2.4. Inverzní matice a hodnost matice

Cíle

Cílem kapitoly je zavedení význačných pojmů pro matice, jejichž znalost je nutná, mimo jiné, pro řešení soustav lineárních rovnic.

Předpokládané znalosti

Předpokladem dobrého zvládnutí látky je zejména znalost operace násobení matic.

Definice 2.4.1.

Inverzní maticí k čtvercové matici $\mathbf{A}$ řádu n rozumíme takovou čtvercovou matici $\mathbf{A}^{-1}$ řádu n, pro kterou platí: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice řádu n.

Definice 2.4.2.

Čtvercová **matice** $\mathbf{A}$ řádu $n \geq 2$, jejíž determinant $\det \mathbf{A} \neq 0$, se nazývá ***regulární***. V opačném případě jí říkáme ***singulární*** ($\det \mathbf{A} = 0$).

Věta 2.4.1.

Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu $n \geq 2$ a $\mathbf{A}^*$ je matice utvořená z algebraických doplňků $\mathbf{A}^*_{ik}$ prvků $a_{ik} \in \mathbf{A}$. Pak platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot (\mathbf{A}^*)^T.$$

Matici $(\mathbf{A}^*)^T$ nazýváme ***adjungovanou*** maticí k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $\tilde{\mathbf{A}}$, tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}.$$

Důkaz :

$$\mathbf{A}^{-1} . \mathbf{A} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} . \tilde{\mathbf{A}} . \mathbf{A} =$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} . \begin{pmatrix} \mathbf{A}^*_{11} & \mathbf{A}^*_{21} & \cdots & \mathbf{A}^*_{n1} \\ \mathbf{A}^*_{12} & \mathbf{A}^*_{22} & \cdots & \mathbf{A}^*_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{A}^*_{1n} & \mathbf{A}^*_{2n} & \cdots & \mathbf{A}^*_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} . \begin{pmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

Obdobně dokážeme $\mathbf{A} . \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Řešené úlohy

Příklad Určeme inverzní matici k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{matice } \mathbf{A} \text{ je regulární}$$

$$\mathbf{A}^*_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 18 \qquad \mathbf{A}^*_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -24 \qquad \mathbf{A}^*_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$\mathbf{A}^*_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -10 \qquad \mathbf{A}^*_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 \qquad \mathbf{A}^*_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\mathbf{A}^*_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \mathbf{A}^*_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad \mathbf{A}^*_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 18 & -24 & 6 \\ -10 & 15 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad Řešme rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

můžeme danou maticovou rovnici zapsat ve tvaru

$$\mathbf{A} . \mathbf{X} . \mathbf{B} = \mathbf{C} . \qquad (1)$$

Protože det $\mathbf{A}$ = 1 ≠ 0, det $\mathbf{B}$ = -2 ≠ 0, jsou matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ regulární a můžeme vypočíst inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ a $\mathbf{B}^{-1}$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vynásobíme-li rovnici (1) zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$ a zprava maticí $\mathbf{B}^{-1}$, dostaneme:

$\mathbf{A}^{-1} . \mathbf{A} . \mathbf{X} . \mathbf{B} . \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} . \mathbf{C} . \mathbf{B}^{-1}$,

$\mathbf{E} . \mathbf{X} . \mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1} . \mathbf{C} . \mathbf{B}^{-1}$,

$\mathbf{A}^{-1} . \mathbf{C} . \mathbf{B}^{-1}$.

Dosadíme:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} . \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zkoušku provedeme dosazením do zadání.

Příklad Jednoduchý způsob odesílání kódovaných zpráv spočívá v označení písmen abecedy celými čísly a odeslání zprávy jako posloupnosti čísel. Například zpráva

NAPIŠ VČAS

může být kódována jako

5, 8, 10, 21, 7, 2, 9, 8, 3.

