci se specifickými poruchami učení neumí zpravidla v 6. ročníku sčítat a odčítat s přechodem přes základ deset, neumí základní spoje násobení a dělení, nezvládají písemné algoritmy, nechápou význam mnoha pojmů, aj. Je nutné zvážit, jak se budou postupně nedostatky doplňovat a zda neustálé opakování učiva prvního stupně přináší nějaký pokrok. V rámci individuálního vzdělávacího programu se stanoví zvládání učiva po malých krocích a s aktivní účastí žáka.

Klasifikace v matematice

V hodnocení žáků se specifickou poruchou učení je nutné volit hodnocení pozitivní, neboť žák zpravidla musí vykonat mnohem více práce než jeho spolužáci, i když výsledky nemusí být zpočátku dobré. Podstatné je naučit žáka pracovat s chybou a hodnotit každý krok práce, nejen závěrečný výsledek. Používáme spíše optimistickou „křivku tvaru L“ (Slavík 1999, s. 58), kdy si všímáme úspěšných řešení a potlačujeme příznaky špatného výkonu. Pozitivní motivace žáka prostřednictvím hodnocení a klasifikace je v tomto případě důležitější než bezchybný výkon. Pokud není žák motivován negativně, jeho výkon se začne postupně zlepšovat a pak můžeme přistoupit k objektivnějšímu hodnocení vzhledem k ostatním žákům.

Využíváni kompenzačních pomůcek

Pokud dítě používalo na 1. stupni jako kompenzační pomůcku kalkulátor, není možné ji v 6. ročníku neposkytnout. Je však možné, vzhledem k jeho schopnostem, dohodnout se na tom, které výpočty může provádět bez kalkulačky a které s kalkulačkou (zejména v tématu Desetinná čísla). Často se jako kompenzační pomůcka nabízí tabulka násobků, avšak je nutné si uvědomit, že používáním tabulky se žák násobilku nenaučí. Setkáváme se i se žáky, kteří odmítají nabízenou kompenzační pomůcku, aby nebyli v kolektivu spolužáků odlišní. Někteří žáci využívají k operacím s celými čísly modely číselné osy, další využívají mřížek k převodu jednotek měr apod. Kompenzační pomůcky by vždy měly žáku přinést usnadnění výpočtů a měly by být žákem vlídně přijaty a s porozuměním používány. Vzhledem k tomu, že na druhém stupni jsou žáci věkově starší než na stupni prvním, mnoho kompenzačních postupů si vypracují sami a snaží se svůj handicap řešit pomocí vlastních postupů. Např. setkali jsme se s holčičkou, která si v každém sešitě matematiky na poslední straně narýsovala číselné osy a mnoho operací si úspěšně ukazovala právě na osách.

OSOBNOST UČITELE MATEMATIKY

Je obecně známou skutečností, že jedním z nedůležitějších činitelů v práci se žáky se specifickými poruchami učení je osobnost učitele.

Na otázku: „Vzpomínáte si na některého učitele matematiky?“ studenti vysoké školy odpovídali:

- *Můj vztah k matematice se odvíjel od práce pedagoga.*
- *Učitelka byla přísná, trpělivá, neustále nám vysvětlovala, stále dokola, až to všichni pochopili.*
- *Velký vliv na mě měla paní učitelka, která přistupovala ke všem stejně – k méně nadaným stejně jako k nadaným. Měla zájem na tom, aby všichni všechno pochopili a tak nás povzbuzovala a chválila.*
- *Hodně mě ovlivnil učitel matematiky, který hodně využíval názorné pomůcky, výborně nás motivoval a měl k nám pěkný přístup.*
- *Učitelka se s námi nepárala. Byla netrpělivá a nevlídná.*
- *Nenašel se učitel, který by měl pochopení pro mé problémy a který by mě dokázal zaujmout.*
- *Učitelka pořád psala něco na tabuli, byla to kvanta pouček a vzorců. Neustále jsme slyšeli: „Kdo nestíhá, opíše si to o přestávce a doma se to naučí.“*
- *Na ZŠ jsme měli učitelku matematiky, která nerespektovala jakékoliv zvláštnosti a problémy žáků (dyslektici, dysgrafici, méně nadaní žáci), neustále poukazovala na jejich neschopnost a hloupost. Vždy nám ukázala postup řešení a jedině ten uznávala, žádný jiný postup, byť správný, nebyl brán v potaz.*
- *Myslím, že osobnost učitele hraje základní roli ve vztahu k danému předmětu.*

- *Myslím, že jsem nebyl tak hloupý, mám dobrou hlavu, ale ve škole to nějak nepoznali.*

Rozhodujícím činitelem ve výukovém procesu, i přes veškeré moderní technologie vyučování, je učitel, v tomto případě učitel matematiky. Práce učitele se žáky s dyskalkulií a dalšími poruchami učení v matematice je z 90 % přemýšlení, jaké vhodné metody a formy práce zvolit, aby byly pro žáky efektivní. Musí respektovat výraznou individualitu každého žáka se specifickou poruchou učení, zpracovat funkční individuální program, reagovat na potřebu okamžité pomoci pro žáky apod. Tato práce učitele však není příliš viditelná pro ostatní a také vynaložená námaha nemusí odpovídat výsledkům žáků. Práce učitele je v tomto případě velmi málo doceňována.

Na úspěšnou práci, se žáky se specifickými poruchami učení, má vliv, mimo jiné, úroveň kompetencí učitele. Jde zejména o (volně podle Průchy, 1997):

- Kompetence odborně předmětové. Učitelovy odborné znalosti jsou nezbytné k tomu, aby uměl jasně a srozumitelně budovat matematické pojmy u žáků s poruchami učení, učil je nejen, jak se co dělá, ale také proč se to tak dělá. Učitel vytváří jednotlivé pojmy a je důležité, aby se zaměřil na obsah jednotlivých pojmů, nikoliv jen na formální poznatky.

- Kompetence didaktické. Učitel hledá vhodné didaktické transformace matematického učiva tak, aby bylo srozumitelné žákům příslušného věku a příslušné úrovně matematických schopností, avšak didaktické transformace nesmí být v rozporu s vědeckou správností. Hledá vhodné metody a formy práce adekvátní pro žáky s poruchami učení v matematice, volí vhodné motivace, aby se žáci matematice chtěli učit. Pro žáky se specifickými vzdělávacími potřebami jsou i metody a formy práce specifické a individuální. Učitel realizuje individuální a individualizovanou výuku matematiky.

- Kompetence pedagogicko-psychologické. Pro žáky se specifickými poruchami učení v matematice je třeba prokázat vysoký stupeň empatie a schopnost vcítit se do myšlenkových pochodů žáka. Dále je třeba zajistit vhodné podmínky pro výuku, jako je např. příznivé klima k práci, respektování procesu učení žáků, věkové a mentální zvláštnosti žáků apod. Vlídnost, trpělivost, pozitivní očekávání, absence formalismu, jsou nezbytnou vybaveností učitele.

- Kompetence komunikativní. Komunikace v matematice je poněkud složitější, neboť se odehrává v komunikaci verbální, symbolické, grafické obrazově názorné apod. Probíhá jednak komunikace se žákem na úrovni lidské, jednak komunikace na úrovni učitel – žák a měla by splňovat požadavky komunikace kulturních osobností. Komunikace v oblasti matematiky se realizuje prostřednictvím textu, symbolů, obrázků, grafů aj. a poskytuje žákům ty prostředky, kterým nejlépe porozumí (podrobněji Blažková 2009, s. 92).

- Kompetence organizační a řídicí. Učitel by měl žákům se specifickými poruchami učení stanovit určitý řád a systém práce, organizovat proces učení tak, aby žák nebyl ani přetěžován dlouhým nefunkčním doučováním, ale také aby nebyl nedoceněn. Drobná každodenní práce přináší pozitivní výsledky.

- Kompetence diagnostická. Učitel provádí diagnostiku žákových matematických znalostí a na základě získaných poznatků volí další postupy. Jednak využívá diagnostiky specializovaného pracoviště, jednak provádí neustálou diagnostiku úrovně matematických vědomostí i žákových problémů. Analyzuje příčiny jeho potíží a hledá postupy, které mu mohou pomoci.

- Kompetence poradenská, konzultativní. Nejúčinnějším prostředkem je poradit žákovi v okamžiku, kdy pomoc potřebuje a kdy o ni má zájem. Poradenská a konzultativní činnost učitele je nutná i ve směru k rodičům.

- Kompetence reflexe vlastní činnosti. Na základě analýzy své práce se žáky se specifickými poruchami učení získává nové poznatky a zkušenosti pro další své působení, vyvozuje závěry a možnosti pro zobecnění svých postupů ve výuce matematiky.

Aby byl učitel při práci se žáky se specifickými poruchami učení při výuce matematiky úspěšný, ukáže žákům, že matematika souvisí s objevováním, s možností o všem se přesvědčit, vše si osahat, je vstřícný, umí žáky vhodně motivovat, nadchnout a zaujmout. Žáci mu rozumějí, jeho vyučovací hodiny jsou veselé, plné pohody, dokáže vymýšlet příběhy a dopřát žákům zážitky. Naopak, pokud jeho výklad je nudný, rychlý, žáci s poruchou učení mu nestačí. Přísného a nevstřícného učitele se bojí zeptat, když něčemu nerozumí. Učitel, který se neusměje, nezná pochvalu, je pro žáky málo přínosný.

1 ČÍSLO A PROMĚNNÁ

Přirozená čísla a operace s nimi jsou obsahem výuky 1. stupně ZŠ, avšak veškeré problémy, které mají žáci v oboru přirozených čísel, se projeví i v dalších číselných oborech. Na druhém stupni ZŠ se obor přirozených čísel rozšiřuje na čísla racionální, avšak postupně. Nejprve se žáci seznámí s čísly desetinnými, poté se zlomky a s čísly zápornými. Je třeba si uvědomit, že žádné z těchto témat není jednorázovým učivem, avšak jedná se o dlouhodobý proces vytváření těchto pojmů v podstatě od předškolního věku. Problémy žáků se specifickými poruchami učení se prohlubují, pokud není věnována dostatečná pozornost vybudování každého z pojmů v poznatkové struktuře žáka a pojmy se budují pouze formálně. Také neřešené problémy, které se projevují v oboru přirozených čísel, se dále přenášejí do oboru čísel racionálních. O projevech a příčinách problémů žáků v matematice na prvním stupni je podrobně pojednáno v monografii Dyskalkulie a další poruchy učení v matematice (Blažková 2009). V další části se zaměříme podrobněji na písemné algoritmy v oboru čísel přirozených a na další číselné obory.

1.1 Písemné algoritmy operací s přirozenými čísly

Během školní docházky si dítě postupně osvojuje přirozená čísla na základě manipulativní činnosti s konkrétními předměty a postupně se od konkrétních předmětů odpoutává a začíná pracovat s číslem jako s abstraktním pojmem. Učí se přirozená čísla číst, zapisovat, uspořádat podle daného kritéria, provádět operace s přirozenými čísly zpaměti i písemně. Procesu budování pojmu přirozeného čísla a přechodu od konkrétních modelů k abstraktnímu chápání je věnována dostatečná pozornost. Úspěšné zvládnutí pamětného sčítání a odčítání vyžaduje kromě zapamatování si základních spojů sčítání a odčítání v oboru do deseti i přesné postupy rozkladů čísel pro počítání s přechodem přes základ deset, rozkladů čísel na desítky a jednotky a respektování správných metodických postupů. Rovněž znalost základních spojů násobení a dělení v oboru násobilek je nezbytným předpokladem pro práci v matematice na 2. stupni ZŠ.

Algoritmy písemných operací v oboru přirozených čísel, které se v 6. ročníku završují, vyžadují jednak schopnost provádět přesný postup jednotlivých kroků, jednak kladou požadavky na krátkodobou i dlouhodobou paměť. I když dítě zvládá pamětné spoje operací sčítání, odčítání, násobení a dělení, může mít v dalším učivu potíže vyplývající z koordinace činností při provádění operací písemných. Pro dítě s dyskalkulií se po velké námaze zvládnutí určitého úseku učiva objevují úskalí v dalším učivu. Algoritmy písemných operací mohou způsobovat dětem problémy, z nichž některé uvádíme:

1.1.1 Písemné sčítání

a) nesprávný zápis čísel pod sebe – dítě nerespektuje zápis čísel jednotlivých řádů pod sebou:

```
 365       826
  72       1949
1085      10209
```

b) nepochopení podstaty desítkové soustavy a zápisu čísel v poziční desítkové soustavě:

```
 67      8 + 7 = 15, zapíše do součtu jednotky i desítky čísla 15
 28      2 + 6 = 8
815
```

c) nepochopení algoritmu sčítání – přičítání částečných součtů:

```
 358     8 + 4 = 12, zapíše 2 pod jednotky a pokračuje 12 + 8 + 5 = 25,
 184     zapíše 5 a pokračuje 25 + 1 + 3 = 29
2952
```

d) sčítá všechna čísla bez ohledu na řády:

53	počítá 7 + 3 = 10, napíše 0, pokračuje 10 + 5 = 15, 15 + 8 = 23
87	zapíše 23
230	

e) částečně sčítá zpaměti, částečně písemně, nerespektuje přechod přes desítku:

532 + 8 = 5310	počítá 8 + 2 = 10, ostatní čísla opíše
713 + 7 = 71310	7 + 3 = 10, opíše celého prvního sčítance
23 + 35 = 5800	5 + 3 = 8, 3 + 2 = 5, připíše dvě nuly, protože obě čísla mají dohromady 4 číslice
230 + 350 = 5800	5 + 3 = 8, 3 + 2 = 5, dvě nuly z obou sčítanců připíše.

1.1.2 Písemné odčítání

a) nepochopí odčítání s přechodem přes základ 10 (vždy odčítá od většího čísla menší, jako by počítal 58 − 22):

52	počítá: 2 − 8 nejde, tak si upraví, aby mohl odčítat a počítá 8 − 2 = 6
−28	5 − 2 = 3
36	

b) odčítá „shora“ – připisuje 1, nerespektuje řádně přechod:

1	
163	počítá: 13 − 9 = 4, 6 − 2 = 4
−129	
44	

Tento postup vede u víceciferných čísel a čísel s nulami k absurdním výsledkům, např.:

1111	
70205	počítá: 15 − 7 = 8, 10 − 6 = 4, 12 − 9 = 3, 10 − 8 = 2
−8967	7 sepíše
72348	

nevadí mu, že rozdíl je větší než menšenec.

c) počítá jako zpaměti – rozkládá menšence i menšitele:

624 − 188 = 564 počítá: 600 − 100 = 500,
24 − 88 nejde, tak počítá 88 − 24 = 64,
500 + 64 = 564

d) část příkladu odčítá, část sčítá – nepamatuje si po celou dobu příslušnou operaci (zejména při odčítání s přechodem, kdy jednu desítku přičítá k menšiteli):

$$\begin{array}{r} 43 \\ \underline{-\ 26} \\ 77 \end{array}$$

počítá: 6 + ? = 13, 6 + 7 = 13, zapíše 7
1 + 2 + 4 = 7

1.1.3 Písemné násobení

Algoritmus písemného násobení vyžaduje koordinaci mnoha činností, které kladou nároky na psychiku žáka – neboť musí zvládnout postup provádění jednotlivých úkonů (které číslo kterým násobit), zvládnout schéma zápisu (kam který součin zapsat), využít dlouhodobé paměti, neboť si musí vybavit základní správně desítky přičíst. To vše musí být koordinováno tak, aby všechny tyto činnosti bezchybně zvládl. Pokud se žáci zaměří na správnost násobilek, zpravidla nezvládnou správný zápis algoritmu, pokud se zaměří na správný zápis, chybují v násobilkách.

a) násobí jednotky jednotkami, desítky desítkami – přenášejí postup z písemného sčítání:

$$\begin{array}{r} 42 \\ \underline{.\ 23} \\ 86 \end{array}$$

počítá 3 . 2 = 6
2 . 4 = 8

nebo

$$\begin{array}{r} 48 \\ \underline{.\ 39} \\ 1272 \end{array}$$

počítá 9 . 8 = 72
3 . 4 = 12

b) píše částečné součiny do jednoho řádku, nezvládá sčítání s přechodem:

$$\begin{array}{r} 42 \\ \underline{.23} \\ 84126 \end{array}$$

násobí: 3 . 2 = 6, 3 . 4 = 12
2 . 2 = 4, 2. 4 = 8

c) násobí pamětně jednotlivá čísla prvního činitele a součiny sečte:

2452 . 4 násobí:

$$\begin{array}{r} 4 . 2 = 8 \\ 4 . 5 = 20 \\ 4 . 4 = 16 \\ \underline{4 . 2 = 8} \\ 52000 \end{array}$$

všechny částečné součiny sečte a doplní tolik nul, kolik mají oba činitelé dohromady cifer.

d) nezapisuje správně součiny pod sebe:

$$\begin{array}{r} 536 \\ \underline{.\ 27} \\ 3752 \end{array}$$

nebo

$$\begin{array}{r} 137 \\ \underline{.\ 124} \\ 548 \end{array}$$

při násobení desítkami nebo stovkami neumí správně zapsat příslušné součiny v řádcích (posunout doleva)

```
 1072         274
 4824         137
              959
```

e) neumí počítat s čísly, ve kterých se vyskytují nuly:

```
307  násobí jako  37    nebo    361  násobí jako  361
.  6               . 6          .704               . 74
222                             1444
                               2527
                               26714
```

1.1.4 Písemné dělení

Algoritmus písemného dělení je nejnáročnější operací, neboť jsou zde integrovány všechny operace, které se doposud dítě naučilo a jednak jeho postup je odlišný od ostatních písemných operací – začíná se počítat od nejvyššího řádu dělence, zatímco všechny ostatní uvedené písemné operace se začínají počítat od jednotek (nejnižšího řádu). Klade nároky na úspěšné zvládnutí dělení se zbytkem, násobení, odčítání, sčítání, dále pak na krátkodobou i dlouhodobou paměť, vytvoření hypotéz a ověření jejich správnosti a zvládnutí složitého schématu zápisu čísel.

a) nezvládá dělení se zbytkem:

```
    628 : 9 = 72      počítá  62 : 9 = 7, zbytek 1 (vidí nejblíže vyšší násobek
a jako zbytek
     18                                           uvádí to, co do něj chybí)
      0
```

b) zapisuje chybně částečné zbytky:

```
    3164 : 8 = 3895
    71
     76
      44
       5
```

c)neumí počítat s čísly s nulami (v dělenci, děliteli i podílu):

421421 : 7 = 623 nebo 560 : 8 = 7

30 00 : 150 = 20   8 000 : 8 = 100   1000 : 200 = 50

d) začíná dělit od nižších řádů – jednotek nebo desítek:

568 : 8 = 17 dělí 8 : 8 = 1, 56 : 8 = 7 nebo 1025 : 5 = 52 dělí 25 : 5 = 5, 10 : 5 = 2

Reedukace

Reedukační cvičení pro zvládnutí algoritmů písemných operací vycházejí z velmi jemných metodických řad nácviku jednotlivých algoritmů a respektování přesných metodických postupů při vyvozování jednotlivých operací. Podrobné postupy a vhodné metodické řady úloh jsou uvedeny např. Blažková a kol. 2007. Dále je třeba neustálého opakování pamětných spojů operací, protože ty jsou pro písemné operace nezbytné. Pokud dítě používá tabulky součtů nebo tabulky násobků uvědoměle, je možné mu je nabídnout. Je však třeba si uvědomit, že používáním tabulek se žák pamětné operace nenaučí.

Osvědčuje se používání čtverečkovaných sešitů, kdy žák může zapisovat čísla do sloupců správně pod sebe. Některým žákům vyhovuje barevné vyznačení jednotlivých řádů.

Důležité je respektovat, že u písemných algoritmů nejde zdaleka jen o výpočty, ale jde o rozvoj mnoha psychických funkcí žáka i jeho koncentraci. Žáci mohou zvládat bezpečně všechny základní spoje sčítání, odčítání, násobení, dělení a přesto mohou být v matematice od 6. ročníku neúspěšní. Správná diagnostika příčin problémů napomůže stanovení reedukačních cvičení, která jsou velmi individuální. Z uvedených příkladů je patrné, že pokud se u žáků projevuje specifická porucha učení, může jejich trápení usnadnit používání kalkulátoru, eventuelně procvičování operací s přirozenými čísly vhodnými počítačovými výukovými programy. Kalkulátor nebo počítač je výrazným motivačním prostředkem a prostřednictvím jejich možností mohou žáci kouzlo čísel objevit.

