

# Téma: Aberace světla

Zpracoval Doc. RNDr. Zdeněk Hlaváč, CSc

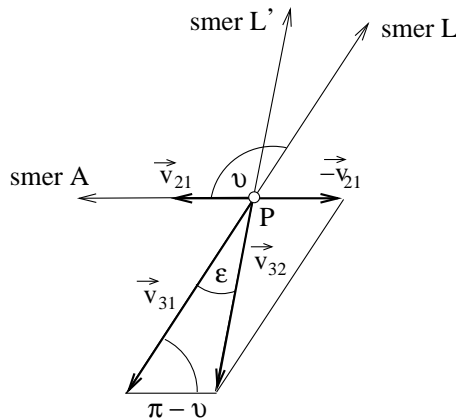
**Aberace světla** je jev, způsobující změnu směru světelného paprsku dostávajícího se k pohyblivému pozorovateli, oproti směru paprsku, který by se dostával ke klidnému pozorovateli.

Označme jako 1 nepohyblivý prostor, jako 2 prostor, jenž se vůči 1 pohybuje tak, že jeho počátek se pohybuje rychlostí  $\vec{v}_{21}$ . Jako 3 označme bod, pohybující se vůči pohyblivému prostoru rychlostí  $\vec{v}_{32}$ . V mechanice platí zákon o skládání pohybů, který tvrdí, že bod 3 se vůči nepohyblivému prostoru 1 pohybuje rychlostí  $\vec{v}_{31}$ , pro kterou platí

$$\vec{v}_{31} = \vec{v}_{21} + \vec{v}_{32}. \quad (1)$$

**Poznámka:** Vztah (1) platí i v případě, že se prostor 2 vůči 1 natáčí. V naší aplikaci tohoto zákona postačí, že se oba prostory vůči sobě posouvají, tedy rychlost každého bodu prostoru 2 je vůči prostoru 1 stejná a je rovna rychlosti  $\vec{v}_{21}$  počátku 2 vůči 1.

Jestliže bod 3 bude "částice světla", znázorňuje směr vektoru  $\vec{v}_{31}$  paprsek světla tak, jak by jej vnímal pozorovatel v klidu (pevně spojený s nepohyblivým prostorem 1). Velikost tohoto vektoru  $|\vec{v}_{31}|=c$ , kde  $c=3 \cdot 10^8$  [km/s] je rychlost šíření světla ve vakuu. Směr vektoru  $\vec{v}_{32}$  pak znázorňuje paprsek světla tak, jak by jej vnímal pozorovatel pohybující se vůči klidnému prostoru 1 známou rychlostí  $\vec{v}_{21}$ . Z (1) plyne, že  $\vec{v}_{32} = \vec{v}_{31} - \vec{v}_{21}$ . Znázorníme-li tento vektorový součet geometricky jako vektorový rovnoběžník (trojúhelník), dostáváme obrázek 1.



Obrázek 1:

Pozorovatel P se pohybuje rychlostí  $\vec{v}_{21}$  směrem k bodu A. Světelný paprsek, jenž by v případě klidného pozorovatele přicházel ze směru od bodu L, přichází pro pozorovatele v pohybu ze směru od bodu L'. Oba směry jsou od sebe odchýleny o **aberační úhel**  $\epsilon$ . Ke zmíněnému **aberačnímu posuvu** dochází v rovně určené body LPA ve smyslu "blíže k bodu A" (tedy přesněji do poloroviny s hranicí LP, ve které leží bod A).

Pozorujeme-li na nebeské sféře objekt, jenž by se pro nehybného pozorovatele nacházel ve směru PL, pro pohyblivého pozorovatele se nachází ve směru PL'. K aberačnímu posuvu dochází po hlavní kružnici nebeské sféry (rovina LPA prochází pozorovacím stanovištěm, jakožto středem koule), o výše popsany aberační úhel  $\varepsilon$  ve smyslu k bodu A, jakožto průsečíku vektoru rychlosti  $\vec{v}_{21}$  pozorovatele s nebeskou sférou. Tomuto bodu říkáme **apex příslušející k danému pohybu pozorovatele**. Necht' směr PL na objekt je (v rovině LPA) odchýlen od směru PA na apex o úhel  $\vartheta$ . Aplikací sínové věty pro trojúhelník rychlostí dostáváme podle obrázku 1, že

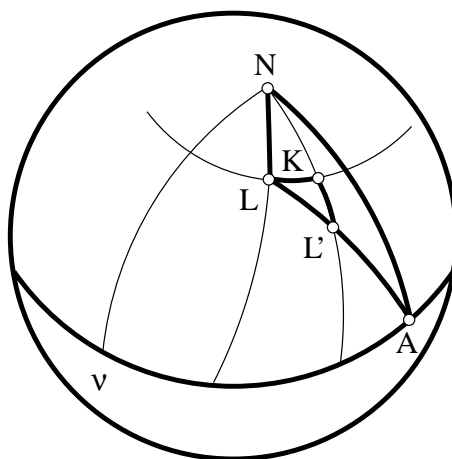
$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin(\pi - \vartheta)} = \frac{v_{21}}{v_{32}}.$$

