Mocniny, odmocniny, úpravy algebraických výrazů

Repetitorium z matematiky

Podzim 2011

Ivana Vaculová

1. Mocniny s přirozeným a celým mocnitelem

- Pro každé reálné číslo *a* a každé přirozené číslo *n* platí:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n činitelů}}$$

mocnina

Základ mocniny
(mocněnec)

$$\boxed{a^n}$$

mocnitel
(exponent)

Pravidla pro počítání s mocninami:

Pro $\forall$ $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$ platí:

$$a^1 = a$$
$$1^n = 1$$
$$0^n = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow a^n > 0$$
$$a < 0 \Rightarrow a^{2n} > 0$$
$$a < 0 \Rightarrow a^{2n-1} < 0$$

Věty pro počítání s mocninami

Pro $\forall\ a, b \in R$ a $\forall\ r, s \in Z$ platí :

$$a)\ a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$b)\ \left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s}$$

$$c)\ a^r \div a^s = a^{r-s}$$

$$d)\ (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$e)\ \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r},\ b \neq 0$$

$$f)\ a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

2. n-tá odmocnina

Pro $\forall n \in N$ je n - tá odmocnina z nezáporného čísla a takové nezáporné číslo b, pro než platí $b^n = a$. Budeme zapisovat : $b = \sqrt[n]{a}$

stupeň mocniny
(odmocnitel)

matematický symbol pro
odmocninu (odmocnitel)

hodnota n-té
odmocniny

$$b = \sqrt[n]{a}$$

základ mocniny
(odmocněnec)

Pravidla pro počítání s odmocninami

$a)\ \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$ kde $a,b\in R\wedge a,b\geq 0;\ n\in N$

$b)\ \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ kde $a,b\in R\wedge a\geq 0\wedge b>0;\ n\in N$

$c)\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^{s}=\sqrt[n]{a^{s}}$ kde $a\in R\wedge a\geq 0;\ n,s\in N$, nebo
$a\in R\wedge a>0;\ n\in N;\ s\in Z$

$d)\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ kde $a\in R\wedge a\geq 0;\ n,m\in N$

Poznámka:

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ kde $a\in R\wedge a\geq 0;\ n\in N$

$\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}$ kde $a\in R\wedge a\geq 0;\ n,m\in N$

$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}$ kde $a\in R\wedge a>0;\ n\in N$

3. Algebraické výrazy

= zápisy, ve kterých se mohou vyskytovat jak určitá čísla (konstanty), tak také písmena (proměnné) a symboly aritmetických operací (+, -, √, ², atd.)

Algebraickými výrazy jsou např.:	Algebraickými výrazy nejsou:
$1;\ 1+2;\ 3 \div 7 - 14;\ 5 + (2 \cdot 3 - 6);$ $x;\ 1+x;\ 3 \cdot (x+7) - 4;$ $\frac{1}{3}\pi r^2 v$ (objem rotačního kužele)	• Logický výrok = tvrzení, u kterého má smysl posuzovat pravdivost (např. 2 = 7) •Výroková forma – z ní získáme logický výrok dosazením čísel za proměnné, např.: $6x + 5 > 9$

Proměnné zastupují čísla z určité množiny (obor proměnné). Tyto číselné množiny, ze kterých můžeme za proměnné dosazovat, určují **definiční obor** daného výrazu (pro tyto hodnoty má daný výraz smysl).

3.1 Mnohočleny

= zvláštní případy algebraických výrazů.

= výrazy ve tvaru:

$$\boxed{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}$$

kvadratický člen

lineární člen

absolutní člen

kde $a_0, a_1, \ldots a_n \in R$

$n \in Z \wedge n \geq 0$

x je proměnná

Je-li $a_n \neq 0 \Rightarrow$ Jde o mnohočlen n-tého stupně

Mnohočlen 1. stupně = **LINEÁRNÍ**	$a_1x + a_0$	$ax + b$
2. stupně = **KVADRATICKÝ**	$a_2x^2 + a_1x + a_0$	$ax^2 + bx + c$
3. stupně = **KUBICKÝ**	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$	$ax^3 + bx^2 + cx + d$

Operace s mnohočleny

- **SČÍTÁNÍ –** sečteme koeficienty u členů se stejnými exponenty

- **ODEČÍTÁNÍ (ROZDÍL) –** odstraníme závorky (změníme znaménka u menšitele) a sečteme koeficienty u členů se stejnými exponenty)

- **NÁSOBENÍ –** vynásobíme dle schématu a poté sečteme:

$$\mathbf{(2x^2 + 3x - 2)\ .\ (4x - 1)}$$

Operace s mnohočleny

- **DĚLENÍ**

a) beze zbytku:

$(2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x - 1)/(x^2 + 1) = 2x^2 - 3x - 1$

b) se zbytkem

$$(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4) = x^2 - x + 1 + \frac{2}{x - 4}$$

Postup:

1. Dělence i dělitele uspořádáme sestupně.
2. Vydělíme 1. člen dělence 1. členem dělitele (dostaneme 1. člen podílu).
3. Vynásobíme tímto členem dělitele a výsledný polynom odečteme od dělence a získáme dělence pro další postup.
4. Opakujeme postup vždy s novým dělencem, dokud není zbylý polynom nižšího stupně než dělitel.
5. Uvedeme předpoklady (dělitel musí být různý od nuly).

Operace s mnohočleny

- **n-tá mocnina, *$(a+b)^n$, $n \in N$***

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^3$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^3$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc|c}
 & & & & & & 1 & & & & & & & n=0 \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & n=1 \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & n=2 \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & n=3 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & n=4 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & n=5 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & n=6
\end{array}$$

Operace s mnohočleny

- **ROZKLAD MNOHOČLENŮ**

  = vyjádření ve tvaru součinu několika mnohočlenů, které se zpravidla už nedají dále rozložit.

a) **Vytýkáním před závorku:** Př.: $(3x^2y^3 + 6xy^2) = 3xy^2 \cdot (xy + 2)$

b) **Použitím vzorců:**

$$(a+b)^n \text{ .....viz str. 11}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

3.2 Lomené výrazy

a) **KRÁCENÍ =** vydělení čitatele i jmenovatele stejným výrazem

ROZŠIŘOVÁNÍ = vynásobení čitatele i jmenovatele stejným výrazem

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3 ($V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$) platí:

$$\frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_3} \underset{\xleftarrow{\text{rozšiřování}}}{\overset{\xrightarrow{\text{krácení}}}{=}} \frac{V_1}{V_2}$$

3.2 Lomené výrazy

b) SOUČET LOMENÝCH VÝRAZŮ

= lomený výraz, jehož čitatel je součet čitatelů obou výrazů převedených na společného jmenovatel a jehož jmenovatel je tento společný jmenovatel.

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž $V_2 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{V_1}{V_2} + \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 V_4 + V_2 V_3}{V_2 V_4}$$

3.2 Lomené výrazy

c) NÁSOBENÍ LOMENÝCH VÝRAZŮ (součin)

= lomený výraz, jehož čitatel je součin čitatelů a jmenovatel součin jmenovatelů násobených lomených výrazů.

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž $V_2 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_4}$$

Pozn.: *Při násobení jednotlivé výrazy neroznásobujeme, naopak, snažíme se je vhodně rozložit a podle možností i krátit.*

3.2 Lomené výrazy

d) UMOCŇOVÁNÍ LOMENÝCH VÝRAZŮ

= umocnění čitatele i jmenovatele.

Pro libovolné výrazy V_1, V_2 ($V_2 \neq 0$) a pro libovolné $k \in N$ platí:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = \frac{V_1^{\,k}}{V_2^{\,k}}$$

3.2 Lomené výrazy

e) DĚLENÍ LOMENÝCH VÝRAZŮ

⇨ pokud dělíme lomeným výrazem, znamená to, že násobíme jeho převrácenou hodnotou.

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{V_1}{V_2} \div \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3}$$

3.2 Lomené výrazy

f) ZJEDNODUŠENÍ SLOŽENÉHO LOMENÉHO VÝRAZU

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2} \div \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3}$$

3.2 Lomené výrazy

g) ÚPRAVY IRACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

- při těchto úpravách využíváme vzorce pro počítání s mocninami, odmocninami, mnohočleny i vzorce pro operace s lomenými výrazy.

Příklad:

$$\frac{\left[(x-y)^{\frac{3}{5}}\right]^{-\frac{4}{3}}+\sqrt[10]{(x-y)^{-8}}}{\sqrt[5]{(x-y)^{-2}}}\cdot\frac{x-y}{\sqrt[5]{(x-y)^{3}}}$$

4 Aplikace

- Vyjádření neznámé ze vzorce

Př.1: Ze vzorce pro objem rotačního kužele vyjádřete poloměr jeho podstavy:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v \quad \Rightarrow \quad 3\mathrm{V} = \pi r^2 v$$

$$\frac{3\mathrm{V}}{\pi v} = r^2$$

$$\sqrt{\frac{3\mathrm{V}}{\pi v}} = r$$

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Odvárko, O. a kol. Funkce. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1996.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.