1.2 Desetinná čísla

Případová studie

Šárka je žákyně 6. ročníku. Na prvním stupni měla diagnostikovanou dyskalkulii, největší problémy činily operace s přirozenými čísly. Při počítání s čísly desetinnými se projevují problémy při pamětném sčítání a odčítání a přechodem přes základ 10:

4,6 + 8,9 = 12,15 – sčítá zvlášť část celou a část desetinnou,

2,8 + 0,06 = 2,14 – sčítá čísla nestejných řádů 8 + 6 = 14,

9,3 − 3 = 6 – odčítá čísla nestejných řádů,

6,4 − 5,9 = 1,5 – odčítá vždy od většího čísla číslo menší, 6 − 5 = 1, 9 − 4 = 5, *5,3 − 0,25 = 5,22 – odčítá čísla nestejných řádů a navíc od většího čísla číslo menší, 5 − 3 = 2.*

Individuální práce se Šárkou a analýza jejích chyb odhalila, že Šárka nemá představu o desetinném čísle a jednotlivých řádech. Bylo potřeba nejprve vybudovat základní pojmy a teprve potom s čísly provádět operace. Manipulativní činnost a geometrická prezentace desetinného čísla (zejména vybarvování) byla pro Šárku inspirativní.

1.2.1 Numerace v oboru desetinných čísel

V návaznosti na přirozená čísla se zavádějí čísla desetinná. Tak, jak je věnována pozornost zavedení čísel přirozených, tak je nutné správné vyvození čísel desetinných. Pokud se žák dozví, že desetinné číslo je číslo, které má desetinnou čárku, je to pro něj informace naprosto nulová. Pojem desetinného čísla musí být vybudován stejně důkladně, podobně jako pojem čísla přirozeného. Výhodou je časté využívání desetinných čísel v běžném životě a tedy motivační příklady mohou této skutečnosti využívat. Je však nutné vybudovat "most" mezi čísly užívanými v běžné životní praxi a čísly v matematických úlohách. Mnoho žáků, kteří běžně desetinná čísla používají v běžném životě, např. při nákupech nebo ve sportu, při řešení školních úloh selhávají. Výchozím pojmem pro vytvoření pojmu desetinného čísla je pojem zlomku jako části celku, následuje desetinný zlomek a poté desetinné číslo. Schematicky znázorněno:

zlomek jako část celku

desetinný zlomek

desetinné číslo

Již dítě v mateřské škole chápe intuitivně pojem zlomku jako části celku – ví, co je polovina rohlíku, polovina nebo čtvrtina jablíčka, polovina nebo čtvrtina krajíce chleba a na toto je třeba navazovat.

Metodické postupy vyvození zlomku jako části celku se opírají o manipulativní činnosti – překládání čtverců, kruhů, obdélníků na několik stejných částí.

Např. úkol „přeložte čtverec na čtyři stejné části“ mohou děti řešit tak, že papír přeloží na 4 shodné trojúhelníky nebo na 4 shodné čtverce nebo na 4 shodné obdélníky a uvědomí si, na kolik stejných částí dělily.

Další činnost souvisí s vybarvováním:

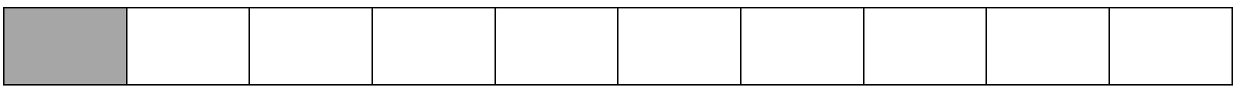
Vybarvěte jednu část čtverce. Zápis zlomku se provádí od jmenovatele:

Na kolik stejných částí jsme rozdělili čtverec – na čtyři. Kolik částí čtverce jsme vybarvili – jednu část. Jak zapíšeme, že jsme vybarvili jednu část ze čtyř? Pomocí zlomku.

zápis: $\frac{1}{4}$

Vysvětlí se pak význam jmenovatele a čitatele.

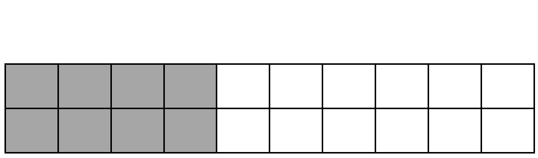
V návaznosti na tyto činnosti se buduje pojem desetinného zlomku (nejprve desetiny, potom setiny), tj. zlomku, v jehož jmenovateli je některá z mocnin čísla deset. Např. žáci řeší úkol rozdělit obdélník na 10 stejných částí a jednu část vybarvit.

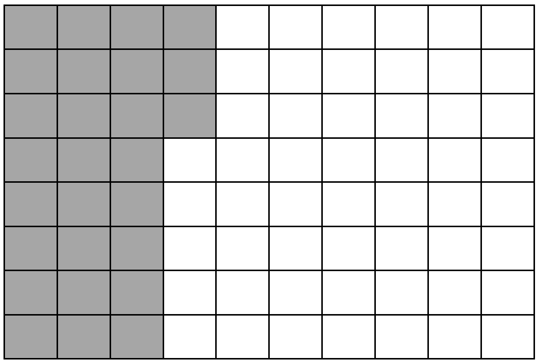


Jedna část je jedna desetina obdélníku, zapíšeme ji jednak pomocí zlomku $\frac{1}{10}$, jednak pomocí desetinného čísla 0,1.

Postupně vybarvujeme např. dvě desetiny, pět desetin, sedm desetin, deset desetin, dvanáct desetin obdélníku a zapisujeme jak zlomkem, tak desetinným číslem.

Analogicky vyvozujeme setiny – zvolíme čtverec (nebo obdélník), který má sto stejných čtverečků (nebo obdélníků), jeden čtvereček (obdélník) je jedna setina čtverce (obdélníku). Vhodný je čtverečkovaný papír. Vybarvujeme např. pět setin, dvanáct setin, dvacet setin, sedmdesát pět setin, sto setin atd.





Na obrázku je vyznačeno $\frac{35}{100}$ obdélníku.

Číslo $\frac{35}{100}$ zapíšeme pomocí desetinného čísla 0,35.

Podobně se učíme zapisovat další desetinná čísla, např.:

$\frac{1}{100} = 0{,}01$ $\frac{5}{100} = 0{,}05$ $\frac{50}{100} = 0{,}50$ $\frac{105}{100} = 1{,}05$

Tento postup usnadní pochopení desetinného čísla a jeho zápisu. Děti mívají nejčastější problémy se zápisem desetinného čísla, protože nevědí, na které místo za desetinnou čárku zapsat příslušnou číslici. Např. 0,12 chápou jako dvanáct desetin (správně 1,2), 0,012 jako dvanáct setin (správně 0,12) apod. Při porovnávání desetinných čísel se často projevuje nesprávný transfer z oboru přirozených čísel (větší číslo má ve svém zápisu větší počet číslic), takže např. 9,3 < 1,27, protože má méně číslic, podobně 0,448 > 0,45. Při porovnávání desetinných čísel má někdy dominantní postavení číslice 9 (nebo 8), např. 12,01 < 9,78

Problémy mají děti i se zaokrouhlováním desetinných čísel. Při zaokrouhlování desetinných čísel se žáci řídí analogickými pravidly, jako při zaokrouhlování čísel přirozených, avšak jiná je situace s nulami na desetinných místech, což činí žákům problémy.

Číslo 12,97 zaokrouhlené na desetiny je 13,0, zaokrouhlené na jednotky je 13. Chybné je 13,00, neboť toto číslo by udávalo přesnost na setiny. Časté chyby žáků spočívají v tom, že pracují pouze s aktuálními řády, které mají při zaokrouhlování význam a ostatní čísla opíší, např. 7,429 zaokrouhlí na desetiny jako 7,409, číslo 248,26 zaokrouhlí na stovky jako 200,26.

1.2.2 Operace s desetinnými čísly

Při provádění pamětných operací s desetinnými čísly se projevují problémy analogické problémům s čísly přirozenými.

a) děti sčítají nebo odčítají čísla nestejných řádů, např.
$0{,}2 + 0{,}03 = 0{,}5$ nebo $0{,}80 - 0{,}05 = 0{,}3$

b) nerespektují přechod mezi řády, např.
$2{,}6 + 4{,}9 = 6{,}15$ $6{,}3 - 3{,}9 = 3{,}6$

c) zaměňují zápis čísla a operaci sčítání, např.:
$0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}33$ nebo $1{,}1 + 1{,}1 = 11{,}11$

d) nechápou podstatu poziční desítkové soustavy, např.
$0{,}7 + 0{,}3 = 0{,}10$ nebo $0{,}02 + 0{,}08 = 0{,}010$

e) nepochopí podstatu násobení desetinných čísel, např.
$0{,}3 \,.\, 0{,}6 = 1{,}8$ nebo $0{,}2 \,.\, 0{,}3 = 0{,}6$

f) při písemných operacích neumí zapsat čísla správně pod sebe nebo čísla „sepisuje“, např.

$$\begin{array}{r} 32{,}65 \\ \underline{+\ \ 8{,}3\ \ } \\ 112{,}95 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{r} 81{,}3 \\ \underline{-\,6{,}55} \\ 1{,}58 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{r} 86 \\ \underline{-\,21{,}7} \\ 65{,}7 \end{array} \quad \text{sedm sepíše}$$

g) nerespektují poziční desítkovou soustavu (např. pracuje zvlášť s desetinnou částí a s celou částí čísla):

$$\begin{array}{r} 5{,}6 \\ \underline{.\ 3{,}7} \\ 15{,}42 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{r} 20{,}4 \\ \underline{+\ \ 9{,}8} \\ 29{,}12 \end{array}$$

h) zaměňují algoritmy operací, např.:

$$\begin{array}{r} 6{,}8 \\ \underline{-\,2{,}3} \\ 3{,}5 \end{array} \qquad \text{počítají } 8 - 3 = 5,\ 6 - 3 = 3$$

$$\begin{array}{r} 4{,}9 \\ \underline{.\ 3{,}7} \\ 97{,}73 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{počítají } 7 \,.\, 9 = 63,\ 3 \text{ zapíší},\ 6 + 7 = 13,\ 13 + 4 = 17,\ 7 \text{ zapíší} \\ 3 \,.\, 9 = 27,\ 7 \text{ zapíší} \\ 2 + 3 = 5,\ 5 + 4 = 9 \end{array}$$

oddělí desetinnou čárkou 2 desetinná místa.

Na několika příkladech je ilustrována problematika provádění operací s desetinnými čísly. Další škála problémů vzniká při násobení a dělení desetinných čísel deseti, stem, tisícem a toto se pak projevuje zejména při převádění jednotek měr. Pouhé uvedení pouček o posunu desetinné čárky nevytváří představu změny čísla (jeho zmenšení nebo zvětšení desetkrát, stokrát, …) Problematika dělení desetinných čísel jak pamětného, tak písemného vyžaduje zvládnutí všech dříve probíraných operací a navíc pochopení složitějšího mechanismu než u čísel přirozených.

Reedukace

Reedukační cvičení vyžadují stálé doplňování dříve nezvládnutého učiva a jeho aktivní uplatňování v oboru čísel desetinných:

- neustálé opakování pamětných operací s čísly přirozenými,
- posilování pochopení desetinných čísel a jejich praktického významu,
- uplatňování zákonitostí písemných algoritmů,
- počítání s čísly nejprve v řádu desetin a setin,
- využívání aplikačních úloh, ve kterých pracujeme s desetinnými čísly, např. zápis sportovních výkonů žáků, zápis jejich výšky v metrech, ceny zboží aj.

Pokud se přes veškerou snahu nedaří operace s desetinnými čísly zvládat, použijeme kompenzačních pomůcek, v tomto případě nejčastěji kalkulátoru. Potom je třeba dbát na správné zobrazení desetinného čísla na displeji kalkulátoru.

1.3 Celá čísla

Případová studie

Marek je žák 8. ročníku základní školy. V pedagogicko-psychologické poradně mu byla diagnostikována dyskalkulie. Při diagnostice jeho matematických problémů bylo zjištěno, že vůbec nechápe podstatu operací s přirozenými čísly, nejsou mu jasné pojmy součet, rozdíl, součin, podíl. Nechápe *čísla sudá, lichá, pojem mocniny. Nyní se má orientovat v oboru čísel celých a provádět operace s čísly celými. Největší problémy mu činila znaménka při odčítání celých čísel.*

Bylo třeba řešit základní otázky:

- Jaké postupy volit, aby byl Marek úspěšný při počítání s celými čísly, zejména s čísly zápornými.
- Jaký model záporného čísla poskytnout.
- Do jaké míry doplňovat učivo z nižších ročníků, které neovládá.
- Do jaké míry redukovat učivo 8. ročníku ZŠ.

1.3.1 Pojem záporného čísla

Se zápornými čísly se děti setkávají v běžném životě mnohem dříve, než se stanou matematickým učivem, a to např. při měření teploty, označení pater ve výtahu pod přízemím, vyznačení hladiny vody v řece apod. Východiskem ke správnému pochopení záporných čísel a jejich zařazení do systému celých čísel je vhodná motivace, která nemusí právě souviset s matematikou. Kromě zmíněné teploty a označení podzemních pater ve výtahu jde např. o historii, kdy uvádíme data před naším letopočtem, o geografii, kdy se uvádějí hloubky pod hladinou moře, dluhy ve financích aj. I když se tato čísla v praxi vyjadřují číslem přirozeným s dalším slovním vyjádřením, např. 560 let před naším letopočtem se na číselné ose znázorní jako číslo −560. Podobně dluh 500 Kč je znázorněn jako číslo −500. Také se žáci setkávají s úlohami, kdy mají odčítat větší číslo od menšího, např. 7 − 12. Správná motivace a znázornění čísel na číselné ose může přispět k tomu, aby se žáci naučili správně chápat celá čísla a počítat s nimi. Zvládnutí učiva o celých číslech je předpokladem zvládnutí dalších matematických témat, např. algebraických výrazů, rovnic aj.

Zavedení záporných čísel je pro žáky jednou z nejnáročnějších myšlenkových činností a je třeba vyvarovat se jakéhokoliv formalismu, aby se práce se zápornými čísly neomezila jen na formální práci se znaménkem „mínus“. Toto je důležité právě v souvislosti se žáky s poruchami učení. Problematice přístupů k výuce a pochopení celých čísel je věnována např. Hejný, 2004 s. 327–342.

Vhodná motivace, vhodné využití různých her a využití modelů, které žáka nejvíce osloví, přispěje k tomu, že se záporná čísla postupně zařadí do poznatkové struktury žáka. Přitom se postupně seznamuje s pojmy nezbytnými k práci s celými čísly.

V rámci numerace je potřeba, aby se žáci seznámili s pojmy číslo kladné, číslo záporné, číslo 0, číslo opačné k danému číslu, znázornění čísel celých na číselné ose, absolutní hodnota celého čísla. Nejprve je třeba, aby žáci pochopili další významy znaménka „−“. Zatím znají znaménko „−“ jako symbol operace odčítání. Nyní se seznámí s významem znaménka „−“ k označení záporného čísla a s jeho dalším významem k označení čísla opačného k danému číslu. Zde je nejdůležitější, aby si žáci uvědomili, že opačné číslo k číslu kladnému je číslo záporné, např. opačné číslo k číslu 7 je číslo −7, opačné číslo k číslu zápornému je číslo kladné, tedy opačné číslo k číslu −7 je číslo −(−7), což je + 7. Jedině v tomto případě platí mnemotechnická pomůcka, která říká, že „mínus a mínus je plus“, což lze interpretovat tak, že opačné číslo k číslu zápornému je číslo kladné. Vhodně se tato situace znázorňuje na číselné ose.

Z možných sémantických nebo strukturálních modelů záporných čísel respektujeme ty, kterým žák s poruchou učení rozumí. Ze sémantických modelů nabízíme záporné číslo ve významu adresy (např. teploměr, výtah, číselná osa), ve významu veličiny (např. teplota, finanční model, dluhy), ve významu operátoru (např. odchylky od aritmetického průměru, operátor změny). Ze strukturálních modelů můžeme uvést výsledek odčítání většího čísla od čísla menšího.

Pro žáky s poruchami učení je vhodné jako názornou pomůcku využívat buď bílých a černých knoflíků k označení čísel kladných a čísel záporných nebo zápisy čísel různými barvami, např. kladná čísla barvou červenou, záporná čísla barvou modrou, nebo číselné osy.

1.3.2 Porovnávání celých čísel

Porovnávání celých čísel vychází z porovnávání čísel přirozených a rozšiřuje se na čísla záporná. Zde velmi záleží na vyjadřování, neboť když se uvádí, že např. −10 °C je větší zima než −5 °C, nebo 50 Kč dluhu je menší dluh než 100 Kč dluhu, pak uvedeme žáky do velkého zmatku. Porovnáváme teplotu, tedy −10 °C je menší teplota než −5 °C. Když mám dluh 50 Kč, tak mám větší aktiva, než když mám dluh 100 Kč, tedy $-50 > -100$. V některých případech se k porovnávání celých čísel používá číselná osa, eventuelně se využívá absolutní hodnoty celých čísel.

Problémy:

- žáci nemohou pochopit, že např. $-2 > -7$, $-8 < 1$,
- pokud porovnávají celá čísla na číselné ose, domnívají se, že větší číslo je znázorněno dál od nuly (počátku číselné osy), toto neplatí v záporné části osy.

Nápravná cvičení vycházejí z porovnávání čísel přirozených, porovnávání čísel vzhledem k nule a teprve potom porovnávání kladných a záporných čísel:

$$7 < 12 \quad 24 > 15 \quad 1 < 4$$

$$0 < 8 \quad -5 < 0$$

$$6 > -2 \quad -7 < 7$$

$$-9 < -5 \quad -5 > -10$$

Závěr: Každé kladné číslo je větší než 0.
Každé kladné číslo je větší než číslo záporné.
Každé záporné číslo je menší než 0.
Každé záporné číslo je menší než číslo kladné.

Pokud dětem vyhovuje znázornění čísel na číselné ose, potom je důležité respektovat, že ze dvou čísel znázorněných na číselné ose, je větší číslo znázorněno více vpravo. Při využití absolutní hodnoty k porovnávání záporných čísel platí, že ze dvou záporných čísel je větší to, které má menší absolutní hodnotu. Např. $-50 > -80$, $|-50| = 50$, $|-80| = 80$. Avšak pojem absolutní hodnoty celého čísla je pro žáky s poruchami učení velmi náročný.

1.3.3 Operace s celými čísly

Problémy při provádění operací s celými čísly se jednak odvíjejí od problémů vyplývajících z operací s přirozenými čísly a navíc se připojují problémy se znaménkem „minus“. Proto hledáme vhodné modely, které usnadní žákům operace s přirozenými čísly. Jde např. o aktiva a dluhy ve financích, modely bílých a černých knoflíků, event. používání číselné osy.

1.3.3.1 Sčítání celých čísel

Navazujeme na sčítání čísel přirozených a postupně volíme čísla záporná tak, aby oba sčítanci byli buď stejné parity nebo různé.

Přitom využíváme tyto skutečnosti:

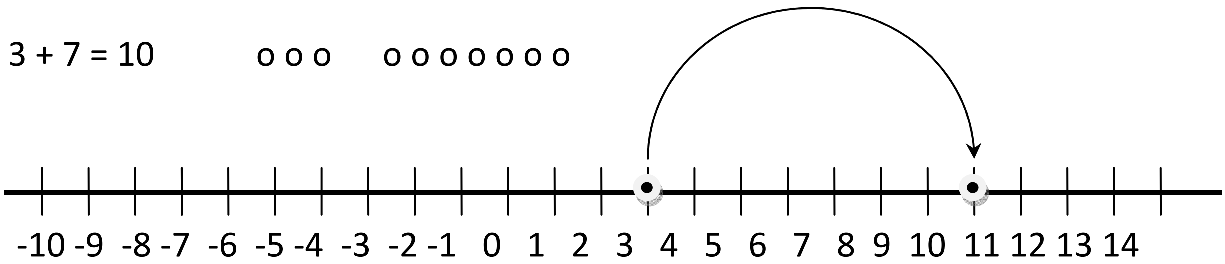
a) Součet čísla a čísla k němu opačného je roven nule:

$$1 + (-1) = 0, \quad (-4) + 4 = 0$$

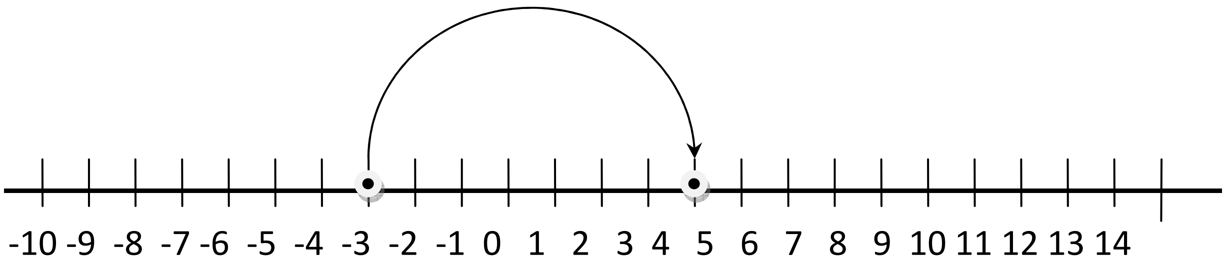
Při znázornění pomocí knoflíků o (jeden bílý a jeden černý knoflík
● znázorňuje nulu).

b) Při znázorňování sčítání na číselné ose se pohybujeme tak, že když přičítáme číslo kladné, pohybujeme se doprava, když přičítáme číslo záporné, pohybujeme se doleva.