Protože  $v_{31} = c$  a  $v_{21}$  je vždy podstatně (o několik řádů) menší, lze bez újmy na ztrátě přesnosti psát  $v_{32} \doteq v_{31} = c$ . Z předchozího výrazu pak dostaneme  $\sin \varepsilon = \frac{v_{21}}{c} \sin \vartheta$ . Vzhledem k výše popsané relaci mezi rychlostmi je aberační úhel velmi malý, takže bez újmy na ztrátě přesnosti lze psát  $\sin \varepsilon \doteq \varepsilon$ . Získáváme tím dílčí výsledek

$$\varepsilon = \frac{v_{21}}{c} \sin \vartheta = A \sin \vartheta. \quad (2)$$

Poměr rychlostí  $A = \frac{v_{21}}{c}$  nazýváme **aberační konstantou příslušnou k danému pohybu pozorovatele**.

Protože pozorovatel se spolu se Zemí pohybuje jednak denním pohybem při rotaci Země kolem osy a jednak ročním pohybem při pohybu Země kolem Slunce, rozeznáváme aberaci **denní** a **roční**. Oba pohyby jsou periodické, rovinné. Denní pohyb se uskutečňuje v rovině rovníku s periodou hvězdný den a roční pohyb v rovině ekliptiky s periodou siderický rok. Apex se proto v prvním případě pohybuje po nebeském rovníku, ve druhém případě po (zdánlivé) ekliptice. Odtud plyne, že zdroj světla (hvězda), jehož poloha by v případě klidného pozorovatele byla neměnná (odezíráme-li od vlastního relativního pohybu hvězd vůči Slunci), mění svoji polohu v důsledku aberačního posuvu ve smyslu na apex, jehož poloha se periodicky mění. Body L', označující na nebeské sféře polohu zdroje světla pro pohybujícího se pozorovatele, tedy opisují uzavřené křivky. Dokážeme, že se jedná o elipsy a popíšeme jejich parametry.



Obrázek 2:

Posudme situaci na nebeské sféře. Na obr.2 je znázorněna hlavní kružnice, po které se pohybuje apex (tedy ekliptika v případě roční aberace a nebeský rovník v případě

denní aberace). Dále je označena poloha apexu A, poloha jarního bodu  $\Upsilon$ , severního pólu N (ekliptikálního nebo světového, podle druhu aberace) a poloha zdroje světla L pro případ klidného pozorovatele. Poloha L' zdroje pro případ pohybujícího se pozorovatele leží na oblouku hlavní kružnice spojující bod L s apexem A, přičemž délka strany LL' (ve smyslu velikosti příslušného středového úhlu) je podle (2)  $\varepsilon = A \sin \vartheta$ . Parametr  $\vartheta$  je (viz obr.1) úhel, který svírá směr na zdroj světla L od směru na apex A. Z hlediska středového úhlu se jedná na nebeské sféře o délku strany AL. Označme příslušnou "zobecněnou rovnoběžku" (tedy geometrické místo bodů, kde je šířková souřadnice konstantní) procházející bodem L a příslušný "zobecněný poledník" (tedy geometrické místo bodů, kde je délková souřadnice konstantní) procházející bodem L'. Průsečík těchto křivek označme K (obr.2). Trojúhelník KLL' je pravoúhlý sférický trojúhelník s přeponou (to jest nejdelší stranou) LL', jež je v obloukové míře rovna aberačnímu posuvu  $\varepsilon$ . Vzhledem k malým hodnotám těchto posuvů, lze tento trojúhelník brát jako planimetrický. Označíme-li jako  $\psi$  vnitřní úhel mezi stranou LL' a LK, lze s ohledem na (2) psát pro délky odvěsen

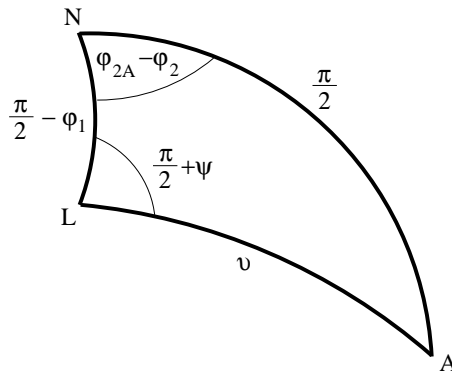
$$\overline{LK} = \overline{LL'} \cos \psi = \varepsilon \cos \psi = A \sin \vartheta \cos \psi, \quad (3)$$

$$\overline{KL'} = \overline{LL'} \sin \psi = \varepsilon \sin \psi = A \sin \vartheta \sin \psi.$$