V této zprávě je N reprezentováno 5, A je reprezentováno 8 atd. Bohužel, takto kódované zprávy jsou snadno rozluštitelné. Abychom učinili dekódování obtížnějším, můžeme použít násobení matic. Nechť $\mathbf{A}$ je matice, jejímiž prvky jsou celá čísla a det $\mathbf{A} = \pm 1$,

pak $\mathbf{A}^{-1} = \pm\, \tilde{\mathbf{A}}$. Ukážeme způsob kódování a dekódování naší zprávy pomocí matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kódovanou zprávu umístíme do sloupců matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 21 & 9 \\ 8 & 7 & 8 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Součin

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 21 & 9 \\ 8 & 7 & 8 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 37 & 28 \\ 80 & 83 & 67 \\ 54 & 67 & 48 \end{pmatrix}$$

určuje kódovanou zprávu, kterou odešleme ve tvaru

31, 80, 54, 37, 83, 67, 28, 67, 48.

Přijímající osoba může zprávu dekódovat násobením zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$, neboť $\mathbf{A}^{-1} .\, \mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} =$

$= \mathbf{E} \,.\, \mathbf{B} = \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A}^{-1}.\ \mathbf{A}\ .\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 31 & 37 & 28 \\ 80 & 83 & 67 \\ 54 & 67 & 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 21 & 9 \\ 8 & 7 & 8 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{B}\ .$$

Tato technika kódování může mít i složitější varianty. Například nechť $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ jsou tři různé matice řádu 3, jejichž det $\mathbf{A}_i = \pm 1$ pro i = 1, 2, 3. Vyjádřeme naši zprávu třemi vektory

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pak můžeme zprávu kódovat násobením

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_2\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{A}_3\mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{pmatrix}.$$

Zprávu můžeme odeslat ve tvaru

$$\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{c}_3^{\mathrm{T}}.$$

Takto odeslanou zprávu můžeme dekódovat násobením zleva

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{c}_1 \\ \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{c}_2 \\ \mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}.$$

Definice 2.4.3.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu (m, n). Považujme řádky za aritmetické vektory vektorového prostoru V_n. **Hodnost matice $\mathbf{A}$** je r (značíme h($\mathbf{A}$) = r), existuje-li r lineárně nezávislých řádků matice $\mathbf{A}$ a každých r+1 řádků je lineárně závislých.

Poznámka

Hodnost matice $\boldsymbol{A}$ *typu (m, n) bychom mohli definovat pomocí sloupcových vektorů z vektorového prostoru* V_m. *Obě definice vedou k témuž výsledku* $h(\boldsymbol{A}) = r$.

Věta 2.4.2. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná matice typu (m, n). Hodnost matice $\mathbf{A}$ se nezmění při kterékoliv z následujících elementárních úprav:

1. záměně pořadí řádků (sloupců),
2. násobení jednotlivých řádků (sloupců) čísly $k_i \neq 0$,
3. přičtení k některému řádku (sloupci) lineární kombinace zbývajících řádků (sloupců),
4. vynecháním řádku, který je lineární kombinací zbývajících řádků.

Důkaz: Žádná z uvedených úprav nemění počet lineárně nezávislých řádků či sloupců.

Poznámka

Dvě matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, *které mají stejnou hodnost* $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$, *nazýváme* ***ekvivalentními*** *a značíme* $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

Řešené úlohy

Příklad Určeme hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Budeme upravovat matici $\mathbf{A}$ podle věty 2. Ke 2. řádku přičteme (-1) násobek 1. řádku a ke 4. řádku (-2) násobek 2. řádku

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} .(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \quad .(-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

3. a 4. řádek můžeme vynechat (dle 4. bodu věty 2).

Je vidět, že v upravené matici jsou dva lineárně nezávislé řádky, tzn., že hodnost matice $\mathbf{A}$ je dvě, $h(\mathbf{A}) = 2$.

Kontrolní otázky

1. Pro inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k čtvercové matici $\mathbf{A}$ platí

   a) $\mathbf{A}+\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{A}=\mathbf{E}$,

   b) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$,

   c) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice.

2. Čtvercová matice $\mathbf{A}$, jejíž determinant $\det\mathbf{A}=0$ se nazývá

   a) singulární,

   b) nulová,

   c) regulární.