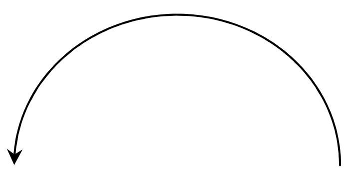
$3 + 7 = 10$ o o o o o o o o o o

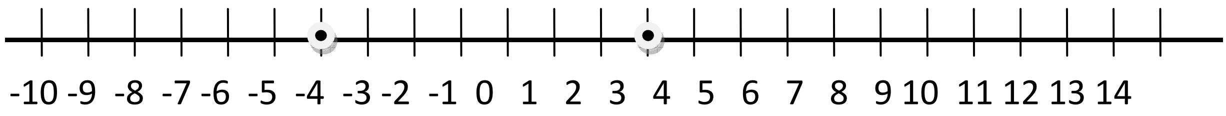


$(-3) + 7 = 4$ ● ● ●
o o o o o o o

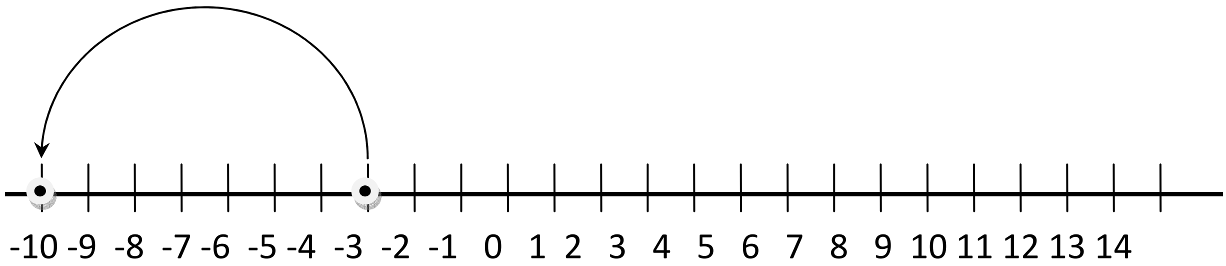


$3 + (-7) = -4$ o o o
● ● ● ● ● ● ●





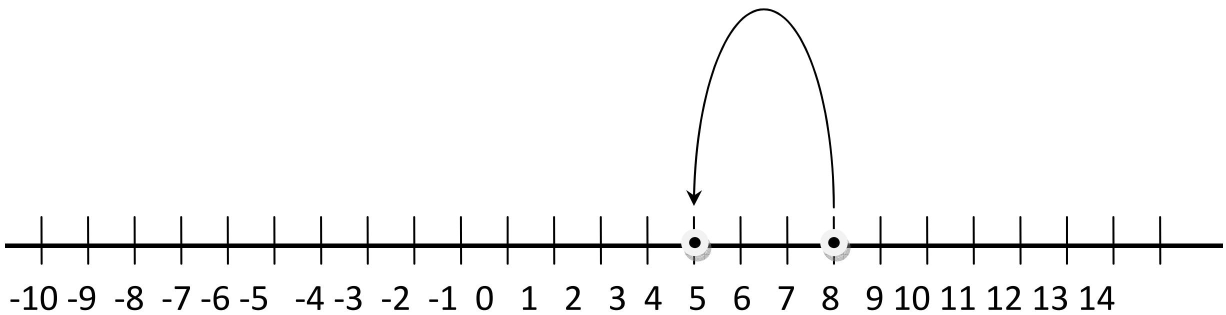
$(-3) + (-7) = -10$



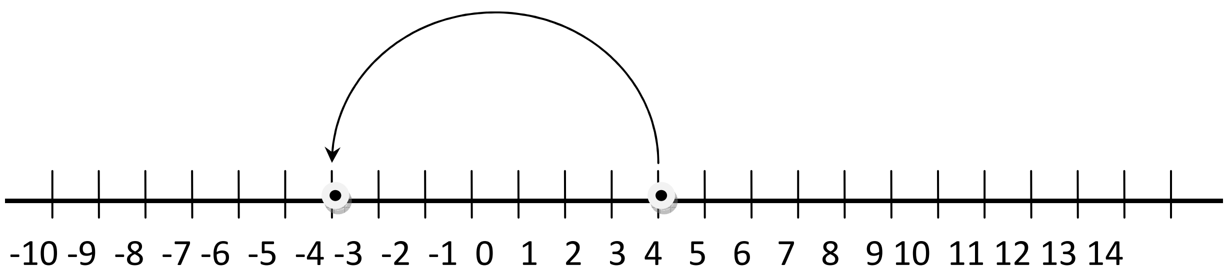
1.3.3.2 Odčítání celých čísel

Opět vycházíme z odčítání čísel přirozených a postupujeme k číslům záporným, volíme všechny možnosti znamének menšence i menšitele. Některé příklady je možné znázornit pomocí knoflíků, některé jen na číselné ose. Při odčítání čísla kladného se na číselné ose pohybujeme zprava doleva, při odčítání čísla záporného zleva doprava.

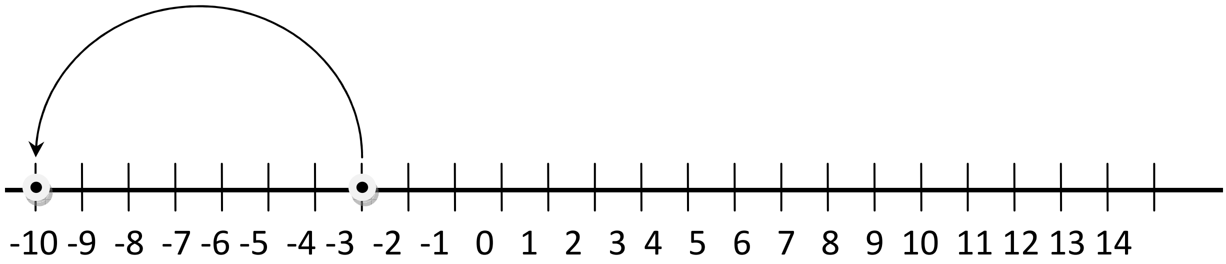
$7 - 3 = 4$ o o o ø ø ø ø



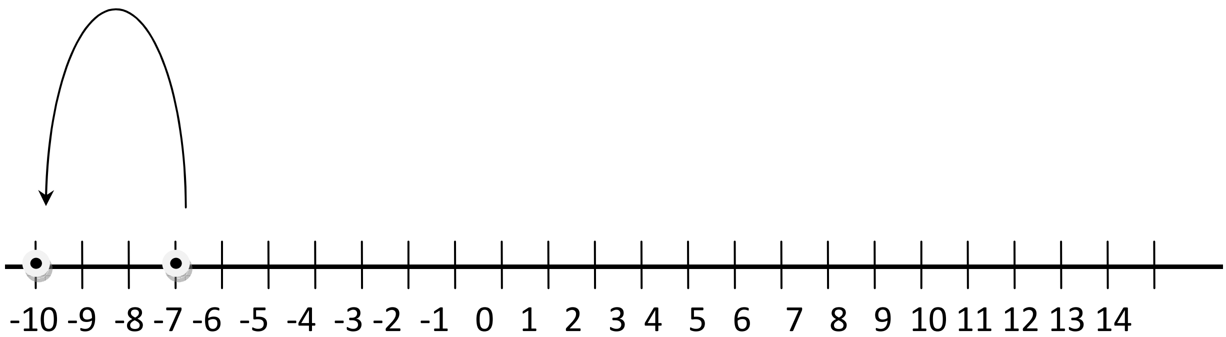
$3 - 7 = -4$



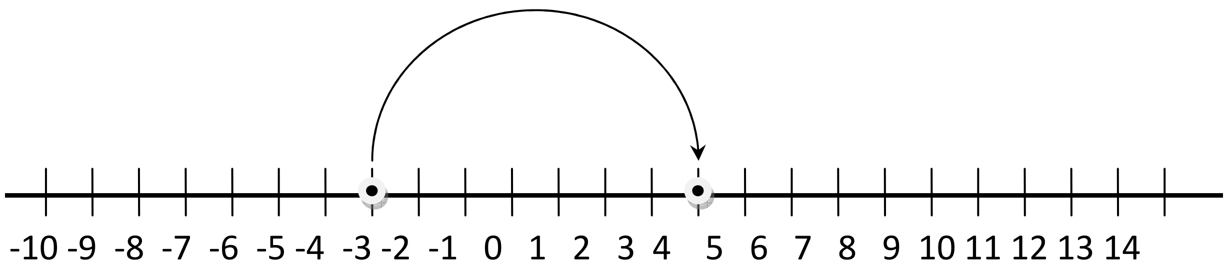
(−3) − 7 = −10



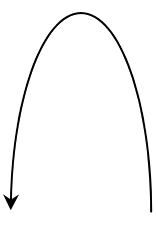
(−7) − 3 = −10

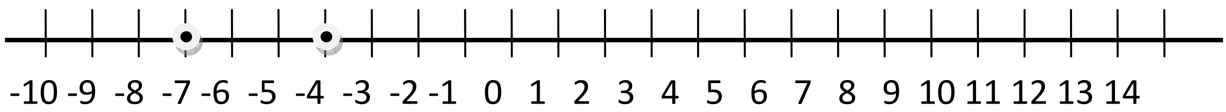


(−3) − (−7) = 4



(−7) − (−3) = −4





Je vhodné poukázat na souvislost sčítání a odčítání celých čísel a se žáky vyvodit, že odčítat celé číslo znamená přičítat číslo opačné, jak ukazují následující příklady:

$3 + 7 = 10$ $\quad$ $3 - (-7) = 10$ $\quad$ $7 - (-3) = 10$

$3 + (-7) = -4$ $\quad$ $3 - 7 = -4$

$(-7) + 3 = -4$ $\quad$ $(-7) - (-3) = -4$

$(-3) + 7 = 4$ $\quad$ $(-3) - (-7) = 4$ $\quad$ $7 - 3 = 4$

$(-3) + (-7) = -10$ $\quad$ $(-3) -7 = -10$

$(-7) + (-3) = -10$ $\quad$ $(-7) - 3 = -10$

1.3.3.3 Násobení celých čísel

Vyvození násobení celých čísel je vhodné ilustrovat na konkrétních praktických příkladech, pokud to lze. Opět vycházíme z násobení čísel přirozených, dále volíme příklady, kdy je jeden činitel kladný a druhý záporný a teprve nakonec příklad, kdy jsou oba činitelé záporní.

a) Každému z tří žáků dám 5 korun. Kolik korun budou mít dohromady?

$$3 \,.\, 5 = 15$$

b) Od každého ze tří žáků si vypůjčím 5 Kč. Kolik Kč budu dlužit?

$$3 \,.\, (-5) = -15$$

c) Vypůjčil jsem si tři koruny od pěti žáků. Jaký je můj dluh?

$$(-3) \,.\, 5 = -15$$

d) Formulovat praktický příklad násobení, kdy jsou oba činitelé záporní, je obtížné. I v historii bylo obtížné pochopit, že součin dvou záporných čísel je číslo kladné. Proto volíme matematický přístup. Z několika možných se pro žáky s poruchami učení osvědčilo využít funkčního myšlení. Jedná se o součiny, kdy postupně měníme jednoho činitele a sledujeme, jak se mění součin. Vycházíme ze známého příkladu:

$(-3) \cdot 5 = -15$	
$(-3) \cdot 4 = -12$	součin je o 3 větší
$(-3) \cdot 3 = -9$	součin je o 3 větší
$(-3) \cdot 2 = -6$	součin je o 3 větší
$(-3) \cdot 1 = -3$	součin je o 3 větší
$(-3) \cdot 0 = 0$	součin je o 3 větší
$(-3) \cdot (-1) = 3$	součin je o 3 větší
$(-3) \cdot (-2) = 6$	součin je o 3 větší atd.

Protože se první činitel nemění, druhý činitel se postupně po jedné zmenšuje, součin se stále zvětšuje o 3. Induktivní metodou dospějeme k poznatku, že při součinu dvou čísel, pokud mají oba činitelé stejné znaménko, součin je kladné číslo, pokud mají různá znaménka, součin je záporný. Tato zkušenost se zobecňuje pro součin vice činitelů. Pokud je počet záporných činitelů sudý, součin je kladný, pokud je počet záporných činitelů lichý, součin je záporný. Další možnosti vyvození násobení celých čísel jsou uvedeny např. v Blažková, 2005.

1.3.3.4 Dělení celých čísel

Analogicky jako násobení celých čísel vyvozujeme dělení. Můžeme volit konkrétní aplikační příklady, nebo využít souvislosti násobení a dělení.

a) Patnáct korun rozdělím mezi tři žáky. Kolik korun bude mít každý žák?

$$15 : 3 = 5$$

b) Dlužím celkem 15 Kč třem žákům. Kolik Kč dlužím každému z nich?

$$(-15) : 3 = -5$$

c) Dlužím celkem 15 Kč, vypůjčoval jsem si po třech korunách. Kolika žákům dlužím?

$$(-15) : (-3) = 5$$

d) Příklad $15 : (-3) = -5$ nemá vhodnou praktickou aplikaci, takže můžeme využít souvislosti násobení a dělení. Jestliže platí $(-3) \cdot (-5) = 15$, pak

$$15 : (-3) = -5 \quad \text{a} \quad 15 : (-5) = -3.$$

Pokud žáci zvládnou pamětné operace s celými čísly, je to z prvních kroků, neboť toto učivo budou aktivně uplatňovat při počítání s číselnými výrazy, s rovnicemi, při úpravách algebraických výrazů apod. Proto je třeba neomezovat se jen na pamětné uplatňování pouček (např. znaménková schémata), ale na pochopení učiva na základě solidního vyvození a uvědomělé provádění operací. Pouhé uplatňování pravidel při počítání s celými čísly žákům nestačí. Je třeba řádně vyvodit celá čísla, zejména záporná v jejich významu (pochopení bylo složité i v historii), poskytnou žákům dostatek modelů tak, aby nastal AHA efekt. Znovu připomínáme, že žáci s dyskalkulií mají inteligenci v pásmu průměru až nadprůměru, a proto vyvození vyžadují a pochopí. Proces výuky celých čísel je dlouhodobý a mělo by se neustále využívat každé situace, která přispívá k ukotvení tohoto náročného pojmu.

Reedukace

Metody práce, kdy učitel podává informace a žák je má reprodukovat, nevedou v tomto případě k cíli. Jediná cesta k úspěchu vede přes vlastní činnost žáka, kdy prostřednictvím řešení situací, které žáka osloví a kterým rozumí, postupně přichází k pojmu celého čísla a zejména čísla záporného. Osvědčuje se série her – např. počítání kladných a záporných bodů při hře, deskové hry jako lota, domina, pexeso, křížovka se samokontrolou, které jsou popsány v první monografii (Blažková 2009) a v publikaci Blažková a kol. 2000.

1.4 Zlomky

Případová studie

Vojta dostal za úkol rozdělit kruh na tři stejné části. Neustále kreslil rovnoběžné přímky, a nemohl pomocí tohoto postupu tři stejné části kruhu určit a nebyl schopen se od jednoho modelu dělení odpoutat, zvolit jiný přístup k dělení kruhu. Čokoládu, která byla rozdělena na obdélníčky, rozdělit na tři stejné díly dokázal. Zlomek jako číslo nechápal. Při sčítání zlomků sčítal vždy čitatele s čitatelem a jmenovatele se jmenovatelem. Poměrně dlouhou dobu potřeboval „návodné" příklady, počítal podle vzoru, reedukační cvičení obsahovala příklady s řešenými vzorovými úlohami, na kterých sledoval postup řešení. Po tomto delším nácviku pochopil princip operací se zlomky a jednou řekl: „Neříkejte mi, jak to je, chci na to přijít sám." Co víc si může učitel přát?

Představy žáků o zlomcích se vytvářejí v poměrně dlouhém časovém úseku, vyžadují delší období než proces vytváření čísel přirozených. Jestliže pojem přirozeného čísla se vytváří zhruba od dvou až tří roků do šesti roků, pojem zlomku je vytvářen asi od čtyř roků téměř do 15 roků. Rozložení budování pojmu zlomku do několika časových etap je z psychologického i didaktického hlediska nutné. Zpočátku souvisejí zlomky s dělením celku na části, tedy vytvářením pojmu zlomku jako části celku. Tato etapa probíhá v průběhu 1. stupně základní školy až do 6. ročníku (kolem 12. roku žáka). V 7. ročníku teprve probíhá systematický kurs výuky zlomků. Rozčlenění budování pojmu zlomku do etap by mělo být preferováno před postupem, kdy se žáci seznámí s jednorázovou definicí zlomku (kdy se žáci seznámí pouze formálně se zlomkem a základními pojmy čitatel, jmenovatel, zlomková čára, tedy formou zápisu zlomku) a poskytuje dostatečný čas k potřebné abstrakci, aby žáci chápali pojem zlomku jako racionálního čísla. Se zlomky ve významu racionálních čísel pak žáci provádějí příslušné operace.

Pojem zlomku se tedy vytváří ve třech významech:

- zlomek jako část celku,
- zlomek jako reprezentant racionálního čísla,
- zlomek jako naznačené dělení.

Na prvním stupni se žáci dále mohou seznámit v souvislosti s výukou dělení přirozených čísel s významem zlomku jako operátorem, např. úlohu: „Z 24 žáků jedna čtvrtina hraje házenou" počítají 24 : 4 = 6. Podobně se pracuje s jednotkami měr, např. jedna desetina metru je 1 decimetr, jedna čtvrtina hodiny je 15 minut aj.

1.4.1 Zavedení pojmu – zlomek

Při budování pojmu zlomku jako části celku vycházíme vždy z praktických činností, překládání papíru, vybarvování, vystřihování, rozdělováním koláče, pizzy, čokolády apod. Modely pro práci žáků jsou nejčastěji obdélník, kruh, úsečka, event. trojúhelník a některé mnohoúhelníky. Na základě mnoha experimentálních zkušeností se žáci postupně seznamují s tím, že nezáleží na tom, jaký celek se rozděluje a jakou má velikost, ale na tom, na kolik stejných částí se celek dělí a kolik z nich uvažujeme. Výklad je názorný a každému žáku bychom měli dopřát tolik času, kolik k pochopení pojmu zlomku potřebuje.
Na základě konkrétních činností žáci zjišťují, že každé přirozené číslo můžeme zapsat jako zlomek se jmenovatelem 1 že nula nemůže být ve jmenovateli zlomku. Pokud se zanedbá toto období, je velmi obtížné pokračovat v dalším učivu.

Činnosti k chápání zlomku a racionálního čísla jako třídy navzájem ekvivalentních zlomků spočívají např. v překládání papíru tvaru obdélníku nebo kruhu. Žáci řeší zadání: Přeložte papír (obdélník, čtverec, kruh) na dvě stejné části. Jednu část vybarvěte a dále překládejte papír vždy dvě stejné části. Postupně se seznamují s tím, že jedna polovina se může vyjádřit jako dvě čtvrtiny nebo čtyři osminy, atd.

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{8}{16}=\frac{16}{32}=$ atd.

Podobně mohou zjistit:

$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=$ atd.