Označíme-li  $\varphi_1$  sférickou šířku bodu L (tedy deklinaci v případě denní aberace a ekliptikální šířku v případě roční aberace) a  $\varphi_2$  sférickou délku bodu L (tedy rektascenzi v případě denní aberace a ekliptikální délku v případě roční aberace), plyne ihned z konstrukce bodu K, že

$$\overline{KL'} = -\Delta\varphi_1; \quad \overline{LK} = \Delta\varphi_2 \cos \varphi_1. \quad (4)$$

**Poznámka:** Znaménko mínus v prvním výrazu znamená zmenšování absolutní hodnoty první sférické souřadnice při příslušném aberačním posuvu. Násobek  $\cos \varphi_1$  ve druhém výrazu se tam nachází proto, že  $\overline{LK}$  je oblouk vedlejší kružnice definující rovnoběžku o sférické šířce  $\varphi_1$ .



Obrázek 3:

Uvažujme nyní sférický trojúhelník NLA (obrázky 2 a 3). Délky stran tohoto trojúhelníka (brány jako příslušné středové úhly) snadno určíme (jsou uvedeny v obrázku 3). Vnitřní úhel při vrcholu N je (jakožto odchylka "poledníku" apexu a "poledníku" bodu L) roven rozdílu sférických délek příslušných bodů. Velikost úhlu při vrcholu L

snadno nahlédneme, myslíme-li si bodem L vedenou "rovnoběžku" bodu L. Ta je kolmá na příslušný "poledník" a strana LA je od této "rovnoběžky" skloněna o úhel, jenž byl výše označen  $\psi$ . Úhel při vrcholu L jest proto  $\frac{\pi}{2} + \psi$ . Aplikací sínové věty pro tento (velký) sférický trojúhelník získáváme

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)}{\sin(\varphi_{2A} - \varphi_2)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\vartheta} \Leftrightarrow \sin\vartheta \cos\psi = \sin(\varphi_{2A} - \varphi_2). \quad (5)$$

Aplikací sínuskosínové věty pro stranu  $\vartheta$  a úhel  $\frac{\pi}{2} + \psi$  získáme

$$\sin\vartheta \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) \cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) \sin\frac{\pi}{2} \cos(\varphi_{2A} - \varphi_2),$$

odkud

$$-\sin\vartheta \sin\psi = -\sin\varphi_1 \cos(\varphi_{2A} - \varphi_2). \quad (6)$$

Dosazením (5) a (6) do (3) a pak do (4) dostaneme

$$-\Delta\varphi_1 = A \sin\varphi_1 \cos(\varphi_{2A} - \varphi_2); \quad \Delta\varphi_2 \cos\varphi_1 = A \sin(\varphi_{2A} - \varphi_2). \quad (7)$$

Tyto výrazy umožňují, při znalosti souřadnic  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  zdroje světla pro případ klidné Země a při znalosti sférické délky apexu a aberační konstanty, určit aktuální aberační změny sférických souřadnic. První výraz v (7) vyjadřuje změnu  $\overline{KL}$  "na poledníku", jíž lze označit kartézskou souřadnicí  $y$  a druhý výraz v (7) vyjadřuje změnu  $\overline{LK}$  "na rovnoběžce", jíž lze označit kartézskou souřadnicí  $x$ . Počátek zmíněné kartézské souřadnicové soustavy je v poloze L zdroje světla pro případ klidného pozorovatele. Výraz (7) pak přepíšeme jako

$$x = A \sin(\varphi_{2A} - \varphi_2); \quad y = A \sin\varphi_1 \cos(\varphi_{2A} - \varphi_2),$$

což jsou parametrické rovnice křivky, po níž se v průběhu periody pohybu pozorovatele pohybuje zdroj světla L'. Parametrem těchto parametrických rovnic je délková souřadnice apexu  $\varphi_{2A}$ , jež se s časem mění. Dělením první rovnice konstantou  $A$ , druhé rovnice konstantou  $A \sin\varphi_1$ , následným umocněním a sečtením obou rovnic obdržíme

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{A \sin\varphi_1}\right)^2 = 1, \quad (8)$$

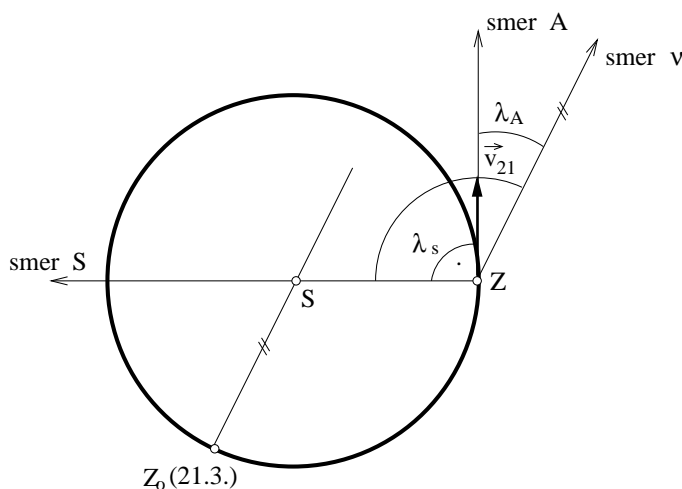
což je středová rovnice elipsy s poloosami  $A$  (na ose  $x$ , tedy "rovnoběžky") a  $A \sin\varphi_1$  (na ose  $y$ , tedy "poledníku").