Z této činnosti lze vyvodit krácení a rozšiřování zlomků. Rozšiřování zlomků je násobení čitatele i jmenovatele stejným číslem různým od nuly, krácení zlomků je dělení čitatele i jmenovatele stejným číslem, různým od nuly. Zde mohou mít žáci problémy s rozlišováním tří různých pojmů:

1. Rozšiřování zlomků, např. $\frac{2}{3}=\frac{3.2}{3.3}=\frac{6}{9}$.

2. Násobení zlomku přirozeným číslem, např. $3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{3.2}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

3. Zápis smíšeného čísla pomocí nepravého zlomku, např. $3\frac{2}{3} = \frac{3.3+2}{3} = \frac{11}{3}$.

Poznamenejme, že nepravý zlomek je zlomek, jehož čitatel je větší než jmenovatel.

Protože mnoha žákům tyto různé pojmy splývají a nejsou schopni je rozlišit, je nutné každý poznatek důkladně vysvětlit a naučit žáky na názorných příkladech rozlišovat, o kterou z uvedených situací se jedná.

Krácení zlomků má význam při operacích se zlomky, zejména když je vysloven požadavek, aby výsledek operace byl vyjádřen zlomkem v základním tvaru. Zlomek v základním tvaru je zlomek, jehož čitatel a jmenovatel jsou čísla nesoudělná.

1.4.2 Porovnávání zlomků

Porovnávání zlomků je podstatně náročnější než porovnávání přirozených čísel. Opět se vychází ze znázornění na modelech, avšak je třeba v poměrně krátké době přejít k porovnávání zlomků jako čísel. Při práci se žáky s poruchami učení je vhodné pracovat systematicky v metodické řadě příkladů.

Porovnáváme zlomky se stejným jmenovatelem: $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$.

a) Porovnáváme zlomky, u kterých je jeden jmenovatel násobkem druhého a využijeme rozšiřování zlomků:

$$\frac{3}{4} \qquad \frac{5}{8}$$

b) Porovnáváme zlomky, jejichž jmenovatelé jsou čísla nesoudělná:

$$\frac{3}{5} \qquad \frac{4}{7}$$

c) Porovnáváme zlomky, jejichž jmenovatelé mají společného dělitele:

$$\frac{5}{8} \qquad \frac{7}{12}$$

V případech b) a c) hledáme nejmenší společný násobek čísel zapsaných ve jmenovatelích zlomků.

Podle specifických potřeb žáků můžeme nabídnout několik možností k porovnávání zlomků:

a) Zápis zlomků pomocí sobě rovných jmenovatelů, rozšířením nebo krácením zlomků (viz výše).

b) Použití šipkového pravidla. Platí $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ právě když je $ad > bc$. Šipkou se znázorní postup součinů – šipka se znázorní od *d* k *a* a od *b* k *c*.

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}$$

c) S využitím číselné osy. Ze dvou čísel znázorněných na číselné ose je větší to, jehož obraz je víc vpravo.

d) Zápis zlomků pomocí desetinných čísel, např. $\frac{1}{4} = 0{,}25$, $\frac{3}{10} = 0{,}3$

$$\frac{1}{4} < \frac{3}{10}$$

1.4.3 Operace se zlomky

1.4.3.1 Sčítání a odčítání zlomků

Sčítání a odčítání zlomků vyžaduje opět motivační úlohy a rozmyšlený postup, aby nedocházelo k formalismu a v jeho důsledku chybám žáků. Problémem bývá nalézt společný jmenovatel zlomků, které sčítáme nebo odčítáme, což je nejmenší společný násobek daných čísel. Pro žáka s poruchami učení je vhodné pracovat nejprve se zlomky kladnými. Proto je vhodný postup:

a) Sčítáme a odčítáme zlomky se stejným jmenovatelem, např.:

$$\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8} \qquad \frac{7}{12}-\frac{5}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

b) Sčítáme a odčítáme zlomky, jeden jmenovatel je násobkem druhého, např.

$$\frac{7}{12}+\frac{3}{4}=\frac{7}{12}+\frac{9}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$

c) Jmenovatelé zlomků jsou čísla nesoudělná, společný jmenovatel je součin čísel zapsaných ve jmenovatelích, např.

$$\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{15}{20}+\frac{16}{20}=\frac{31}{20}=1\frac{11}{20}$$

d) Jmenovatelé zlomků jsou čísla soudělná, společný jmenovatel je nejmenší společný násobek čísel zapsaných ve jmenovatelích zlomků, např.:

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{9}{24}+\frac{10}{24}=\frac{19}{24}$$

Obecně: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, $b \neq 0$ $d \neq 0$

1.4.3.2 Násobení zlomků

Při vyvození násobení zlomků uvádíme v návaznosti na násobení přirozených čísel nejprve násobení zlomku přirozeným číslem:

$$3\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$$

Při násobení zlomku přirozeným číslem násobíme tímto číslem čitatel zlomku.

Obecně: $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$ $c \neq 0$

Následně vyvozujeme násobení zlomku zlomkem. Můžeme využít motivačních příkladů, např.: Z tabule, která má obsah 1 m^2, vystřihneme obdélník, jehož délka je $\frac{2}{5}$ m a šířka $\frac{3}{4}$ m. Jaký bude obsah obdélníku? $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{20}$

Obecně: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ *b≠ 0, d≠ 0*

Zlomek násobíme zlomkem tak, že součin čitatelů lomíme součinem jmenovatelů daných zlomků. Přitom využíváme vhodného krácení zlomků.

1.4.3.3 Dělení zlomků

Pro pochopení dělení zlomků bez formálního uvedení poučky je třeba postup výuky rozdělit do několika etap. Nejprve dělíme zlomek číslem přirozeným, poté přirozené číslo zlomkem a teprve potom dělíme zlomek zlomkem. Využijeme souvislosti operací dělení a násobení.

a) Dělení zlomku číslem přirozeným můžeme ilustrovat na obrázcích, např. na obrázku kruhu.

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$$

Protože při násobení zlomků platí $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$, můžeme usoudit, že

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

Na základě induktivního postupu postupně poznatek zobecňujeme.

b) Dělení přirozeného čísla zlomkem využijeme např. motivačního příkladu: Pět litrů moštu rozdělujeme do skleniček po jedné čtvrtině litru. Kolik skleniček naplníme?

Počet litrů	1	2	3	4	5
Počet skleniček	4	8	12	16	20

$5 : \frac{1}{4} = 20$ Protože platí $5 \cdot \frac{4}{1} = 20$, usoudíme, že $5 : \frac{1}{4} = 5 \cdot \frac{4}{1}$

c) Dělení zlomku zlomkem

Láhev minerálky o objemu $\frac{3}{4}$ litru rozdělujeme do skleniček po jedné čtvrtině litru. Kolik skleniček naplníme?

Můžeme provést úvahu: jedna sklenička … jedna čtvrtina litru minerálky
dvě skleničky … dvě čtvrtiny litru
tři skleničky … tři čtvrtiny litru

tedy $\frac{3}{4}:\frac{1}{4}=3$, s využitím poznatků o násobení pak ilustrujeme postup při dělení zlomku zlomkem:

$$\frac{3}{4}:\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{1}=3$$

Zlomek dělíme zlomkem tak, že první zlomek násobíme zlomkem převráceným. Převrácený zlomek k danému zlomku dostaneme tak, že ve zlomku zaměníme čitatele a jmenovatele.

Obecně: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ $a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$

1.5 Navazující témata

Znalost výše uvedených témat je předpokladem k úspěšnému zvládání dalšího učiva druhého stupně, zejména témat Dělitelnost v oboru přirozených čísel, Procenta, Poměr a další. Tato témata vyžadují schopnost uplatnit získané poznatky v jiných situacích.

Aby žák mohl pracovat s procenty, měl by mít zvládnuty operace s desetinnými čísla, operace se zlomky. Jedno procento se uvádí jako jedna setina daného základu – celku a může být vyjádřeno jak zlomkem, tak desetinným číslem. Výpočet procentové části, základu nebo počtu procent se provádí různými metodami (výpočtem přes jedno procento, pomocí trojčlenky, pomocí vzorců), k výpočtům se mohou využít buď čísla desetinná nebo zlomky a každý žák má možnost využít těch metod a způsobů zápisů, kterým nejlépe rozumí. Nejčastější problémy mají žáci s tím, že procenta se vždy váží k nějakému základu a bez něj nemá toto číslo smysl. Z toho potom vyplývají chyby typu 3 % . 5 % = 15 %.

V návaznosti na počítání s procenty se žáci seznamují se základy finanční matematiky a prostřednictvím čísel se tak může rozvíjet jejich finanční gramotnost.

Protože v navazujících tématech je kromě tvořivého uplatňování znalostí operací s racionálními čísly nutno využít též logické úvahy a aplikací matematiky při řešení praktických situací, jsou přístupy k žákům velmi individuální, podle jejich konkrétních potřeb a úrovně myšlení.

2 ZÁVISLOSTI, VZTAHY, PRÁCE S DATY

Tematický celek poskytuje žákům možnosti realizace projektů, mezipředmětových vztahů, vyhledávání aplikací matematiky v praxi, popis situací, které souvisejí s jejich běžným životem. Dále je pro žáky s poruchami učení příznivý svými možnostmi vyjádření – textem, symbolicky i graficky a tím poskytuje těmto žákům takový zdroj komunikace, kterému nejlépe rozumí. Znázornění číselných údajů graficky, pomocí diagramů, je pro žáky více informativní než např. pouhé číselné údaje v tabulkách. Známou skutečností je, že obrázek podá o stejné situaci více informací než vyjádření pomocí slov nebo čísel. Čtení diagramů a vyhledávání informací prostřednictvím nich je pro žáky atraktivní.

2.1 Obsah tématu

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání formuluje očekávané výstupy pro 1. i 2. stupeň ZŠ:

1. stupeň

Očekávané výstupy

1. období:

- orientace v čase, jednoduché převody jednotek času,
- popis jednoduchých závislostí z praktického života,
- doplňování tabulek, schémat, posloupností čísel.

2. období:

- vyhledávání, sbírání a třídění dat,
- čtení a sestavování jednoduchých tabulek a diagramů.

Učivo:

Závislosti a jejich vlastnosti

Diagramy, grafy, tabulky, jízdní řády.

2. stupeň

Očekávané výstupy

- vyhledávání, vyhodnocování a zpracování dat,
- porovnávání souborů dat,
- určování vztahu přímé a nepřímé úměrnosti,

- vyjádření funkční závislosti tabulkou, rovnicí, grafem,
- matematizace jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů.

Učivo:

Závislosti a data – příklady závislostí z praktického života a jejich vlastnosti, nákresy, schémata, diagramy, grafy, tabulky. Četnost znaku, aritmetický průměr. Funkce – pravoúhlá soustava souřadnic, přímá úměrnost, nepřímá úměrnost, lineární funkce.

Z uvedeného přehledu je vidět, že jde o využívání kvantitativních údajů v nových situacích a pro žáky se specifiíckými poruchami učení vznikají příležitosti využití učiva v aplikačních úlohách. Zvyšuje se tím možnost aktivní činnosti žáků podle jejich zájmu. Přitom se kromě uplatnění dříve probíraného učiva rozvíjí mnoho dalších kompetencí žáků. Především jde rozvíjení funkčního myšlení žáků.

Pod pojmem funkční myšlení rozumíme schopnost posuzovat jevy v jejich změnách, sledovat příčiny těchto změn a umět je popsat.

a) u početních operací sledovat změny výsledků operace na změnách veličin do operace vstupujících,
b) při řešení konstrukčních úloh umět stanovit závislost výsledku konstrukce na změnách velikosti nebo polohy zadaných prvků,
c) při sledování závislostí umět rozhodnout, zda mezi sledovanými jevy existuje vztah, který by bylo možné popsat kvantitativně,
d) umět popsat funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem,
e) správně chápat definiční obory a obory hodnot daných funkcí,
f) umět vyjádřit vlastnosti daných funkcí,
g) umět číst grafy,
h) umět zobecňovat kvantitativní vztahy.

2.2 Závislosti kolem nás

Předkládáme žákům různé situace, ve kterých závisí jedna veličina na druhé a přitom některé je možné vyjádřit matematickým zápisem (např. tabulkou nebo grafem), jiné takto vyjádřit nelze. Uveďme některé z nich:

- závislost úspěchu ve škole na kvalitě přípravy,
- růst rostlin v závislosti na množství vody při zalévání,
- výše mzdy v závislosti na pracovním výkonu,
- cena nákupu zboží v závislosti na jeho množství,
- změna výšky a hmotnosti člověka v závislosti na jeho věku,

- změna délky dne v závislosti na ročním období,
- změna teploty ovzduší v závislosti na denním období,
- spotřeba energií v domácnosti (voda, plyn, elektrická energie) v průběhu roku,
- rozpočet domácnosti,
- závislost spotřebovaných potravin na počtu osob,
- změny kurzovních lístků,
- poštovní poplatky,
- poplatky za telefonní hovory u různých operátorů,
- závislost ujeté dráhy na době jízdy při stálé rychlosti,
- závislost doby jízdy na rychlosti při projetí určité dráhy,
- výhodnost nákupů v akcích, výhodnost množstevních slev,
- práce s jízdními řády,
- řešení úloh o pohybu.

Volíme taková témata, která jsou žákům blízká, která je osloví, o která mají zájem.

2.3 Aplikační úlohy

Aplikační úlohy řeší žáci na několika úrovních:

- Pracují s konkrétními údaji, tabulkami, grafy, diagramy, učí se je číst a vytvářet, učí se vnímat závislosti veličin.
- Provádějí vlastní statistická řešení a postupně se prostřednictvím nich seznamují se základními pojmy matematické statistiky.
- Řeší praktické úlohy, ve kterých pracují s přímou a nepřímou úměrností, s lineární funkcí (např. řešení úloh o pohybu, dopravní tématika).
- Řeší úlohy teoretické povahy.
- Zpracovávají projekty s tématikou závislostí v praxi.

Vzhledem k tomu, že tématika je velmi rozmanitá, že žáci mohou volit to, co je zajímá, lze vhodnou organizací práce a vhodnou volbou forem práce zapojit všechny žáky s poruchami učení.

Velmi často se závislosti sledují na základních operacích, např.

Zapište do tabulky, jak se mění cena za nákup housek. Jedna houska stojí 6,50 Kč.

Počet housek	1	2	3	4
Počet Kč	6,50			

Žáci řeší úlohy, kdy mají závislost odhalit:

Která čísla doplníte do řady, aby byla zachována zákonitost, podle které byla vytvářena:

a) 20, 17, 14, __, __

b) 4, 8, 12, __, __

c) 1, 2, 4, 7, 11, __, __

Problémy žáků se specifickými poruchami učení:

- Rozlišit a poznat různé závislosti, např. kromě přímé úměrnosti také nepřímou úměrnost, příp. kvadratickou závislost.
- Problémy s motorikou se u žáků objeví v souvislosti s rýsováním grafů.
- Ochota žáka přemýšlet a neodbíhat od problému.
- Úspěšnost řešení mohou ovlivnit dyskalkulické problémy při provádění operací s čísly.

3 ALGEBRA

Případová studie

Sebastián je žákem 9. ročníku s diagnostikovanou dyskalkulií. Pro počítání s čísly často používá kalkulátor a v provádění operací s racionálními většinou čísly problémy nemá. Největší problémy má při úpravách algebraických výrazů, kde mu kalkulátor příliš nepomůže. Protože měl sám velký zájem na tom, aby učivo zvládl, hledali jsme cesty, aby učivo pochopil. První problém, který jsme odstraňovali, bylo pochopení písmene ve významu čísla. Dále jsme pro jednotlivé operace využívali mnoha grafického znázornění, barevných vyznačení, šipek, apod. Přitom jsme vždy zdůrazňovali a zdůvodňovali příslušná pravidla. Po individuální výuce se jeho problémy zmírnily.

3.1 Algebraické výrazy

Používání písmen ve významu čísla souvisí se schopností zobecňovat a abstrahovat a k této dovednosti přicházejí žáci postupně, ne všichni ve stejném věku nebo stejném ročníku. Proto se zde může projevit opožděný vývoj, který se však v dalším ročníku může dohonit a žák zvládá učivo bez problémů. Algebraické výrazy umožňují efektivní, stručný a přesný zápis i vyjadřování a ekonomizují myšlení.

Při výuce je třeba respektovat, že pochopení významu písmen je proces dlouhodobý a musí být učitelem promyšleně řízen. Dále je potřeba neustále zdůrazňovat, co jednotlivá písmena v zápisech výrazů znamenají, aby nedocházelo k mechanickému a formálnímu osvojování. Písmeno ve významu čísla se využívá v různých situacích (ve významu proměnné, konstanty, neznámé, speciálního označení určité veličiny aj.). Postup výuky má svá pravidla a je zpravidla uveden v učebnicích matematiky nebo didaktikách matematiky. Problematická bývá motivace učiva, žáci by vždy měli vědět, k čemu dané učivo je pro ně užitečné. Protože učitel může předpokládat určité problémy žáků, zaměřme se na některé z nich. Problémy žáků a jejich chyby, při práci s algebraickými výraz mají mnoho projevů, které můžeme rozdělit do několika skupin.

a) Chyby numerické, tj. chyby, které vyplývají z nesprávných operací s čísly přirozenými, zápornými i zlomky, např.

$4x - 12x = 8x$, $7x \cdot 8x = 54x$

b) Chyby vyplývající z nepochopení počítání s algebraickými výrazy. Tyto chyby mohou být způsobeny:

- formálním přístupem, kdy se žáci naučí pravidla zpaměti, ale neumí je aplikovat v příkladech,
- přenosem dyskalkulických problémů z oboru přirozených čísel do dalšího učiva, např. mocnin nebo práci s koeficienty,
- používáním nesprávné strategie při řešení,
- chyby velkých kroků, kdy provádějí současně několik úprav najednou.

Uveďme některé konkrétní příklady:

Počítání s mocninami. I když žák umí mechanicky vyjmenovat pravidla o počítání s mocninami, neumí je aktivně použít v příkladech:

$x + x = 2x^2$

$5x + 2x = 10x^2$

$2x^2 + 3x^2 + x + 1 = 6x^5 + 1$

$2x^2 \cdot 3x^3 = 6x^6$

$x^6 : x^2 = x^3$

Operace s algebraickými výrazy. Žáci nerozlišují např. operace sčítání a násobení:

$a + b = a \cdot b$

$5a + 2b = 7ab$

$5a - 2a = 3$

Roznásobení dvojčlenu – násobí první člen prvním a druhý druhým

$(a + b) \cdot (c + d) = ac + bd$

Z toho pak vyplývá chybné umocňování dvojčlenu

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - b^2$

Analogické chyby se vyskytují při počítání odmocnin:

$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

Chybné krácení ve zlomku

$$\frac{ax + b}{b} = ax$$

$$\frac{ax + by}{a + b} = x + y$$

Chybné počítání se zlomky

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + b}{c + d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{bc}$$

c) Chyby způsobené zápisem, kdy zápisy jsou nepřehledné, neúplné, chybí některé nedopsané znaky, nedbalé psaní cifer a písmen. Při zápisech mají velké problémy dysgrafikové.

d) Chyby vyplývající z psychiky žáka:

- malá koncentrace, roztržitost, překotná uspěchanost,
- vliv časové tísně při písemných zkouškách,
- bezradnost, tápání,
- špatný zápis dobře míněného postupu,
- bariéra „bílého papíru“, zejména při písemných pracích,
- nesprávné pochopení diktovaného zadání.

e) Chyby vyplývající z výuky, která není příznivá danému žáku. Učitel má zpravidla možnosti:

- Vyžaduje pouze svoji strategii – tato výuka vede k formalismu.
- Sděluje žákům hotové poznatky – výuka vede k verbalismu.
- Vyvozuje učivo za aktivní účasti žáků a objevování – výuka vede ke konstruktivismu.

Většina žáků vyžaduje spíše verbalistický přístup – řekněte nám, jak to je a my se to naučíme. Avšak pamětné učení, které není opřeno o pochopení, vede v tomto případě k tomu, že žáci neumí použít učivo v jiných situacích. Stačí např., aby se místo písmen *a, b* použila písmena jiná a již si neví rady. Navíc učivo brzy zapomenou.