**Poznámka:** Pro objekt, jehož poloha pro klidného pozorovatele se nachází v pólech, se elipsa stane kružnicí o úhlovém poloměru rovném aberační konstantě  $A$ . Pro objekt, jehož poloha pro klidného pozorovatele se nachází na hlavní kružnici (tedy na nebeském rovníku nebo na ekliptice, podle typu aberačního posuvu), naopak elipsa degeneruje na dvakrát po zmíněné hlavní kružnici proběhnutou úsečku délky  $2A$ . Poloha objektu příslušející klidnému pozorovateli se nachází ve středu této úsečky.

Kvantita i kvalita aberačních změn polohy objektu závisí na poloze apexu a na velikosti aberační konstanty. Určíme tyto atributy pro roční a denní pohyb pozorovatele se Zemí.

Začneme ročním pohybem Země kolem Slunce. Protože numerická výstřednost ekliptiky je malá, stačí uvažovat ekliptiku kruhovou, po které se Země tudíž pohybuje svým

ročním pohybem konstantní rychlostí  $v_{21}$ . Pro tuto rychlost zřejmě platí  $v_{21} = \frac{2\pi R_Z}{T_r}$ , kde  $R_Z$  je střední vzdálenost Země od Slunce, tedy  $R_Z = 1[\text{AU}] = 1.496 \cdot 10^8[\text{km}]$ , a  $T_r$  je doba, za kterou vykoná Země oběh kolem Slunce o  $360^\circ$ . Jedná se o siderický rok, tedy  $365.25636 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3.155815 \cdot 10^7[\text{s}]$ . Po dosazení do předchozího výrazu získáme  $v_{21} = 29.78[\text{km/s}]$ . Pro aberační konstantu  $A_r$ , příslušející k ročnímu pohybu pozorovatele, potom máme  $A_r = \frac{v_{21}}{c} = 9.93 \cdot 10^{-5}[\text{rad}]$ . Přechodem na úhlové sekundy máme  $A_r['] = A_r[\text{rad}] \cdot \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi}$ . Po dosazení vychází  $A_r = 20.48[']$ .



Obrázek 4:

K zmíněné **roční aberaci** přísluší ekliptikální souřadnicová soustava na nebeské sféře. Uvážíme-li opět kruhovou ekliptiku, dostáváme situaci znázorněnou na obr.4. Je na něm znázorněna kruhová ekliptika při pohledu od severního ekliptikálního pólu.  $S$  je její střed (Slunce),  $Z_0$  poloha Země v době jarní rovnodennosti a  $Z$  obecná poloha Země. Polopřímka  $Z_0S$  (a příslušná množina rovnoběžek) označuje směr na jarní bod, od něhož se (kladně) měří ekliptikální délka. Ekliptikální délka Slunce je  $\lambda_S$ , ekliptikální délka apexu pak  $\lambda_A$ . Protože podle definice apexu vzhledem ke kruhovosti ekliptiky je směr na Slunce kolmý ke směru na apex, plyne z obr.4, že

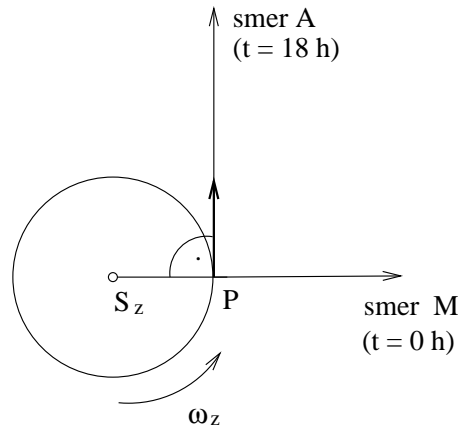
$$\lambda_A = \lambda_S - \frac{\pi}{2}.$$

Apex se tedy pohybuje po ekliptice (ekliptikální šířka  $\beta_A$  je trvale nulová). Pro jeho ekliptikální délku v hodinové míře platí  $\lambda_A = \lambda_S - 6$  hodin. Ekliptikální délka Slunce závisí na datu pozorování. V době jarní rovnodennosti (20. 3.) je nulová a poté každý den přibude o 0.986 stupně. Největší aberační posuv objektu při ročním pohybu je tedy po rovnoběžce (po geometrickém místě, kde ekliptikální šířka je konstantní, rovna stavu platícímu pro klidného pozorovatele) a činí (na každou stranu)  $A_r = 20.48[']$ , což přechodem k hodinové míře činí  $20.48 \cdot \frac{24}{360} = 1.365[\text{s}]$ .