Reedukace

a) Postupné zobecňování, kdy se čísla postupně nahrazují písmeny, např.:

Koupím si 3 sešity po 15 Kč a 4 tužky po 7 Kč. Kolik korun celkem zaplatím?

$$3 \cdot 15 + 4 \cdot 7$$

Koupím si 3 sešity po *a* Kč a 4 tužky po *b* Kč. Kolik korun zaplatím?

$$3a + 4b$$

Koupím si *x* sešitů po *a* Kč a *y* sešitů po *b* Kč. Kolik korun zaplatím?

$$xa + yb$$

b) Doplňování tabulek, kdy dosazujeme za proměnnou čísla a počítáme hodnotu algebraického výrazu. Začínáme jednoduchými příklady s jednou proměnnou a později s více proměnnými, např.:

a	3	5	6	8	10
$3a+1$					

x	1	2	6	8	12

y	1	4	7	8	10
$2x + 4y$					

c) Využití geometrických modelů, kdy součet $a + b$ můžeme modelovat pomocí úseček, součin $a \,.\, b$ pomocí obdélníku, součin $a \,.\, b \,.\, c$ pomocí kvádru a další modifikace jiných algebraických výrazů.

d) Zajímavé úlohy, např.

Myslím si číslo. Když je vynásobím třemi, přičtu deset o odečtu tři, vyjde mi 13. Které číslo jsem si myslel?

3.2 Rovnice

S úlohami, které se v budoucnu řeší jako rovnice, se žáci setkávají daleko dříve než na druhém stupni ZŠ. Např. formulace úlohy „Které číslo musím přičíst k číslu 20, abych dostal 100?“ se již na prvním stupni ZŠ řeší buď experimentem (postupným dosazováním), nebo pomocí inverzní operace. Tato úloha se pomocí rovnice zapíše $20 + x = 100$.

Postup řešení rovnic má svá přesná pravidla a určení řešení rovnice (kořene rovnice) probíhá na základě provádění ekvivalentních úprav (tj. úprav, při kterých rovnice zadaná a rovnice upravená mají stejnou množinu řešení). K ekvivalentním úpravám řadíme:

- Záměnu levé a pravé strany rovnice.
- Přičtení stejného čísla nebo stejného mnohočlenu k oběma stranám rovnice.
- Odečtení stejného čísla nebo stejného mnohočlenu od obou stran rovnice.
- Násobení obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly.
- Dělení obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly.

Při řešení rovnice, která obsahuje zlomky, závorky apod. se zpravidla nejprve odstraňují zlomky, dále závorky a žáci se snaží pomocí ekvivalentních úprav členy, které obsahují neznámou, „převést“ na jednu stranu a členy bez neznámé na druhou stranu rovnice.

Na základní škole se žáci většinou setkávají s úpravami ekvivalentními, na střední škole také s úpravami důsledkovými. Při provádění úprav rovnic se zpravidla pracuje se závorkami, operacemi s čísly celými, se zlomky, a při tom se mohou projevit chyby, které se u žáků s poruchami učení projevovaly při provádění běžných operací s čísly. Jde např. o sčítání a odčítání s přechodem přes základ deset, nezvládnutí základních spojů násobení a dělení přirozených čísel, problémy s počítáním s nulou, s čísly zápornými, zlomky aj. K tomu přistupují problémy s pravolevou orientací (např. při zápisu víceciferných čísel) i vliv dysgrafie při zápisech rovnic. Dále se vyskytují potíže při rozlišování algebraických výrazů a práci s nimi, znaménko „minus" před závorkou, chyby vzniklé z nepozornosti, zapomínání při provádění některých úkonů a mnoho dalších problémů vyplývajících z individuality žáka.

Uveďme několik příkladů:

Např.

a) Nevynásobí oba členy dvojčlenu:

   rovnici $2(x + 6) = x - 30$ upraví na tvar $2x + 6 = x - 30$

b) Chybně zapíše znaménko součinu záporných činitelů:

   rovnici $16 - 3(5 - 2x) = 13$ upraví $16 - 15 - 6x = 13$

c) Chybně roznásobí dvojčlen:

   rovnici $(x - 3)(x - 2) = x^2 + 20$ upraví $x^2 - 6 = x^2 + 20$

d) Nerespektují pořadí provádění operací, např. rovnici $4x + 6x : 2 = 35$ upraví do tvaru $10x : 2 = 35$.

e) Nerozlišují rovnice $\frac{1}{2} + (x + 2) = 10$ $\frac{1}{2}.(x + 2) = 10$ a obě upravují stejně do tvaru $1 + 2x + 4 = 20$ eventuelně $2x + 4 = 20$, $x + 2 = 10$

f) Chybně násobí výrazy

   Rovnici $\frac{3}{4}(x - 5) = \frac{2}{3}(x + 4)$ upraví $3 . 3 . 3(x - 5) = 2 . 4 .4(x + 4)$

g) Chybně pracují se zlomky:

$\frac{x}{2} = 6$ vypočítají x = 3

$\frac{5}{x} = 5$ vypočítají x = 25

$\frac{4}{3}x - 7 = 5$ upraví $4x - 21 = 5$

V některých případech se může stát, že po chybném výpočtu získají žáci zdánlivě správný výsledek, dokonce jim vyjde zkouška správnosti, avšak nezískají všechna řešení dané rovnice. Např. v rovnicích krátí určitým výrazem, nerespektují definiční obor, což ilustrují následující dva příklady:

a) $(x + 1)(x - 3) = x + 1$ krátí výrazem $x + 1$

$$x - 3 = 1$$

$$x = 4$$

b) $2x - 14 = x - 7$

$2(x - 7) = x - 7$ krátí výrazem $x - 7$

$2 = 1$ – rovnice nemá řešení

3.3 Slovní úlohy a problematika jejich řešení

Schopnost řešit slovní úlohy připravuje žáky k řešení úloh aplikačních a zejména pak úloh, které předkládají běžné životní situace. Potřeba zvládat běžné problémy související s placením a hospodařením s financemi patří k nejzákladnějším potřebám každého člověka. Další aplikace slovních matematických úloh souvisejí s výkonem téměř každé profese.

Slovními úlohami rozumíme úlohy, ve kterých jsou souvislosti mezi zadanými a hledanými údaji vyjádřeny slovní formulací. Vhodnými úvahami zjišťujeme, jaké operace je třeba provést se zadanými údaji, aby bylo možné nalézt údaje hledané. Proces řešení slovních úloh často bývá pro žáky s poruchami učení úkolem stěží řešitelným.

3.3.1 Příčiny problémů při řešení slovních úloh

a) Pochopení či nepochopení textu zadání slovní úlohy

Slovní úloha je zpravidla zadána textem, který je pro žáky více či méně srozumitelný jako česká věta. Nejprve se žáci setkají se zadáním slovní úlohy, nejčastěji prostřednictvím textu, který by měli přečíst s porozuměním. Zde hraje roli:

- **Délka textu**, neboť příliš dlouhý text znesnadňuje pochopení (než přečtou závěr zadání, nepamatují si, co bylo na počátku).
- **Volba použitých termínů** – některým použitým pojmům žáci nemusí rozumět.
- **Tématika slovní úlohy** – zda je pro žáky přitažlivá a srozumitelná.
- **Způsob zadáni číselných údajů** – zda jsou uvedeny prostřednictvím čísel zapsaných číslicemi (např. 6 dětí) nebo prostřednictvím číslovek (šest dětí). V prvním případě číselný údaj vnímají, ve druhém ne. Některé číselné údaje mohou být nadbytečné a žáci se snaží je za každou cenu uplatnit – např. „Babička má 4 vnuky, třem dala po dvou buchtách a jednomu dala tři buchty. Kolik buchet babička rozdělila?“ – některé děti řeší příkladem 4 + 2 + 3.
- **Vliv dalších specifických poruch učení**, zejména dyslexie (čtení textu bez porozumění) a dysgrafie (neschopnost zapsat potřebné údaje).
- **Schopnost koncentrace na daný text,** čtení s porozuměním je dalším důležitým aspektem pro správné pochopení zadání slovní úlohy. Pro žáky, u kterých je diagnostikována dyslexie, je nutné tuto poruchu u slovních úloh zohlednit.

Ze zadaného textu žáci zpravidla provádějí stručný zápis úlohy. Jde o to, aby si ujasnili, které údaje jsou zadány a který údaj je neznámý. Provádění stručného zápisu je problematické pro dysgrafiky i pro děti tzv. dvojí výjimečnosti – děti s nadáním pro matematiku se souběžnou specifickou poruchou učení (dyslexií, dysgrafií). Tyto děti považují zápis za zbytečný.

b) Zvládnutí rozboru slovní úloh

Jednou z nejdůležitějších částí řešení slovní úlohy je její rozbor, který spočívá v ujasnění si vztahů mezi hledanými a zadanými údaji. Z účelně provedeného rozboru pak vyplyne volba početních operací, které vedou k vyřešení slovní úlohy. Přepis slovního zadání do matematického jazyka se nazývá matematizace reálné situace. Součástí rozboru je také grafické znázornění vztahů ve slovní úloze (pomocí obdélníků, úseček apod.) Grafické znázornění mnoha žákům usnadní řešení slovní úlohy a následný zápis příslušného příkladu, event. rovnice či soustavy rovnic.

Pokud žáci nezvládnou pochopit vztahy mezi hledanými a zadanými údaji a z rozboru nevyplyne správná volba operace, zpravidla náhodně volí číselné údaje ze zadání a náhodně volí operace, které s nimi provádějí. Výsledek je pak často naprosto nesmyslný. Nejčastěji vyberou číselné údaje zapsané čísly (někdy jen některé) a zpravidla je sečtou.

Ukázka 1:

Autíčko pro Filipa stálo 1 870 Kč, panenka pro Zuzanku stála 1 250 Kč. O kolik Kč bylo autíčko dražší než panenka?

Tadeáš obě čísla ze zadání sečetl: $\begin{array}{r} 1\,870 \\ \underline{1\,250} \\ 3\,120 \end{array}$

Napsal odpověď: Autíčko bylo dražší o 3 120 Kč.

Problémem jsou také slovní úlohy formulace pomocí inverzních operací (tzv. antisignálem), např. *Maminka má 2 500 Kč a to je o 300 Kč více, než má babička. Kolik Kč má babička?*

Analogické problémy přinášejí slovní úlohy na odčítání, např. *Na drátě sedělo 8 vlaštovek, kolik jich odletělo, když na drátě zůstaly 3?,* kdy žáci řeší příklad 8 + 3 = 11. Podobně řeší úlohu *Měla jsem 100 Kč, pokladní mi vrátila 8 Kč, kolik Kč jsem utratila?* V tomto případě zapisují příklad 100 + 8.

Ukázka 2:

Při jarním doprodeji byly lyžařské boty zlevněny o 1 200Kč. Po slevě stály 2 300 Kč. Jaká byla jejich původní cena?

Jana počítala 2 300 − 1 200 = 1 100 a napsala odpověď: Jejich původní cena byla 1 100 Kč.

c) **Zápis příkladu** (event. rovnice nebo soustavy rovnic) k dané slovní úloze. V této části se projeví, zda žáci pochopili podstatu operací – kdy kterou operaci použijí.

Ukázka 3

Paní učitelka nakoupila 23 sešitů po 8 Kč a 23 tužek po 6 Kč. Kolik Kč celkem zaplatila?

Lukáš počítal: $x = 23 + 23$

$x = 46$

Paní učitelka zaplatila 46 Kč.

Ukázka 4:

Žáci naší třídy odevzdali 984 kg papíru do sběru v balících po 6 kilogramech. Kolik balíků to bylo?

Verunka zapsala: x = 984 . 6

x = 1 444

Bylo to 1 444 balíků.

d) Řešení příkladu

Pokud je sestaven příklad, následuje jeho vyřešení. Zde se projeví nedostatky vyplývající z problémů dyskalkuliků v oblasti provádění operací s přirozenými, event. racionálními čísly. Na úspěšnost řešení má vliv stupeň zvládnutí pamětných operací s přirozenými čísly (event. desetinnými čísly) i písemných algoritmů. Rovněž provádění odhadu výsledku (alespoň řádově) může přispět ke správnému výsledku.

Ukázka 5:

V obci Blatná je 590 obyvatel, v obci Jílová je 620 obyvatel. O kolik více obyvatel je v Jílové než v Blatné?

Tomáš zvládl perfektně formální stránku úlohy:

Zápis, výpočet, odpověď i zkoušku, avšak nezvládl odčítání s přechodem přes základ a chybu ve zkoušce zopakoval.

Výpočet: 620 − 590 = 130

Zkouška: 130 + 590 = 620

e) Odpověď

Po výpočtu následuje odpověď – někteří žáci mají problémy odpovídat na otázku slovní úlohy, protože již např. zapomněli, jaká otázka byla formulována. Poté by měla následovat zkouška správnosti řešení slovní úlohy. Tu, bohužel, málokdo provádí.

f) Provedení zkoušek správnosti

K důkladnému pochopení slovní úlohy může přispět i provedení zkoušky správnosti slovní úlohy. Je třeba odlišit zkoušku správnosti prováděných operací a zkoušku správnosti slovní úlohy (v některých úlohách je tedy třeba provést zkoušky dvě). Ukazuje se, že některým žákům se úlohu objasní až při provádění zkoušky správnosti.

Nejprve jsou řešeny slovní úlohy jednoduché, při kterých je třeba k řešení pouze jedné operace a následně slovní úlohy složené, pro jejichž vyřešení je třeba více než jedna operace. Většinu slovních úloh řešíme v oboru čísel přirozených a teprve po jejich zvládnutí řešíme slovní úlohy v oboru čísel racionálních.

3.3.2 Reedukační přístupy uplatňované při řešení slovních úloh

Reedukační přístupy můžeme uplatňovat ve dvou rovinách – v rovině přístupu žáků k řešení slovních úloh a v samotném procesu řešení slovních úloh.

A) **Odstraňování obav ze slovních úloh**

- Zbavit řešení slovních úloh formalismu.
- Odstraňování nejistoty žáků při volbě operací.
- Didaktické využití chybných řešení.
- Volba úloh, které mají pro žáka význam.
- Zvýšení aktivity žáků při tvorbě slovních úloh.

B) **Proces řešení slovních úloh**

a) Neustále učit žáky číst s porozuměním běžný text – snadný a pro žáky zajímavý – tím, že vyprávějí, co četli. Jestliže žák nezvládá dovednost číst s porozuměním běžný text, není možné vyžadovat, aby s porozuměním četl text matematický. Čtení matematického textu je pro některé žáky velmi obtížné, avšak nikdy není beznadějné. Je třeba vynaložit určité úsilí při formulování vhodné řady úloh od jednoduchého vyjádření ke složitějšímu a hlavně projevit velkou dávku trpělivosti. Pro dyslektiky zvážit alternativní způsoby zadání slovní úlohy (obrázkem, dramatizací apod.). Vhodné je diskutování o textu slovní úlohy, vyprávění, přeformulování textu žáky aj.

Volba slovních úloh by měla být pro žáky tak přitažlivá, aby pociťovali potřebu slovní úlohy řešit a aby je řešili se zájmem. Velmi vhodné je řešení komplexu úloh k jedné tématice – např. prostřednictvím projektů.

Dále je třeba vzít v úvahu, v jakém číselném oboru se žák orientuje. Nejprve je vhodné volit údaje v oboru přirozených čísel (do sta, do tisíce). Pokud žák řeší slovní úlohy s menšími čísly spolehlivě, nemusí řešit slovní úlohy s čísly v oboru do milionu, kdy mu velká čísla mohou činit problémy. Teprve po zvládnutí úloh s čísly přirozenými volíme čísla desetinná a ještě později zlomky.

b) Při přepisu slovní úlohy do matematického jazyka, tzv. matematizaci reálné situace respektujeme tento postup:

SLOVNÍ ÚLOHA *matematizace reálné situace* *MATEMATICKÁ ÚLOHA*

→

VÝSLEDEK SLOVNÍ ÚLOHY *interpretace do reality* *VÝSLEDEK MATEMATICKÉ ÚLOHY*

←

Slovní úlohu přepíšeme do matematického jazyka (příklad, rovnice, nerovnice, soustava rovnic) a řešíme tuto matematickou úlohu. Získáme výsledek matematické úlohy, který pak interpretujeme zpět do reality a získáme tak výsledek slovní úlohy.

Dále věnujeme pozornost procvičování zápisu slovního vyjádření matematickým výrazem, např.:

- dané číslo zvětši o 4,
- zapiš dvojnásobek daného čísla,
- zapiš součet dvou čísel 7 a 9,
- mám 5 Kč, ty máš o 10 Kč více než já,
- mám 20 Kč a to je o 8 Kč více než máš ty, apod.,

Naopak snažíme se naučit žáky číst matematický zápis, tj. vyjádřit slovní formulací číselný (později algebraický) výraz.

Velký význam má využití různého grafického znázornění vztahů ve slovních úlohách od obrázků k abstraktnějšímu znázornění pomocí obdélníků, úseček apod. Napomáhá žákům k pochopení vztahů mezi údaji i ke snadnějšímu určení potřebné operace.

c) Ke správné volbě početních operací přispívá jejich správné vyvození – tak, aby žákům byl naprosto jasný význam té které operace. Vhodné je využívat velmi jemné metodické řady úloh s rostoucí náročností, kdy se řešením jedné úlohy žák učí řešit úlohy další. Rovněž tvoření slovních úloh k zadaným příkladům může napomoci lepšímu pochopení.

d) Promyšlené a systematické opakování těch příkladů, které se využívají při řešení slovních úloh, vede ke snadnějšímu jejich používání. Odhady výsledků a konfrontace s realitou – zda je možný zjištěný výsledek – přispívají k zvládnutí řešení slovních úloh.

e) Vytvoření návyku zkoušky správnosti přispívá jednak k odpovědnosti za výsledky práce a jednak může přispět k objasnění vztahů ve slovní úloze. V každé slovní úloze bychom měli provádět dvě zkoušky správnosti – jednu na správnost prováděných operací, druhou na správnost řešení vlastní slovní úlohy.

3.3.3 Vztah žáků k řešení slovních úloh

Řeší žáci rádi slovní úlohy?

Jak přistupují k řešení slovních úloh?

Mají potřebu řešit slovní úlohy? Vidí důvod, proč je řešit?

Jaké náměty slovních úloh žáky osloví? Jsou schopni najít aplikační úlohy z praktického života?

- Pokud žáci nepochopí slovní úlohu nebo nemají důvěru ve své schopnosti, zpravidla rezignují a úlohu se vůbec nesnaží řešit. Uvádějí, že „tomu nerozumí“, avšak čemu nerozumí, nedokáží formulovat.

- Někteří žáci vyžadují instruktivní návody pro řešení slovních úloh – mechanické postupy, které formálně uplatňují bez vlastní myšlenkové činnosti. Dokáží-li zařadit úlohu do určité skupiny podobných úloh, úlohu řeší.

- Žáci náhodně vyberou některé údaje (nebo všechny údaje) ze zadání a zkouší, které operace s nimi mohou provádět, aby úlohu vyřešili.
- Někteří žáci hledají složitá řešení jednoduchých situací vyjádřených ve slovních úlohách.
- Po chybném řešení je uveden správný výsledek – získaný např. nápovědou od spolužáka nebo opsáním. Existují však také úlohy, ve kterých je možné dojít ke správnému výsledku i pochybném postupu.
- U žáků se mohou projevovat psychické bariéry – obavy ze slovních úloh, obavy, že jimi navržené řešení nebude správné.
- Žáci řeší jednoduché slovní úlohy, ve kterých využívají sčítání, odčítání, násobení event. dělení, problémy jim činí slovní úlohy na porovnávání pomocí vztahů „o několik více – méně“, „několikrát více – méně“.
- Řešení složených slovních úloh je problematické, neboť postižení a matematizace vztahů ve složené slovní úloze vyžaduje důkladný a správný rozbor, analýzu vztahů a důsledné sledování otázky po celou dobu řešení.

3.3.4 **Metodická řada úloh** (porovnávání pomocí vztahů „o *n* více“, „o *n* méně“, „*n* krát více“, „*n* krát méně“)

Proto, aby žáci řešili slovní úlohy s pochopením a každé číslo pro ně mělo konkrétní význam, je třeba poukázat na formulaci úloh, ve kterých se vyskytuje pouhé sčítání nebo odčítání a úloh, ve kterých se vyskytuje porovnávání. V následujících ukázkách se omezíme jen na zdůraznění podstatných jevů, nikoliv na podrobné řešení.

A) Úlohy na sčítání a odčítání

1. Jirka má 120 modelů autíček, dostal ještě 15. Kolik modelů má Jirka celkem?

2. Petr měl 120 korun, za15 korun si koupil sešit. Kolik korun mu zbylo?

V těchto úlohách vystupuje vždy jeden objekt, jeden žák. Graficky můžeme znázornit pomocí dvou úseček

1. Jirka: 120 15

2. Petr 120

15

Úlohy řešíme pomocí operací sčítání nebo odčítání:

$120 + 15 = 135$ $120 - 15 = 105$

B) Úlohy na porovnávání pomocí vztahů „o *n* více“, „o *n* méně“

3. Jirka má 120 modelů autíček, Petr má o 15 modelů více než Jirka. Kolik modelů má Petr?
4. Petr má 135 modelů autíček, Jirka má o 15 modelů méně než Petr. Kolik modelů má Jirka?

V těchto úlohách vystupují dva objekty (dva žáci) a tuto skutečnost je třeba respektovat při grafickém znázornění. Dále třeba vzít v úvahu vzájemnou souvislost, neboť pokud má jeden žák o několik modelů méně než druhý, pak první má o tolik modelů více. Pokud se žáci nenaučí správně řešit jednoduché slovní úlohy na porovnávání, mají problémy při řešení úloh složených (kdy se např. ptáme, kolik modelů mají dohromady).

3. Jirka 120

Petr 120 15

$120 + 15 = 135$

4. Petr 135

15

Jirka ______________________ 135 − 15 = 120

Nevhodné znázornění této úlohy by bylo:

Petr 135

____

Jirka 15

____

Toto grafické znázornění by bylo znázornění úlohy: Petr měl 135 modelů, Jirka měl také 135 modelů a 15 modelů rozdal.

I když vyjádření těchto úloh je analogické jako úloh 1. a 2., citově se jedná o úplně jinou situaci.

Také používání mnemotechnické pomůcky: Více – přičítám, méně – odčítám, není vždy vhodné, protože při formulaci úloh s tzv. antisignálem tato pomůcka neplatí, jak ilustrují následující úlohy.

Úlohy na porovnávání pak mohou být formulovány také takto:

5. Jirka má 120 modelů autíček a to je o 15 modelů méně, než má Petr. Kolik modelů má Petr? (120 + 15 = 135)

6. Petr má 135 modelů autíček a to je o 15 modelů více než má Jirka. Kolik modelů má Jirka? (135 − 15 = 120)

7. Jirka má 120 modelů autíček, Petr má 135 modelů. Kdo má více (méně) modelů a o kolik? (135 − 120 = 15)

8. Jirka má 120 modelů autíček, Petr má o 15 modelů více než Jirka. Kolik modelů mají dohromady? 120 + (120 + 15) = 255

C) Úlohy využívající násobení nebo dělení

9. Alenka dala každé ze tří kamarádek po pěti bonbónech. Kolik bonbónů rozdělila?

o o o o o   o o o o o   o o o o o

$3 . 5 = 15$

10. Terezka rozdělila 15 bonbónů mezi tři kamarádky. Kolik bonbónů měla každá kamarádka, když měly všechny stejně?

A	B	C
o	o	o
o	o	o
o	o	o
o	o	o
o	o	o

$15 : 3 = 5$

11. Jitka dělila 15 bonbónů po třech. Kolik kamarádek podělila?

o o o   o o o   o o o   o o o   o o o

$15 : 3 = 5$

D) Úlohy na porovnávání pomocí vztahů „n krát více“, „n krát méně“

12. Jana má 60 korun, Eva má třikrát více korun než Jana. Kolik korun má Eva?

Jana 60

____

Eva ______________ ____________ ___________

$3 . 60 = 180$

13. Eva má 180 korun, Jana má třikrát méně korun než Eva. Kolik korun má Eva?

Při grafickém znázorňování této úlohy je vhodné nejprve znázornit úsečkou počet korun Jany a poté počet korun Evy s využitím vztahu: Jestliže má Jana třikrát méně než Eva, pak Eva má třikrát více než Jana.

Jana _____________

Eva 180

______________ _______________ _______________

180 : 3 = 60

Další formulace těchto úloh mohou být:

14. Jana má 60 korun a to je třikrát méně korun, než má Eva. Kolik korun má Eva? (60 . 3 = 180)

15. Eva má 180 korun a to je třikrát více než má Jana. Kolik korun má Jana? (180 : 3 = 60)

16. Jana má 60 korun, Eva má 180 korun.
    Kolikrát má Eva více korun než Jana? Kolikrát má Jana méně korun než má Eva? (180 : 60 = 3)

17. Jana má 60 korun, Eva má třikrát více než má Jana. Kolik korun mají dohromady? (60 + 3 . 60 = 240)

3.4 Slovní úlohy řešené rovnicemi

V návaznosti na řešení slovních úloh aritmeticky se na druhém stupni ZŠ řeší slovní úlohy pomocí rovnic. Největší problém opět spočívá v matematizaci situace, kdy je třeba text slovní úlohy zapsat matematický jazykem, v tomto případě rovnicí nebo soustavou rovnic. Označení neznámé a vyjádření vztahů mezi zadanými údaji, pomocí výrazů a zápis rovnice je náročný proces, ve kterém se uplatňuje značná část dříve probíraného učiva a zároveň požadavek na vysoký stupeň myšlení.

Přitom je důležité poukazovat na souvislosti řešení slovních úloh postupem aritmetickým i pomocí rovnic či jejich soustav. Pro ilustraci uveďme řešení jedné známé úlohy:

Babička má na dvorku slepice a králíky. Dohromady mají 13 hlav a 38 noh. Kolik má babička králíků a kolik slepic?

1. Řešení pomocí experimentu: nakreslíme 13 hlav, nejprve každé hlavě přiřadíme dvě nohy (26), potom zbylé nohy (12) rozdělíme po dvou – na obrázku vidíme 6 čtyřnohých zvířat – králíků a 7 dvounohých – slepic.

2. Řešení aritmetické:
   Kdyby babička měla jen slepice, měly by 13 . 2 = 26 noh. Protože zvířata mají dohromady 38 noh, zbývá 28 − 26 = 12, 12 : 2 = 6. Babička má 6 králíků a 7 slepic.

3. Řešení pomocí rovnice o jedné neznámé:
   Označíme počet králíků x, slepic pak bude $13 - x$. Sestavíme rovnici:

$$4x + 2(13 - x) = 38$$

4. Řešení pomocí soustavy dvou rovnic o dvou neznámých:
   Označíme počet králíků x a počet slepic y. Sestavíme soustavu rovnic:

$$x + y = 13$$
$$4x + 2y = 38$$

Předpokladem pro úspěšné řešení slovních úloh rovnicemi je pochopení situace tak, aby zápis rovnicí vyjadřoval vztahy mezi údaji uvedenými v zadání. Proto je třeba se žáky s poruchami učení nutné zvládnout vztahy a jejich aritmetické i algebraické vyjádření a nejprve řešit analogické úlohy uvedené v předchozí kapitole. Dále třeba zvládnout dříve probíraná témata, jako jsou operace s desetinnými čísly, operace se zlomky, procenta, poměr, vztahy mezi prvky v geometrických útvarech apod.

Postup řešení slovních úloh pomocí rovnic má svá pravidla a je třeba vyvarovat se formalismu.

Při řešení slovních úloh je vhodné postupovat podle schématu:

- Pozorně přečíst text slovní úlohy.
- Označit neznámou.
- Pomocí neznámé a dalších údajů zapsat matematické vztahy mezi nimi.
- Sestavení rovnice.
- Vyřešení rovnice.
- Dvě zkoušky správnosti – zkouška správnosti řešení rovnice
- ▪ zkouška správnosti slovní úlohy.
- Zápis odpovědi.

Pro žáky s poruchami učení je vhodné grafické znázornění vztahů v zadání úlohy.

Vzhledem k tomu, že slovních úloh řešených rovnicemi je nepřeberné množství a některé úlohy se řadí do určitých typů podle charakteru jejich řešení (např. slovní úlohy o pohybu, o společné práci, o směsích o věku, úlohy využívající zápisu čísla v desítkové soustavě apod.), uvedeme ukázku řešení jedné úlohy:

Ve výprodeji byla snížena cena svetru o 420 Kč. Honzík si spočítal, že čtyři svetry za novou cenu jsou o 200 Kč levnější, než tři svetry za starou cenu. Jaká byla cena svetru před slevou a jaká je po slevě?

Údaje ze zadání můžeme zapsat přehledně do tabulky, jako neznámou označíme starou cenu:

Stará cena	Nová cena	Cena tří svetrů za starou cenu	Ceny čtyř svetrů za novou cenu
x	x − 420	3x	4(x − 420)

rozdíl 200 Kč

Sestavení rovnice:

$$3x - 200 = 4(x - 420) \quad \text{nebo} \quad 3x = 4(x - 420) + 200$$

Pro žáky je nejobtížnější uvědomit si, jak zapsat rozdíl, aby byla splněna rovnost vztahů.

Po vyřešení rovnice získáme: $x = 1\,480$
(Stará cena je 1 480 Kč, nová cena je 1 060 Kč.)

Provedeme zkoušku správnosti řešení rovnice a zkoušku správnosti řešení slovní úlohy. Zkouška řešení slovní úlohy je nutná proto, že když žák sestaví rovnici špatně, zkouška rovnice sice vyjde, ale řešení neodpovídá zadané slovní úloze. V tomto případě by tato chyba nastala, kdyby žák sestavil rovnici
$3x = 4(x - 420) - 200$, tedy nepochopil, jak zapsat rozdíl v cenách.
Zkouška slovní úlohy: *cena tří svetrů za starou cenu: 3 . 1 480 = 4 440*
cena čtyř svetrů za novou cenu: 4 . 1 060 = 4 240
rozdíl v cenách: 4 440 − 4 240 = 200.
Je pochopitelné, že pokud je úloha řešena správně, obě zkoušky jsou stejné.

Pokud žák označí neznámou x novou cenu svetru, pak budou vztahy vyjádřeny:

Nová cena	Stará cena	Cena čtyř svetrů za novou cenu	Cena tří svetrů za starou cenu
x	x + 420	4x	3(x + 420)

rozdíl 200

Sestavení rovnice:

$$4x = 3(x + 420) - 200 \quad \text{nebo} \quad 4x + 200 = 3(x + 420)$$

Po vyřešení získáme $x = 1\,060$
(Nová cena je 1 060 Kč, stará cena je 1 480 Kč.)

Uvedený příklad nastiňuje složitost řešení slovních úloh pro žáky s poruchami učení a nutnost citlivého přístupu učitele k výběru úloh, k sestavení metodických řad i k hodnocení řešení úloh žáky. Zde má velký význam rozbor chybných řešení a využití didaktického potenciálu chyby.

4 JEDNOTKY MĚR

Vyjádření studentů:

- *Měla jsem problémy s převody jednotek. Maminka mi ukázala naši zahradu. Dodnes vím, že naše zahrada má 14 arů a že to je 1 400 m^2.*

- *Pamatuji si životní zážitek, kdy paní učitelka s námi v přírodě vytyčovala čtverec o výměře 1 aru a čtverec o výměře 1 hektaru. Pořád ji vidím, jak běhá po poli a my stojíme jako vytyčovatelé těchto čtverců.*

- *Pamatuji si, že jsem dlouho nemohl pochopit jednotky času na kruhovém ciferníku hodin, ač mi to všichni členové rodiny neustále ukazovali.*

V rámci mnoha činností se žáky se specifickými poruchami učení v matematice se jako jeden ze závažných problémů objevilo počítání s jednotkami měr. Chápání jednotek měr – tj. jednotek délky, obsahu, objemu, hmotnosti, času a měny i vztahů mezi nimi je pro ně svízelné. Úkolem je najít komunikační cestu, která žáky osloví a volit takové metody práce, které žákům usnadní pochopení tohoto učiva. Úspěšné zvládnutí základních jednotek je předpokladem pro to, aby žáci mohli dále pracovat s jednotkami složenými, jako jsou např. jednotky rychlosti, hustoty, síly, astronomické jednotky a další a úspěšně je požívali v ostatních výukových předmětech.

Počítání s fyzikálními veličinami a s pojmenovanými čísly přináší žákům řadu potíží, z nichž nejčastější jsou:

- žáci nemají správnou představu o veličině ani o jednotce,
- neumí odhadnout alespoň přibližně velikost míry určité veličiny,
- mají problémy s převody jednotek příslušných veličin,
- nechápou souvislost mezi násobením mocninami deseti – chápou násobení ve smyslu 5 m. 10 = 50 m, když se úsečka zvětší desetkrát, ale již ne ve smyslu 5 m = (5.10) dm, kdy se jedná o tutéž délku úsečky vyjádřenou jinou jednotkou,
- nepochopí souvislost převodů jednotek měr a násobení a dělení přirozených nebo desetinných čísel čísly 10, 100, 1 000, atd.,
- obtížně chápou, že „menších“ jednotek je „více“ a naopak – např. 5 dm = 50 cm, 500 cm = 5 m,

- neumí samostatně využít poznatků z reálného života.

Pro práci se žáky je vhodný metodický postup při postupném seznamování se s jednotkami měr. Některé kroky tohoto postupu jsou:

4.1 Vytváření správné představy o jednotce příslušné veličiny

Tuto představu si žáci vytváří jednak pomocí konkrétních předmětů, které používají, prostřednictvím částí svého těla, pomocí měřidel (různých typů měřidel např. délky, hmotnosti aj.)

- Kolik cm měříš – jaká je tvoje výška. Vyjádři svoji výšku v decimetrech, v metrech.
- V jaké výšce svého těla můžeš ukázat 1 metr?
- Kolik cm naměříš, když rozpažíš?
- Ukaž pomocí rozpažení jeden metr.
- Jakou šířku má tvoje dlaň?
- Jakou délku má tvoje chodidlo? Má stejnou délku jako tvoje předloktí?
- Jakou jednotku může představovat šířka tvého ukazováčku?
- Dokážeš pomocí prstů ukázat 1 decimetr?
- Jakou máš hmotnost v kilogramech?
- Představ si množství písku, papíru, peří, železa – každé o hmotnosti 1 kg. Čím se tato množství od sebe liší?
- Kolik minut trvá tvoje cesta do školy?
- Kolik litrů tekutin denně vypiješ? Do jaké nádoby by se toto množství vešlo?
- Kolik decilitrů polévky se vejde do hlubokého talíře?

4.2 Měření předmětů

Dříve než začneme učit žáky převody jednotek, je třeba provádět konkrétní měření předmětů a vyjadřování v různých jednotkách – alespoň ve dvou různých (např. metrech a decimetrech), pokud je možné i ve třech různých jednotkách téže veličiny. Měříme rozměry třídy, učebnic, školních sešitů, stolu, chodby, hřiště, určujeme rozměry hřišť pro různé sporty (např. kopaná, volejbal, košíková, házená, hokej, tenis), rozměry bazénu. Určujeme hmotnost učebnic, školní aktovky s pomůckami, předmětů denní potřeby, nákupu aj. Vytyčujeme různé útvary daných rozměr (úsečky, obdélníky, čtverce) – např. běžeckou dráhu délky 60 m, 100 m, čtverec o délce strany 10 metrů (1 ar), hřiště pro vybíjenou apod.

4.3 Procvičování odhadů

K upevnění učiva o jednotkách má nezastupitelnou úlohu procvičování odhadů velikostí předmětů a následně porovnání se skutečnými rozměry:

- Jakou délku má asi cesta od domu ke škole?
- Jaká je vzdálenost do nejbližšího města, vesnice?
- Jakou rozlohu má rybník, les, park, atd.?
- Jakou výšku má naše škola?
- V jaké výšce mohou létat letadla?
- Jakou hmotnost má nákup, který nesete domů?
- Uneseš milion hřebíčků, z nichž každý má hmotnost jeden gram?
- Kolik litrů vody se vejde do vany, ve které se koupeš? – jak se dříve měřilo.

4.4 Převody jednotek

Pro správné pochopení, by si měl učitel uvědomit úskalí, která provázejí tyto činnosti, a měl by dětem sestavovat systém cvičení, která pomohou učivo zvládnout. Jedná se zejména o:

- násobení a dělení čísel přirozených i desetinných čísly 10, 100, 1 000, atd.
- sledování možností žáků při převodech jednotek měr, neboť někteří žáci raději pracují s čísly (aritmetický typ), pamatují si vztahy mezi jednotkami a jsou schopni je uplatnit. Další skupina žáků chápe spíše algebraicky a pamatuje si tabulky přímé úměrnosti sestavené pro jednotlivé jednotky. Pro žáky, kteří potřebují neustálé činnosti, jsou připraveny, tak zvané mřížky pro převody jednotek měr, které velmi usnadňují práci s převody. Mřížky z kartonu se doplňují kartičky s čísly, které se umisťují pod příslušnou jednotku a přímo jsou uvedeny převody.

Některým žákům mohou napomoci předpony vyjadřující násobky nebo díly jednotek. Uvádíme některé:

mega			kilo	hekto	deka	základní jednotka	deci	centi	mili			mikro
1 000000	.	.	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,01	.	.	0,000001

4.5 Jednotky délky

Jednotky délky ilustrujeme na nejrůznějších měřidlech běžně v praktickém životě používaných (např. metr dřevěný, krejčovský, skládací, pásmo) a na nich vhodně upozorňujeme na menší jednotky na nich vyznačené.

1. využití převodních vztahů:

1 m = 10 dm

1 dm = 10 cm

1 km = 1 000 m 1 cm = 10 mm

Dále pak:

1 dm = $\frac{1}{10}$ m = 0,1 m, 1 cm = $\frac{1}{100}$ m = 0,01 m, 1 mm = $\frac{1}{1000}$ m = 0,001 m, atd.

2. využití funkčních závislostí např.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cm	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000

Tuto tabulku žáci využívají oběma způsoby: 5 m = 500 cm, 400 cm = 4 m a také při požívání desetinných čísel, např. 6,5 m = 650 cm. Žák využije poznatku, že 6,5 m je mezi 6 m a 7 m, tedy počet centimetrů bude mezi 600 cm a 700 cm.

3. mřížka k převodu jednotek délky:

		km			**m**	dm	cm	mm
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Mřížku z tvrdšího papíru má každý žák, rozměry čtverců v mřížce jsou 3 cm krát 3 cm. Doplníme ji čtverci stejných rozměrů s čísly, která pokládáme do dolní části mřížky. Můžeme také přidat desetinnou čárku.

		km			**m**	dm	cm	mm
0	0	0	0	0	6	0	0	0

Z obrázku je patrný převod: 6 m = 60 dm, 6 m = 600 cm, 6 m = 6 000 mm,

6 m = 0,006 km.

Typy úloh:

a) jednoduché převody větší jednotky na menší, např. 7,5 dm = 750 mm,
b) jednoduché převody menší jednotky na větší, např. 1 250 mm = 1,250 m,
c) složitější převody, např. 7 m 2 cm = 702 cm = 7,02 m.

4.6 Jednotky obsahu

Názornou představu jednotek obsahu vytvoříme např. tak, že vytýčíme např. čtverec, který má stranu 1m a obsah 1 m^2 (přitom obsah 1 m^2 může mít rovinný útvar jakéhokoliv tvaru). Čtverec je možné vhodně rozdělit na 100 dm^2.

Model 1 dm^2 a 1 cm^2 mohou mít žáci vystřižené z papíru, 1 mm^2 je vhodné ilustrovat na milimetrovém papíře. Představu 1 aru můžeme ilustrovat pomocí čtverce o straně 10 m. Obsah 1 hektaru mají přibližně dva fotbalové stadiony.

1. Převodní vztahy:

$$1\ m^2 = 100\ dm^2$$

$$1\ dm^2 = 100\ cm^2$$

$$1\ cm^2 = 100\ mm^2$$

$$1\ km^2 = 100\ ha$$

$$1\ ha = 100\ a$$

$$1\ a = 100\ m^2$$

Podobně

1 dm^2 = $\frac{1}{100}$ m^2 = 0,01 m^2,   1 cm^2 = $\frac{1}{10000}$ m^2 = 0,0001 m^2

2. využití funkčních závislostí

m^2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
dm^2	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000

3. mřížka k převodu jednotek obsahu:

		km^2	ha	a	**m^2**	dm^2	cm^2	mm^2
0 | 0	0 | 0	0 | 0	0 | 0	0 | 0	0 | 0	0 | 0	0 | 0	0 | 0

25 m^2 = 2 500 dm^2 = 250 000 cm^2

25 m^2 = 0,25 a = 0,0025 ha

4.7 Jednotky objemu

Základní jednotkou objemu je 1 m^3. V praxi se používají jednak jeho díly (dm^3, cm^3, mm^3) a také jednotky dutých měr – litr a jeho násobky a díly. Je třeba zvládnout i vztah mezi těmito jednotkami objemu.