Pokračujeme denním pohybem Země kolem své osy. Při tomto pohybu trajektorií pozorovacího stanoviště je kružnice poloměru  $r = r_Z \cos \varphi$ , kde  $r_Z$  je (střední) poloměr Země a  $\varphi$  zeměpisná šířka pozorovacího stanoviště. Pro rychlost  $v_{21}$  pozorovatele při tomto pohybu zřejmě platí  $v_{21} = r\omega_Z = \frac{2\pi r}{T_d}$ , kde  $T_d$  je doba jedné otáčky Země kolem své osy o  $360^\circ$ , tedy 1 hvězdný den = 86164.1[s], a  $\omega_Z$  je k této periodě příslušná úhlová rychlost. Pro obvodovou rychlost pozorovacího stanoviště tedy platí

$$v_{21} = \frac{2\pi r_Z}{T_d} \cdot \cos \varphi = \frac{2 \cdot 3.14159 \cdot 6.373 \cdot 10^6}{86164.1} \cdot \cos \varphi = 464.7 \cdot \cos \varphi [\text{m/s}] = 1673 \cdot \cos \varphi [\text{km/hod}].$$

Pro aberační konstantu  $A_d$ , příslušející k dennímu pohybu pozorovatele potom máme  $A_d = \frac{v_{21}}{c} = 1.55 \cdot 10^{-6} \cdot \cos \varphi [\text{rad}]$ . Přejdem na úhlové sekundy máme opět  $A_d ["] = A_d [\text{rad}] \cdot \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi}$ . Po dosazení vychází  $A_d = 0.32 \cdot \cos \varphi ["]$ .



Obrázek 5:

K zmíněné **denní aberaci** přísluší rovníková souřadnicová soustava na nebeské sféře. Situaci máme znázorněnou na obr.5. Je na něm znázorněna Země při pohledu od severního světového pólu. Tečna k zemské rovníčce, na které se nachází pozorovací stanoviště  $P$ , vyznačuje směr na apex při tomto pohybu. Spojnice středu  $S$  této rovníččky s pozorovacím stanovištěm vyznačuje směr na bod  $M$ , ve kterém se protíná nebeský rovník s jižní větví místního poledníku. Od tohoto směru (záporně) měříme délkovou souřadnici rovníkových souřadnic prvního druhu (hodinový úhel  $t$ ). Podle definice apexu a podle obr.5 je zřejmé, že směr na apex je kolmý na směr na bod  $M$ . Vzhledem k zápornému smyslu přibývání hodinového úhlu je zřejmé, že apex při tomto pohybu leží na nebeském rovníku a jeho hodinový úhel je 18 hodin. Protože platí  $\Theta = t + \alpha$ , kde  $\Theta$  je místní hvězdný čas a  $\alpha$  rektascenze, dostáváme odtud pro apex

$$\alpha_A = \Theta - t_A = \Theta - 18\text{h} = \Theta + 6\text{h}.$$

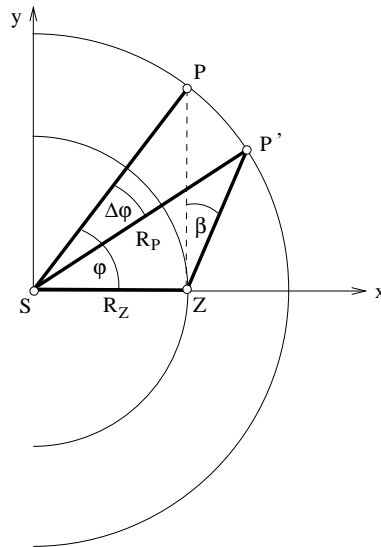
Rektascenze apexu je tedy o 6 hodin zvětšený místní hvězdný čas. Místní hvězdný čas se mění podle denní doby. Připomínáme, že nezačíná půlnocí jako čas sluneční a také plyne  $\frac{366.25}{365.25}$  krát rychleji než čas sluneční, jenž používáme v běžném životě. Bližší viz téma "Časomíra". Největší aberační posuv při denním pohybu se uskutečňuje pro pozorovatele na rovníku ( $\cos 0 = 1$ ) a po rovníčce (kde deklinace objektu je konstantní rovna deklinaci objektu pro případ klidného pozorovatele) činí (na každou stranu)  $A_d = 0.32 ["]$ , což přechodem k hodinové míře činí  $0.32 \cdot \frac{24}{360} = 0.0213 [\text{s}]$ .