1. Využití převodních vztahů

1 m^3 = 1 000 dm^3

1 dm^3 = 1 000 cm^3

1 cm^3 = 1 000 mm^3

1 dm^3 = 1 *l*   1 m^3 = 1 000 *l*   1 m^3 = 10 *hl*

1 *l* = 10 *dl*   1 *hl* = 100 *l*

1 *dl* = 10 *cl*

1 *cl* = 10 *ml*

$1\ dm^3 = \frac{1}{1000} m^3 = 0{,}001 m^3$ $\qquad$ $1\ l = \frac{1}{100} hl = 0{,}01\ hl$

2. Využití funkčních závislostí

m^3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
dm^3	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000	7 000	8 000	9 000	10 000

3. mřížka k převodu jednotek objemu

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
			hl		*l*	*dl*	*cl*	*ml*			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4.8 Jednotky hmotnosti

Jednotky hmotnosti ilustrujeme pomocí vážení, kdy žáci určují hmotnosti nejrůznějších předmětů. Využíváme štítků o hmotnosti potravin z digitálních vah z obchodů, eventuelně baleného zboží s vyznačenou hmotností. V Mezinárodní soustavě jednotek měr SI (System internacionál) jsou povolené jednotky hmotnosti: kilogram, gram, tuna.

Převodní vztahy: $1\ kg = 1\ 000\ g$ $\quad$ $1\ g = \frac{1}{1000} kg = 0{,}001\ kg$

$1\ t = 1\ 000\ kg$ $\quad$ $1\ kg = \frac{1}{1000} t = 0{,}001\ t$

Další jednotky, užívané v praxi, nikoliv však v obchodním styku jsou dekagram a metrický cent.

$1\ q = 100\ kg$

$1\ kg = 100\ dkg$

4.9 Jednotky času

Problémy s jednotkami času vyplývají jednak z používání šedesátkové soustavy při některých převodech, jednak obtížnějšího znázornění času na kruhovém ciferníku i z digitálního záznamu času.

1 den = 24 h

1 h = 60 min 1 h = 3 600 s

1 min = 60 s

Dále se sekundy dělí na desetiny, setiny, tisíciny, atd.

Žáci se obtížně vyrovnávají se sdělením a zápisem typu:

Čtvrt na pět 4:15 nebo 16:15

Problémy činí převody části hodiny na minuty a na následný zápis pomocí desetinného čísla, např.:

$\frac{1}{4}$ h = 15 min = 0,25 h

$\frac{1}{5}$ h = 12 min = 0,2 h

Pro využívání jízdních řádů, vyhledávání času na CD apod. je třeba, aby žáci zvládli sčítání a odčítání časových údajů a využívali potřebných převodů.

Sčítání:

Sčítáme zvlášť minuty (event. sekundy) a zvlášť hodiny. Pokud počet minut (sekund) je větší než 60, převedeme minuty na hodiny (event. sekundy na minuty).

Př. 2h 45 min

$\underline{\text{ 5h 38 min}}$

7h 83 min = 8 h 23 min

Odčítání:

Při odčítání opět odčítáme zvlášť minuty (event. sekundy) a zvlášť hodiny. Pokud je počet minut menšence větší než počet minut menšitele, je odčítání bez problémů, pokud je tomu naopak, pak menšence upravíme tak, aby v menšenci byl větší počet minut než v menšiteli, jednu hodinu převedeme na minuty.

Př. 12h 48 min

− 8h 23 min

4h 25 min

Př. 12h 23 min upravíme 11h 83 min

− 8h 45 min − 8h 45 min

3h 38 min

4.10 Jednotky měny

I když se v současném platebním styku haléře příliš nepoužívají, ceny vyjádřené v haléřích se v konečné platbě zaokrouhlují na celé koruny, platí převod:

1 Kč = 100 hal

K převodům mezi různými měnami se používají aktuální kurzovní lístky. Často používaný převod je mezi eurem a korunou, avšak ten se řídí právě platnými aktuálními hodnotami.

Na druhém stupni se k základním jednotkám výše uvedeným přidávají např. jednotky rychlosti, jednotky hmotnosti, které jsou složené. V rámci mezipředmětových vztahů se zejména ve fyzice žáci seznamují se vztahy mezi rychlostí, dráhou a časem rovnoměrného pohybu, vztahy mezi tlakovou silou, tlakem a obsahem plochy, na niž síla působí, hydrostatickým tlakem, jednotkami napětí, intenzity a odporu apod.

Jednotkou rychlosti je $\frac{m}{s}$, $\frac{km}{h}$ také se používá např. $\frac{km}{s}$.

Jednotkou hustoty $\frac{kg}{m^3}$, také $\frac{g}{cm^3}$.

5 GEOMETRIE

Obsah učiva geometrie na druhém stupni ZŠ je v RVP ZV uvedena v tematickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru a je zaměřen zejména na rovinné útvary, polohové a metrické vlastnosti, prostorové útvary, konstrukční úlohy, geometrická zobrazení. Pro některé žáky se specifickými poruchami učení může být geometrie příznivější než aritmetika a algebra. Školská matematika se však orientuje více na početní stránku (výpočty obvodů a obsahů rovinných geometrických útvarů a povrchů a, objemů těles), než na rozvíjení geometrických představ. Pro žáky s dysgrafií může být problémem rýsování geometrických útvarů a konstrukční úlohy.

Základní problémy žáků se specifickými poruchami učení v oblasti početní geometrie:

a) Správné chápání pojmů obvod a obsah geometrického útvaru (pokud nejsou pojmy správně vyvozeny, nerozlišují je, pletou si je).
b) Nerozlišení geometrického útvaru a jeho míry (velikosti) − (na otázku „co je obsah obdélníku“ odpovídají „to je ten obdélník“).
c) Pouhé pamětné se naučení vzorců a vztahů snižuje význam geometrického učiva a soustřeďuje se jen na dosazování a aritmetické operace.
d) Práce s jednotkami měr.
e) Problémy v provádění operací s racionálními čísly.

Základní metody práce v geometrii:

- Rozvíjení geometrické a prostorové představivosti.
- Manipulativní činnost každého žáka.
- Rozvíjení konstrukčních dovedností žáků.
- Odvození vztahů pro výpočty na základě vlastní činnosti žáků.
- Upevnění geometrického učiva řešením aplikačních úloh.
- Vytváření projektů s geometrickým obsahem.

Vzhledem k tomu, že učitel by měl vytvářet matematické pojmy v duchu správných definic těchto pojmů (i když je od žáků nevyžaduje), měl by vytvořit představu úsečky, polopřímky, přímky jako výchozích pojmů. V návaznosti na tyto pojmy se postupně buduje pojem úhlu, trojúhelníku, čtyřúhelníků, kružnice, kruhu a vždy se dbá na precizní vybudování těchto pojmů. Pokud žákům není jasné, co který geometrický útvar je, mají problémy v dalších částech učiva. Výhodou je dostupná motivace, neboť geometrické útvary nás obklopují v každém okamžiku.

6 DIDAKTICKÉ HRY NA 2. STUPNI ZŠ

Význam didaktické hry pro žáky se specifickými poruchami učení je nezastupitelný a je vhodné využívat každé příležitosti k jejich zařazení do výuky. I když na prvním stupni je více příležitostí, i na druhém stupni ZŠ se najdou vhodná témata k realizaci didaktické hry. Zásadou jejich využívání je, aby z didaktické hry vzešel nový poznatek, nebo aby se upevnilo určité učivo, aby bylo využito procesu objevování vlastním přičiněním žáků. Nepředáváme žákům hotové poznatky, ale hra by je měla vést cestou poznání. Teorie didaktických her je popsána v literatuře, např. Krejčová 2009. Pro ilustraci uvedeme několik námětů k tématu Desetinná čísla a Zlomky, které jsme využívali právě při práci se žáky s poruchou učení v matematice.

6.1 Hry k tématu zlomky a desetinná čísla

Vytvoření pojmu zlomku jako reprezentanta racionálního čísla je pro některé žáky náročné a vyžaduje delší období, než dojde k potřebnému zobecnění. Ke snadnějšímu chápání mohou přispět některé postupy, které hravou formou a vlastní činností žáků podpoří význam zlomku jako části celku a později i jako racionálního čísla. K činnostem, experimentům a hrám můžeme využít předmětů běžné spotřeby, např. PET lahví nebo obalů na různé nápoje. Uvedené příklady jsou chápány jako náměty k rozvíjení další tvořivé činnosti žáků. Náměty jsou jen prostředkem k řádné výuce jednotlivých témat.

6.1.1 Zlomek jako část celku, výpočet zlomku z čísla

Pomůcky: uzávěry od PET lahví, různě barevné.

1. Jedna třetina souboru jsou modré uzávěry a je jich 12. Zbytek jsou červené. Kolik uzávěrů je červených? Kolik uzávěrů je celkem v souboru?

Řešení: Červených uzávěrů je 24, celkem jich je 36.

2. Sestavte soubor 40 uzávěrů od PET lahví tak, aby $\frac{1}{8}$ z nich byly modré uzávěry, $\frac{2}{5}$ z nich byly červené uzávěry, $\frac{1}{10}$ z nich byly žluté uzávěry, $\frac{1}{8}$ z nich byly zelené uzávěry a $\frac{1}{4}$ byly bílé uzávěry.

Řešení: Modré 5, červené 16, žluté 4, zelené 5, bílé 10.

3. Na hromádce je 36 uzávěrů stejné velikosti a různých barev. Některé jsou modré, některé červené, jiné zelené a další jsou žluté. Pravděpodobnost výběru červeného uzávěru je $\frac{5}{9}$. Kolik je na hromádce červených uzávěrů?

Řešení: Červených uzávěrů je 20.

6.1.2 Zápis zlomků a desetinných čísel, rovnost zlomků

1. Pohybová nonverbální hra – rovnost zlomků
   Každému žáku třídy nalepte na záda lísteček se zapsaným zlomkem. Cílem hry je, aby se žáci bez jediného slova seskupili do skupin, ve kterých je vyjádřeno jedno číslo. Ve skupinách pak např. mohou být žáci, kteří mají nalepená čísla:

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{9}, \frac{5}{15}, \frac{4}{12}, \frac{15}{45}$$

$$\frac{1}{4}, \frac{5}{20}, \frac{8}{32}, \frac{10}{40}, \frac{9}{36}$$

$$\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \frac{12}{30}, \frac{10}{25}$$

2. Zápis zlomků a desetinných čísel
   Pomůcky: obaly od nápojů (PET lahve, krabičky od nápojů aj.) láhev o objemu 1 litr.

   Na obalu krabičky je zapsáno: 0, 25 *l*. Kolikrát se vejde do 1 litru − 4 krát.

   Na obalu krabičky je zapsáno: 0, 2 *l*. Kolikrát se vejde do 1 litru − 5 krát.

0,25 $l = \frac{1}{4}$ l 0,2 $l = \frac{1}{5}$ l 0,5 $l = \frac{1}{2} l$

Pozor: 0,3 l není $\frac{1}{3}$ l

0,3 $l = \frac{3}{10}$ l 0,7 $l = \frac{7}{10} l$ 0,75 $l = \frac{3}{4} l$ 1,5 $l = \frac{3}{2} l$

6.1.3 Operace se zlomky

Pomůcky: PET lahve a krabičky od nápojů různých objemů ($\frac{3}{2}$ *l*, 1 *l*, 2 *l*, $\frac{1}{2} l, \frac{1}{4} l, \frac{1}{3} l$)

1. Sčítání zlomků a desetinných čísel

Pomocí PET lahví a vody se přesvědčte, že

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 0,50 + 0,25 = 0,75

$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$

Do litrové láhve nalijete postupně $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ vody. Jaká část vody přeteče?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{13}{12}$$

2. Odčítání zlomků a desetinných čísel

Z plné lahve vody o objemu $\frac{3}{2}$ litru odlijte $\frac{1}{4}$ litru vody. Kolik vody zůstane v lahvi?

$\frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ 1,50 − 0,25 = 1,25

3. Násobení zlomků a desetinných čísel přirozeným číslem

Kolik litrů vody obsahuje balení 6 lahví, když každá má objem $\frac{3}{2}$ litru?

$6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{18}{2} = 9$ $6 \cdot 1{,}5 = 9$

4. Dělení zlomků

a) Dělení zlomku přirozeným číslem – experimentujeme:

Jednu polovinu litru vody rozdělte na 2 stejné části: $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$

Tři poloviny litru vody rozdělte na 3 stejné části: $\frac{3}{2} : 3 = \frac{1}{2}$

b) Dělení přirozeného čísla zlomkem

3 litry vody rozdělte do skleniček o objemu $\frac{1}{4}$ litru. Kolik skleniček naplníte?

Experimentem zjistíme, že z 1 litru získáme 4 skleničky, ze dvou litrů 8 skleniček, ze tří litrů 12 skleniček.

Tedy $3 : \frac{1}{4} = 12$

50 litrů moštu rozlijte do lahví o objemu $\frac{1}{2}$ litru. Kolik lahví naplníte?

$50 : \frac{1}{2} = 100$

c) Dělení zlomku zlomkem

Vodu z láhve o objemu $\frac{3}{2}$ litru rozdělte do lahví o objemu

a) $\frac{1}{2}$ litru b) $\frac{1}{4}$ litru.

Kolik lahví v jednotlivých případech naplníte?

a) $\frac{3}{2} : \frac{1}{2} = 3$

b) $\frac{3}{2} : \frac{1}{4} = 6$

Z těchto experimentálních činností se vychází při vyvozování dělení zlomků a při formulaci příslušných pravidel.

7 VLIV FORMALISMU VE VÝUCE MATEMATIKY

Formalismus ve školské matematice je jedním z nejnebezpečnějších faktorů, které školskou matematiku provázejí a pro žáky s poruchou učení jednou z dalších překážek v chápání matematických pojmů a zvládání matematického učiva. Formalismus se projevuje v práci učitele i v práci žáků. Hlavními jeho projevy jsou:

- Převaha formy nad obsahem.
- Převaha paměti nad porozuměním.
- Šablonovitost poznatků.
- Nedostatek nebo přemíra názoru.
- Formální přístupy k hodnocení žáků s poruchami učení.

7.1 Převaha formy nad obsahem

Formalismus je nedostatek kognitivní struktury, který spočívá v tom, že při vytváření abstraktních matematických pojmů není dostatečně využíváno zkušeností žáků z běžného života nebo z dříve nabytých poznatků. Zkušenost není základem vytváření matematických vědomostí. Při budování matematických pojmů není respektována psychika žáka, často je pojem uveden velmi rychle, bez opory o předchozí zkušenost. Matematické poznatky nejsou žáky osvojovány uvědoměle, v souvislostech, jsou vázány na ustrnulou formu, která, když je pozměněna, znamená ztrátu obsahu.

Formální přístupy k pojmům, zdůraznění formy nad obsahem můžeme ilustrovat např. na pojmu desetinného čísla nebo záporného čísla nebo zlomku. Pokud se žák seznámí s tím, že desetinné číslo je číslo, které má desetinou čárku, je informován pouze o formě zápisu, nikoliv o pojmu desetinného čísla jako takového. Pokud se dozví, že desetinné číslo má část celou a část desetinnou, je opět seznámen s formou, nikoliv s obsahem a navíc neví, co je část desetinná, když doposud pracoval pouze s přirozenými čísly. Analogicky, jestliže žáky seznámíme pouze s pravidly, podle kterých se počítá se zápornými čísly, jeho vědomosti budou formální a až bude potřebovat učivo aplikovat v dalším učivu (např. algebraické výrazy, rovnice), nebude si vědět rady. Stejným způsobem se přistupuje formálně k seznámení se s pojmem zlomek, když se pouze uvede, že zlomek má čitatele, jmenovatele a mezi nimi je zlomková čára. Podobně, jestliže jsou žákům předkládány hotové vzorce např. pro výpočet obsahu geometrického útvaru nebo objemu či povrchu těles, bez patřičného odvození, jsou poznatky formální, žákům se vzorce pletou a vůbec jim nerozumí.

Předávání všech pouček bez vyvození a zdůvodnění vede k formalismu. Žákovi se zdůrazňuje, JAK se co provádí, avšak neseznámí se se zdůvodněním, PROČ se to tak provádí.

7.2 Převaha paměti nad porozuměním

Pokud se žáci učí zpaměti pravidla, poučky, pracovní postupy, symboliku, aniž by bezpečně zvládli podstatu učiva a měli učivo vědomě osvojeno, dochází k formálnímu osvojení poznatků. Žáci jsou schopni pouhé reprodukce bez pochopení vnitřních vztahů mezi pojmy. Typickým příkladem je např. násobilka. Jestliže se žáci naučí násobilku zpaměti bez pochopení, co vlastně násobení je, umí sice jednotlivé spoje vyjmenovat, ale neumí je použít např. ve slovních úlohách. Tím nechceme říci, že základní spoje násobení nemusí žák umět. Samozřejmě je musí znát, avšak s porozuměním, co znamenají. Podobně, pokud budou znát jen zpaměti základní spoje dalších operací bez jejich významu, nebudou schopni uvědoměle řešit slovní úlohy, ve kterých by měli poznat, jakou operaci k řešení slovní úlohy potřebují. Je třeba najít optimální rovnováhu mezi učením zpaměti a porozuměním.

Příčinou paměťového učení však také mohou být osobnostní vlastnosti žáka, jako nízké intelektuální sebevědomí, malá odvaha pustit se do řešení, obava udělat něco jinak než je běžné a také vypěstovaný styl učení založený na paměti.

7.3 Šablonovitost poznatků

Šablonovitost poznatků se projevuje tak, že žáci jsou schopni řešit skupiny úloh, které mají některé společné rysy a jsou zařazeny do určité přihrádky, „škatulky“. Projevuje se to zejména u slovních úloh, které jsou schopni řešit pouze naučenými postupy. Veškeré myšlenkové procesy, schopnost experimentovat, hledat různá řešení jsou jim cizí.

7.4 Využívání názoru

Využívání názoru je při matematickém vyučování nezastupitelné, avšak je nutné najít optimální formu jeho použití. Tak, jak je nesprávné pracovat bez jakéhokoliv názoru, tak je nesprávná přemíra názoru. Když žák může pracovat bez použití názoru, nevyžadujeme jej, pokud jej však potřebuje, měl by ho mít k dispozici. Avšak je nutné varovat se ustrnulé formy, např. při rýsování geometrických útvarů. Úsečka se rýsuje stále v jedné, zpravidla vodorovné poloze, trojúhelník je téměř vždy rovnostranný, čtverec se rýsuje stále v jedné poloze umístěný na jedné straně apod. Také je nutné zajistit, aby názor byl vyjádřením znázorňované situace, aby nedocházelo k chybám. Uvedeme nejčastější chyby při znázorňování rovnost i čísel a vyvozování operací sčítání a odčítání.

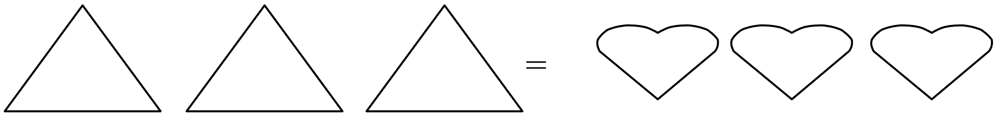
a) Formalismus při znázorňování rovnosti čísel

V matematice se výrazně rozlišuje rozdíl mezi ekvivalencí množin a rovností množin. Připomeňme, že dvě množiny se rovnají, pokud mají tytéž prvky, tedy jde o jednu množinu:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

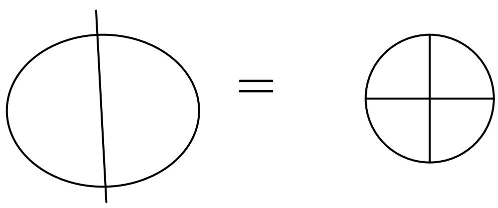
Množina A je ekvivalentní s množinou B, právě když existuje prosté zobrazené množiny A na množinu B, tedy prvky obou množin můžeme vzájemně jednoznačně přiřadit. Tyto množiny si nejsou rovny, ale mají stejný počet prvků.

Nepochopení rozdílu mezi rovností a ekvivalencí množin vede k chybnému grafickému znázornění typu:



ve smyslu 3 = 3. Mnoho žáků s poruchami učení se vyjádřilo k tomuto obrázku tak, že trojúhelník se nemůže rovnat srdíčku.

Analogický názor se používá ke znázornění rovnosti zlomků:



.

ve smyslu jedna polovina se rovná dvěma čtvrtinám. Opět se sobě nerovnají objekty, ale čísla.

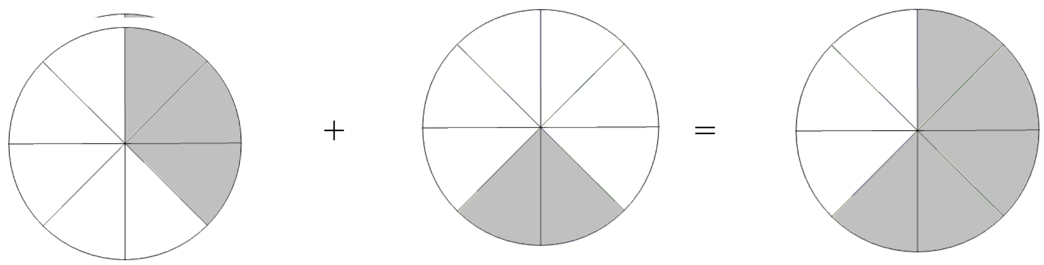
b) Znázornění sčítání

Pokud se zamění znázornění jednotlivých čísel a znázornění operace s čísly, dochází k situacím, které žáci při provádění manipulativních činností obtížně chápou. Obrázek typu

O O O O + O O O = O O O O O O O

někteří žáci zapsali 4 + 3 = 14, neboť spočítali všechny prvky na obrázku. Při manipulativních činnostech, kdy příklad znázorňovali pomocí kaštanů, položili čtyři kaštany, potom tři kaštany a už měli sedm. Odmítali položit dalších sedm kaštanů. Pochopili správně, že prvky k sobě přiřazují a že sčítají pouze čísla. Zde se projevuje formalismus v tom, že se zaměňuje znázornění jednotlivých čísel se znázorněním operace sčítání.

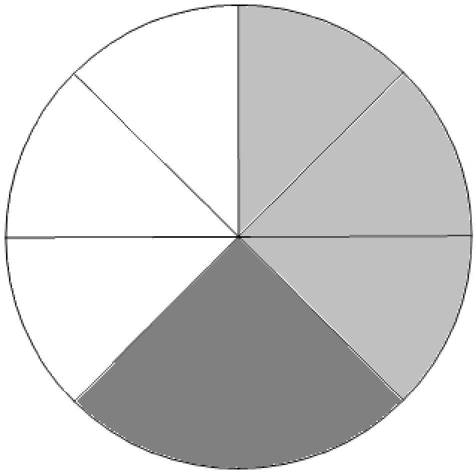
Analogická situace se vyskytuje při znázornění sčítání zlomků.



ve smyslu $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$.

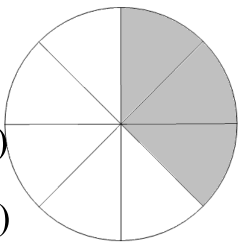
Při znázorňování této situace pomocí modelů zlomků (části dortů) žáci položili nejprve 3 dílky (např. dortu čokoládového), potom 2 dílky (např. dortu jahodového) a odmítali přidat dalších 5 dílků. Opět jsou znázorněny jednotlivé zlomky, nikoliv operace sčítání zlomků.

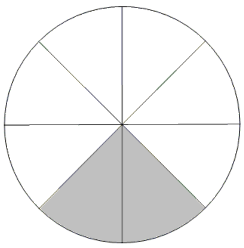
Správné grafické znázornění vychází z reality, kdy např. využijeme motivační úlohu. Na talíři byla pizza rozdělena na 8 stejných dílů. Jirka snědl $\frac{3}{8}$ pizzy, Petr snědl $\frac{2}{8}$ pizzy. Kolik osmin pizzy snědli dohromady?



Z obrázku je patrný součet $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$.

Správný názor by také mohl vycházet z příkladu: Dva dorty, čokoládový a ovocný byly rozděleny každý na osm stejných částí. Koupili jsme $\frac{3}{8}$ čokoládového a $\frac{2}{8}$ ovocného dortu. Kolik dílů jsme koupili dohromady?





c)

d)

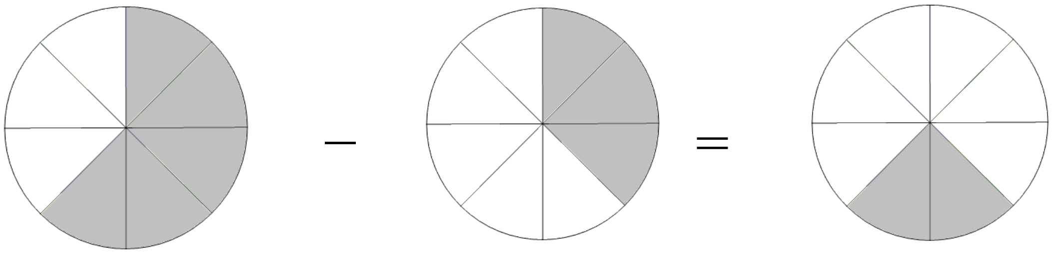
e) Znázornění odčítání

Ještě složitější situace je při znázorňování operace odčítání. Pokud se při odčítání přirozených čísel 5 − 3 = 2 použije znázornění

$$\text{O O O O O} - \text{O O O} = \text{O O}$$

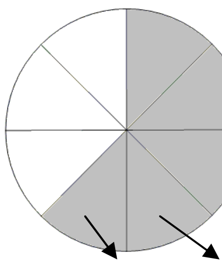
Žák položí 5 kaštanů, napíše „–“, přidá další tři kaštany, napíše „=“ a z novu přidá dva kaštany. Potřebuje tak deset kaštanů, aby odečetl 5 − 3.

Toto znázornění se pak přenáší i do znázornění odčítání zlomků:



ve smyslu $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8}$.

Je pochopitelné, že několik následných dějů při operacích je obtížné znázornit v jednom statickém obrázku, proto je vhodnější se žáky provádět modelování na konkrétních příkladech. Velmi snadno např. pochopí, že když mají v lahvi tři čtvrtiny litru čaje a jednu čtvrtinu litru vypijí, že v lahvi zbudou dvě čtvrtiny litru čaje. Vše se odehrává v rámci jedné lahve a není možné kreslit lahve tři ve výše uvedeném významu. Pokud se znázorňuje odčítání zlomků pomocí výše uvedených kruhů, pak musí odpovídat realitě a odčítání znázornit pouze jedním kruhem, ve kterém vyznačíme, kolik částí ubereme. Např. na talíři je pět osmin dortu, dvě osminy sníme. Kolik osmin dortu na talíři zůstane?



Je zřejmé, že žáci s poruchami učení správný názor, který vede k pochopení učiva, docení.

7.5 Formální přístupy k hodnocení žáků s poruchami učení

Formalismus při hodnocení se projevuje v mnoha oblastech:

- Hodnocení výsledku práce bez ohledu na částečné dílčí správné výsledky.
- Apriorní očekávání špatného výsledku.
- Zařazení žáka do skupiny slabých žáků bez šance situaci změnit.

7.6 Jak formalismus zmírnit

- Užívat různé způsoby výkladu nové látky.
- Maximálně využívat konstruktivistických postupů, kdy si žáci osvojují poznatky sami vlastní činností.
- Používat funkčního názoru, bez chyb.
- Uvádět pojmy v souvislostech, postupně vytvářet poznatkový systém.
- Optimálně využít pamětné učení, které je nezbytné k dalšímu učivu.
- Vysoce hodnotit poznatky, které žáci umí použít, nejen odříkat.
- Nebrzdit myšlenkové pochody žáků, oceňovat jejich osobité postupy, i když nemusí být právě optimální.
- Zbavit se stereotypu v práci.

8 ZÁVĚR

Publikace je věnována průzkumu početního zastoupení žáků s poruchami učení v matematice a uvedení některých příčin a projevů těchto poruch. Vzhledem k rozsáhlému obsahu učiva matematiky na druhém stupni základní školy nebylo možné podrobně se věnovat všem tématům. Zaměřili jsme se na základní témata, jejichž znalost je nutná v dalších, navazujících tématech. Zejména jsme uvedli problémy v oblasti vytváření pojmů a operací v oboru racionálních čísel, což je nezbytný předpoklad zvládání dalšího učiva. Náměty námi prezentované jsou ověřené v praxi při konkrétních nápravných cvičeních se žáky s poruchami učení. Vzhledem k výrazné individualitě problémů jednotlivých žáků je pochopitelné, že mohou existovat mnohé další postupy, které jsou pro žáky příznivé. Protože tito žáci mohou mít nadprůměrné schopnosti, je třeba hledat všechny prostředky, které jim matematiku přiblíží. Dyskalkulie nemusí omezit žáka ve výběru povolání, dokonce řada z nich může vystudovat vysokou školu s technickým nebo matematickým zaměřením. Vyžaduje to jejich úsilí a snahu problémy překonat. K tomu jim může napomoci jednak učitel matematiky, jednak vhodný výukový postup.

REJSTŘÍK

J

K

M

N

O

P

R

S

LITERATURA

BARTOŇOVÁ, M. (ed.): *Specifické poruchy učení v kontextu vzdělávacích oblastí RVP ZV.* Brno: Paido, 2007, 276 s. ISBN 978-80-7315-162-1.

BARTOŇOVÁ, M.: *Kapitoly ze specifických poruch učení I. Vymezení současné problematiky.* Brno: PdF MU, 2007, 128 s. ISBN 978-80-210-3613-0.

BARTOŇOVÁ, M.: *Kapitoly ze specifických poruch učení II.* Brno: PdF MU, 2007, 152 s. ISBN 978-80-210-3822-6.

BARTOŇOVÁ, M., VÍTKOVÁ, M. (eds.): *Přístupy ke vzdělávání žáků se specifickými poruchami učení na základní škole Sborník z konference s mezinárodní účastí.* Brno: Paido, 2007. ISBN 978-80-7315-150-8.

BLAŽKOVÁ, R.: *Dyskalkulie a další specifické poruchy učení v matematice.* Brno: Masarykova univerzita, 2009, 108 s. ISBN: 978-80-210-5047-1.

BLAŽKOVÁ, R.: *Dyskalkulie a některé další obtíže v matematice.* In: Kucharská, A. (ed.): *Specifické poruchy učení a chování. Sborník 2000.* Praha: Portál, 2000, s. 27–38. ISBN 80-7178-389-7.

BLAŽKOVÁ, R.: *Rozhodnutelné a nerozhodnutelné v matematickém vzdělávání – jsem dyskalkulik?* In: Blažková, R., Vosmanský, J. (eds.): Sborník příspěvků z mezinárodní konference The Mathematics Education into the 21st Century Project. Brno: MU, 2003, s. 31–32. ISBN 83-919465-1-7.

BLAŽKOVÁ, R.: *Training teachers for teaching pupils with leasing disorders.* London: Lewisham college 2005.

BLAŽKOVÁ, R.: *Školní vzdělávací program a možnosti podpory žáků se specifickými vzdělávacími potřebami v matematice.* Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě školního vzdělávacího programu. Praha: JČMF, 2006. ISBN 80-7015-097-1.

BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M., BLAŽEK, M.: *Poruchy učení v matematice a možnosti jejich nápravy.* Brno: Paido, 2000, 94 s, ISBN:80-85931-89-3.

BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M.: *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně ZŠ.* Brno: PdF MU, 1992, 78 s. ISBN 80-210-0468-1.

BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M.: *Kapitoly z didaktiky matematiky. Slovní úlohy a projekty. Druhé vydání.* Brno: PdF MU, 2011, 78 s. ISBN 978-80-210-5419-6.

BLAŽKOVÁ, R.: *Co, proč a jak ve školské matematice I. Číslo nula.* In: Matematika, fyzika a informatika. Praha: Prometheus JČMF, roč. 14, č. 5, s. 257–262. ISSN 1210-1761.

BLAŽKOVÁ, R.: *Co, proč a jak ve školské matematice II. Zlomky.* In: Matematika, fyzika a informatika. Praha: Prometheus JČMF, roč. 14, č. 5, s. 257–262. ISSN 1210-1761.

BLAŽKOVÁ, R.: *Co, proč a jak ve školské matematice III. Operace se zlomky – sčítání a odčítání.* In: Matematika, fyzika a informatika. Praha: Prometheus JČMF, roč. 14, č. 8, s. 463–469. ISSN 1210-1761.

BLAŽKOVÁ, R.: *Co, proč a jak ve školské matematice IV. Operace se zlomky – násobení a dělení zlomků.* In: Matematika, fyzika a informatika. Praha: Prometheus JČMF, roč. 15, č. 3, s. 136–142. ISSN 1210-1761.

BLAŽKOVÁ, R.: *Co, proč a jak ve školské matematice V. Celá čísla, zejména záporná.* In: Matematika, fyzika a informatika. Praha: Prometheus JČMF, roč. 16, č. 4, s. 203–209. ISSN 1210-1761.

BLAŽKOVÁ, R.: *Co, proč a jak ve školské matematice VI. Násobení a dělení celých čísel.* In: Matematika, fyzika a informatika. Praha: Prometheus JČMF, roč. 16, č. 6, s. 321–328. ISSN 1210-1761.

BLAŽKOVÁ, R., PAVLÍČKOVÁ, L.: *Inkluzivní vzdělávání dětí s poruchami učení v matematice na základních školách.* In: Filová, H., Havel, J. (eds.): Inkluzivní vzdělávání v primární škole. Brno: Paido, 2010, s. 249–258. ISBN 978-80-7315-202-4.

BLAŽKOVÁ, R., PAVLÍČKOVÁ, L.: *Problematika dyskalkulie v rámci inkluzivního vzdělávání na základních školách.* In: Vítková, M., Havel, J. (eds.): Inkluzivní vzdělávání v primární škole. Vzdělávání žáků se speciálními potřebami. Brno: Paido, 2010, 22s. ISBN 978-80-7315-199-7.

DEYL, D.: *Dyslexie jako motor.* In: Týden, 2010, č. 48, s. 61.

FONTANA, D.: *Psychologie ve školní praxi.* Praha: Portál, 1997, 383 s. ISBN 80-7178-063-4.

GAVORA, P. a kol.: *Pedagogická komunikácia na základnej škole*. Bratislava: Veda, 1988.

HEJNÝ, M., KUŘINA, F.: *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha: Portál, 2009, druhé, aktualizované vydání, 192 s. ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, M. a kol.: *Teoria vyučovania matematiky*. Bratislava: SPN, 1990. 554 s. ISBN 80-08-01344-3.

HEJNÝ, M. a kol.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, 1. a 2. díl.* Praha: Univerzita Karlova, 2004. ISBN 80-7290-189-3.

HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N.: *Číselné představy dětí.* Praha: PdF UK, 1999, 123 s. ISBN 80-86039-98-6.

HOŠKOVÁ, Z. *Aby matematiky byla prima.* Brno: PdF MU, 2008, 46 s. ISBN 978-80-210-4703-7.

CHVALINOVÁ, E.: *Speciálně pedagogická intervence u žáků s dyskalkulií v mladším školním věku.* Rigorózní práce. Brno, PdF MU, 2002, 123 s.

KLENKOVÁ, J., VÍTKOVÁ, M. (eds.) *Vzdělávání žáků s narušenou komunikační schopností. Sborník z konference s mezinárodní účastí.* Brno: Paido 2008. ISBN 978-80-7315-167-6.

KREJČOVÁ, E.: *Hry a matematika na 1. stupni základní školy.* Praha: SPN, a.s., 2009, 163 s. ISBN 978-80-7235-417-7.

KUCHARSKÁ, A. (ed.): *Specifické poruchy učení a chování. Sborník 1996.* Praha: Portál, 1997, 203 s. ISBN 1211-670X.

KUCHARSKÁ, A. (ed.): *Specifické poruchy učení a chování. Sborník 1997–98.* Praha: Portál, 1998, 179 s. ISBN 80-7178-244-0.

KUCHARSKÁ, A. (ed.): *Specifické poruchy učení a chování. Sborník 2000.* Praha: Portál, 2000, 166 s. ISBN 80-7178-389-7.

KUCHARSKÁ, A. (ed.): *Specifické poruchy učení a chování. Sborník 2005.* Praha: IPPP ČR, 2006, 222 s. ISBN 80-8656-13-5.

LANGOVÁ, H.: *Dyskalkulie a možnosti její reedukace.* Diplomová práce. Brno: Pedagogická fakulta MU, 2008.

MAREŠ, J., KŘIVOHLAVÝ, J.: *Komunikace ve škole*. Brno: CDVU 1995. 210 s. ISBN 80-210-1070-3.

MARCHINI, C., KASLOVÁ, M.: *Metody řešení a komunikace*. In: Sborník UK, 2003.

MATĚJČEK, Z: *Dyslexie – specifické poruchy čtení.* Jinočany: H&H, 1993, 270 s. ISBN 80-85467-56-9.

NOVÁK, J.: *Dyskalkulie.* Havlíčkův Brod: Tobiáš, 2004, 125 s. ISBN 80-7311-029-6.

PETTY, G.: *Moderní vyučování.* Praha: Portál, 1996, 380 s. ISBN 80-7978-070-7.

POKORNÁ, V.: *Teorie, diagnostika a náprava specifických poruch učení* Praha: Portál, 1997, 312 s. ISBN 80-7178-135-5.

POKORNÁ, V.: *Cvičení pro děti se specifickými poruchami učení* Praha: Portál, 1998, 153 s. ISBN 80-7178-228-9.

PRUCHA, J.: *Moderní pedagogika.* Praha: Portál, 1997, 495 s. ISBN 80-7178-170-3.

PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŠ, J.: *Pedagogický slovník*. Praha: Portál 1998. 328 s. ISBN 80-7178-252-1.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Dostupné: www.rvp.cz

SIMON, H.: *Dyskalkulie.* Praha: Portál, 2006, 166 s. ISBN 80-7367-104-2.

SINDELAROVÁ, B.: *Předcházíme poruchám učení.* Praha: Portál, 1996, 63 s. ISBN 80-85282-70-4.

SLAVÍK, J.: *Hodnocení v současné škole.* Praha: Portál, 1999, 190 s. ISBN 80-7178-262-9.

SPAGNOLO, F., ČIŽMÁR, J.: *Komunikácia v matematike*. Brno, PřF MU, 1993. 190 s. ISBN 80-210-3193-X

STEHLÍKOVÁ, N.: *Některé komunikační jevy v hodinách matematiky*. In: Sborník příspěvků Dva dny s didaktikou matematiky 2003. Praha: PedF UK, 2003.

ŠÍBLOVÁ, D.: *Poruchy učení a jejich vliv na výuku cizího jazyka.* In: Sborník Edukace žáků se speciálními vzdělávacími potřebami (ed. M. Bartoňová), Brno 2005, s. 145–153. ISBN 80-86633-3-1.

ŠIMONÍK, O.: *Úvod do školní didaktiky*. Brno: MSD, 2003. 91 s. ISBN 80-86633-04-7.

ŠIROKÁ, L.: *Problematika dyskalkulie na základních a středních školách.* Diplomová práce. Brno: Pedagogická fakulta MU, 2008.

VÁGNEROVÁ, M., KREJČOVÁ, L.: *Dyslektický žák z pohledu učitele.* In: Sborník Specifické poruchy učení a chování. Ed. A. Kucharská, E. Chalupová. Praha: IPPP ČR 2006, s. 37–51. ISBN: 80-8656-13-5.

VAŠÍČKOVÁ, M.: *Péče o žáky s dyskalkulií na 1. stupni základní školy.* Diplomová práce. Brno: Pedagogická fakulta MU, 2007.

VÍTKOVÁ, M. (ed.): *Integrativní školní (speciální) pedagogika. Základy, teorie, praxe.* Brno: PdF MU 2003, 248 s. ISBN 80-86633-07-1.

ZELINKOVÁ, O.: *Poruchy učení.* Praha: Portál, 1996, 196 s. ISBN 80-7178-096-0.

ZELINKOVÁ, O.: *Pedagogická diagnostika a individuální vzdělávací program*. Praha, Portál, 2001, 207 s., ISBN: 80-7178-544-X.

ZELINKOVÁ, O.: *Specifické poruchy učení, nové poznatky, výsledky výzkumů.* In: Sborník Edukace žáků se speciálními vzdělávacími potřebami (ed. M. Bartoňová), Brno 2005, s. 55–61. ISBN 80-86633-3-1.

INTERNETOVÉ ODKAZY

http://www.europan-agency.org

http://www.msmt.cz

http://www.vuppraha.cz