#### Poznámka:

1. Zatímco roční aberace je při profesionálním pozorování objektů významná, je denní aberace vzhledem ke své velikosti na hranici měřitelnosti.

2. Kromě výše zmíněných pohybů vykonává pozemský pozorovatel ještě pohyb s celou sluneční soustavou kolem centra Galaxie. Tomuto druhu aberace (narozdíl od předchozích dvou) podléhají pouze objekty mimo sluneční soustavu. Vzhledem k dlouhé periodě pohybu ( $2 \cdot 10^6$  let) se poloha apexu za dobu existence vyspělého lidstva nezměnila. Souřadnice objektů se proto uvádějí už s ohledem na tento druh aberace. Připomeňme pouze, že souřadnice příslušející k tomuto typu aberace (tzv. **sekulární aberace**) jsou galaktické. Apex leží tedy na galaktickém rovníku. Jeho přibližné druhé rovníkové souřadnice jsou  $\delta = 30^\circ$ ,  $\alpha = 18\text{h}$ . Rychlost oběhu sluneční soustavy je cca  $250$  [km/s], čemuž odpovídá aberační konstanta  $A_s = 8.34 \cdot 10^{-4}$  [rad] =  $2'52''$ .

Poněkud jiný původ má tzv. **planetární aberace**. Její podstatou je rovněž konečnost rychlosti šíření světla, ovšem příčinou je pohyb jeho zdroje. V okamžiku pozorování planety do našeho oka dopadá světlo, které se od povrchu planety odrazilo už poněkud dříve (a sice před časem, který světlo potřebuje na překonání vzdálenosti mezi planetami). Planetu proto vidíme v místě odchýleném o tzv. **aberační úhel**  $\beta$  proti smyslu pohybu planet, oproti místu, kde by se planeta měla nacházet pro daný čas pozorování. Doba šíření světla mezi planetou a Zemí (tzv. **aberační čas**  $t_a$ ) značně závisí na vzájemném postavení planety ve vztahu k Zemi. Popíšeme stav ve zjednodušeném případě, kdy planeta se pohybuje po kruhové dráze v rovině ekliptiky (s výjimkou Merkura se jedná o vyhovující předpoklady).



Obrázek 6:

Na obr.6 je situace znázorněna pro vnější planetu s poloměrem dráhy kolem Slunce  $R_P$  a dobou oběhu  $T_P$ . V okamžiku pozorování se Země nachází v poloze  $Z$  vzdálené od Slunce  $S$  o  $R_Z$ . Planeta se v tento okamžik nachází v poloze  $P$ . Do pozorovatelova oka se však dostává světlo, které bylo od povrchu planety odraženo, když planeta se nacházela v poloze  $P'$ . Úhel  $\varphi$  mezi průvodiči Země a planety v okamžiku pozorování (tzv. **rozdíl jejich pravých anomálií**) je známým parametrem. Určíme aberační úhel  $\beta$  mezi polopřímkami  $ZP$  a  $ZP'$  (obr.6). Pro aberační čas zřejmě platí  $t_a = \frac{P'Z}{c}$ , kde  $c$  je rychlost šíření světla. Za tu dobu se planeta na své dráze posune o oblouk  $P'P$ , jemuž přísluší středový úhel  $\Delta\varphi$  (obr.6), pro který platí

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{t_a}{T_P} = 2\pi \cdot \frac{\overline{P'Z}}{cT_P}. \quad (9)$$

Vzdálenost  $\overline{P'Z}$  určíme z kosínové věty aplikované na obecný trojúhelník  $SZP'$ , ve kterém úhel  $\varphi - \Delta\varphi$  (obr.6) s dostatečnou přesností nahradíme úhlem  $\varphi$ . Obdržíme tak

$$\overline{P'Z} = \sqrt{R_Z^2 + R_P^2 - 2R_ZR_P \cos \varphi}. \quad (10)$$

Definujme nyní kartézský souřadnicový systém s počátkem ve středu Slunce a osou  $x$  danou polopřímku  $SZ$  (osa  $y$  je na  $x$  kolmá-viz obr.6). Souřadnice bodů v tomto systému zřejmě jsou

$$Z = [R_Z; 0]; \quad P = [R_P \cos \varphi; R_P \sin \varphi]; \quad P' = [R_P \cos(\varphi - \Delta\varphi); R_P \sin(\varphi - \Delta\varphi)].$$

Směrnice přímky  $ZP$  (definující směr, ve kterém se planeta v době pozorování skutečně nachází) je potom

$$k_1 = \frac{R_P \sin \varphi}{R_P \cos \varphi - R_Z} \quad (11)$$

a směrnice přímky  $ZP'$  (definující směr, ve kterém planetu pozorujeme) má tvar

$$k_2 = \frac{R_P \sin(\varphi - \Delta\varphi)}{R_P \cos(\varphi - \Delta\varphi) - R_Z}. \quad (12)$$

Směrnice přímk jsou tangenty úhlů, které tyto přímky svírají s osou  $x$  výše popsaného souřadnicového systému. Aberační úhel  $\beta$  je rozdílem těchto úhlů. Pro jeho tangentu tedy lze psát vztah platný v trigonometrii pro tangentu rozdílu úhlů. Platí tedy

$$\beta = \arctan \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}. \quad (13)$$

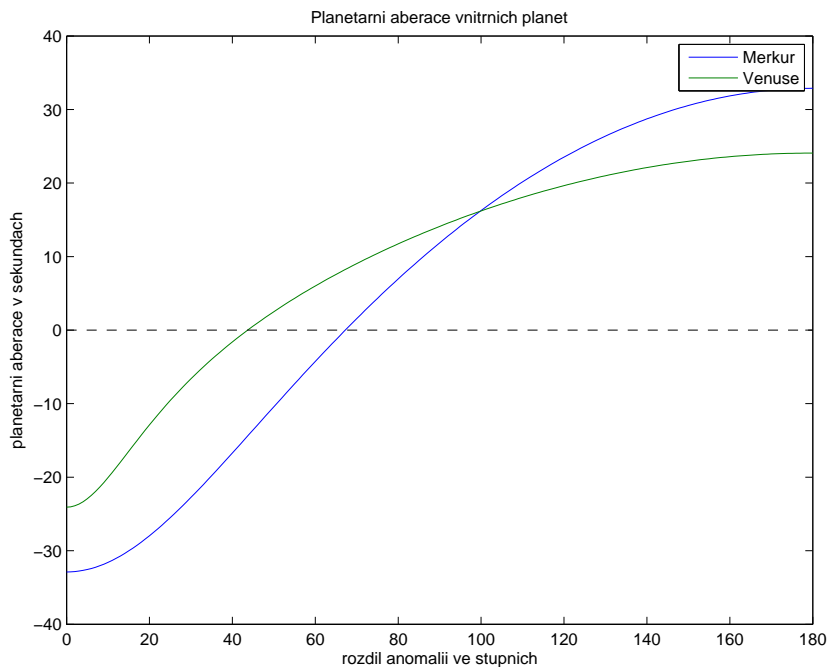
**Poznámka:** Pro případ neorientovaného rozdílového úhlu je v čitateli výrazu (13) znak absolutní hodnoty. Chápeme-li ovšem úhel jako orientovaný, absolutní hodnota chybí. Kladný aberační úhel pak popisuje situaci, kdy pozorovaná planeta má oproti skutečné odchylku **proti** smyslu pohybu planet po (zdánlivé) ekliptice a záporný aberační úhel popisuje situaci opačnou, tedy pozorovaná poloha má oproti skutečné odchylku **ve** smyslu pohybu planet. Popsaný algoritmus určení aberačního úhlu lze pak použít i pro vnitřní planety.

Shrneme-li algoritmus určení aberačního úhlu planetární aberace, postupujeme při definování vstupních parametrů  $R_Z$  (poloměr dráhy Země),  $R_P$  (poloměr dráhy planety),  $T_P$  (doba oběhu planety),  $c$  (rychlost šíření světla ve vakuu) a  $\varphi$  (rozdíl pravé anomálie planety oproti Zemi) následujícím postupem:

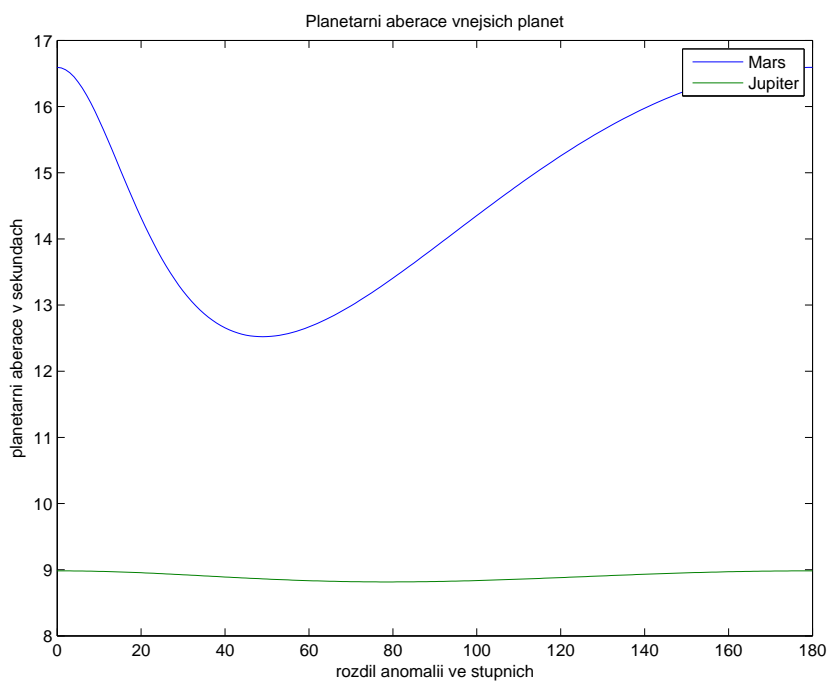
1. z (10) určíme vzdálenost  $\overline{P'Z}$ ,
2. z (11) určíme směrnici  $k_1$ ,
3. z (9) spočítáme úhel  $\Delta\varphi$ ,
4. z (12) vyčíslíme směrnici  $k_2$ ,
5. z (13) určíme aberační úhel  $\beta$ .



**Poznámka:** Poloměry drah planet lze vyjadřovat s výhodou v astronomických jednotkách. Pak  $R_Z = 1$ , čímž ušetříme jeden vstupní parametr. Vzdálenost  $\overline{P'Z}$  pak ale vyjde v astronomických jednotkách a pro její použití do (9) ji musíme převést na kilometry. Do (11) a (12) ji můžeme opět dosazovat v astronomických jednotkách.



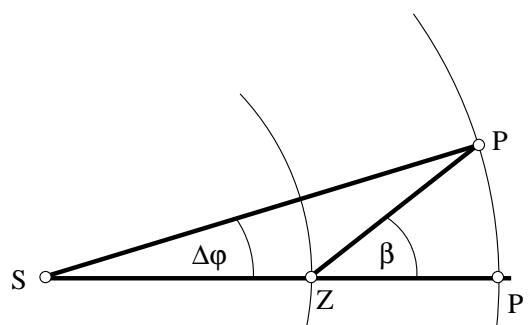
Obrázek 7:



Obrázek 8:

Pro ilustraci byly určeny závislosti aberačních úhlů všech planet sluneční soustavy na rozdílu jejich pravých anomálií. Výsledky jsou pro vnitřní planety znázorněny na obr.7 a pro Mars a Jupiter na obr.8. Z obrázků je patrné, že čím je planeta dále od Slunce, tím je extrémní aberační úhel menší. Největší je u Merkura, kde dosahuje 32 obloukových sekund (na obě strany). Rovněž je patrné, že pro vnější planety je aberační úhel trvale kladný, zatímco pro vnitřní planety může být i záporný (pozorovaná planeta je o aberační úhel ve smyslu pohybu planet oproti skutečné poloze). U velkých vnějších planet je závislost na rozdílu anomálií nepatrná. Proto grafy pro Saturn, Uran a Neptun nejsou znázorněny. Aberační úhel Saturna je 6.6'', Urana 4.7'' a Neptuna pak 3.7''. Poznamenejme ještě, že výsledky pro Merkura lze považovat pouze za orientační, neb tato planeta se (zdaleka) nejvíce vymyká předpokladům o kruhových drahách v rovině ekliptiky, za kterých byly výše popsány výsledky odvozeny.

Rychlou představu o velikosti aberačních úhlů si lze udělat uvážením speciálního případu, kdy  $\varphi - \Delta\varphi = 0$ . Tuto představu lze i v praxi aplikovat na vnější planety, protože se v této poloze nacházejí v opozici se Sluncem a jsou tedy velmi dobře pozorovatelné. Vnitřní planety jsou v této poloze v dolní konjunkci se Sluncem a tudíž jsou neviditelné. Pozorovatel tedy planetu vidí v jedné přímce se Sluncem, leč ve skutečnosti se tato už nachází v poloze  $P$  (obr.9). Vzdálenost  $\overline{ZP}$  je pak rozdílem poloměrů drah, takže pro



Obrázek 9:

aberační čas máme  $t_a = \frac{R_P - R_Z}{c}$ . Pro oblouk  $P'P$  zřejmě platí

$$P'P = 2\pi R_P \frac{t_a}{T_P} = 2\pi \frac{R_P(R_P - R_Z)}{cT_P}.$$

Pro aberační úhel  $\beta$  pak vzhledem k jeho malosti dostáváme

$$\beta \doteq \tan \beta \doteq \frac{P'P}{R_P - R_Z} = \frac{2\pi}{c} \cdot \frac{R_P}{T_P} [\text{rad}] = \frac{360}{c} \cdot \frac{R_P}{T_P} [^\circ].$$

Pro konkrétní případ Marsu, kdy  $R_P = 2.28 \cdot 10^8 [\text{km}]$  a  $T_P = 686.98 [\text{dní}] = 5.936 \cdot 10^7 [\text{s}]$ , dostáváme dosazením ( $c = 2.998 \cdot 10^5 [\text{km/s}]$ ) hodnotu  $\beta = 0.0046 [^\circ] = 16.6 ['']$ . Tato hodnota se velmi dobře shoduje s hodnotou Marsu pro  $\varphi = 0$  v obr.8.