3. Inverzní matice k matici $\mathbf{A}$ existuje

   a) když $\mathbf{A}$ je singulární matice,

   b) vždy, když $\mathbf{A}$ je čtvercová matice,

   c) když $\mathbf{A}$ je regulární matice.

4. Adjungovaná matice $\tilde{\mathbf{A}}$ je vytvořená

   a) z algebraických doplňků prvků matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ (tj. matice transponovaná k původní matici $\mathbf{A}$),

   b) ze subdeterminantů prvků matice $\mathbf{A}$,

   c) z algebraických doplňků prvků matice $\mathbf{A}$.

5. Hodnost matice $\mathbf{A}$ je číslo r, které udává

   a) maximální počet lineárně závislých řádků (sloupců) matice $\mathbf{A}$,

   b) maximální počet lineárně nezávislých řádků (sloupců) matice $\mathbf{A}$,

c) hodnotu determinantu dané matice $\mathbf{A}$.

6. Dvě matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ nazveme ekvivalentní, když

   a) mají stejnou hodnost,

   b) jsou stejného typu,

   c) se rovnají hodnoty jejich determinantů.

7. Při vynásobení libovolného řádku (sloupce) matice $\mathbf{A}$ číslem k $(k \neq 0, k \neq 1)$ se hodnost matice

   a) k krát zvětší,

   b) k krát zmenší,

   c) nezmění.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. c) 4. a); 5. b); 6. a); 7. c).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočítejte inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ a proveďte zkoušku:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

j) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Řešte rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -24 & 3 \\ -44 & 15 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Řešte rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$:

a) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -8 & 21 & 11 \\ 4 & -5 & 5 \\ -9 & 18 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Vypočtěte hodnost matice:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ -7 & 10 & -20 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \\ 5 & -10 & 15 \end{pmatrix}$, e) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Pro která x má matice $\mathbf{A}$ hodnost h($\mathbf{A}$) = 2 ?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3x-1 & x \\ 4 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Proveďte diskusi hodnosti matice **A** vzhledem k parametru p.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & p \end{pmatrix}.$$

7. V anglicky psané zprávě je mezera označena 0, písmeno A označeno 1, B označeno 2, C označeno 3 atd. podle anglické abecedy. Zpráva byla kódována násobením zleva maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a odeslána ve tvaru

-19, 19, 25, -21, 0, 18, -18, 15,
3, 10, -8, 3, -2, 20, -7, 12.

Dekódujte zprávu.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A}^{-1}$ neexistuje (det $\mathbf{A}$ = 0), e) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -5 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, i) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,

j) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{X} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 18 & -7 \\ -20 & 18 \end{pmatrix}$.

3. a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -19 & 12 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

4. a) $h(\mathbf{A}) = 2$, b) $h(\mathbf{B}) = 2$, c) $h(\mathbf{C}) = 2$, d) $h(\mathbf{D}) = 1$, e) $h(\mathbf{M}) = 3$, f) $h(\mathbf{F}) = 3$.

5. $x = \frac{2}{7}$. 6. $h(\mathbf{A}) = 2$ pro $p = 5$, $h(\mathbf{A}) = 3$ pro $p \neq 5$. 7. Do your homework.

Kontrolní test

1. Zjistěte, zda matice $\mathbf{A}$ je singulární:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) ano, b) ne.

2. Zjistěte, zda matice $\mathbf{B}$ je regulární:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 3 \\ 1 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) ano, b) ne.

3. K dané matici $\mathbf{A}$ vytvořte matici adjungovanou $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, b) $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

4. K dané matici $\mathbf{A}$ vytvořte matici inverzní $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 1 \\ 29 & 18 & -3 \\ -11 & -7 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. K dané matici $\mathbf{A}$ vytvořte matici inverzní $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -19 & 5 & -6 \\ 12 & -3 & 3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Řešte rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 9 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, b) nemá řešení.

7. Vypočtěte hodnost matice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 2$, b) $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 4$.

8. Vypočtěte hodnost matice $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 5 & -11 & -29 \end{pmatrix}.$$

a) $h(\mathbf{B}) = 3$, b) $h(\mathbf{B}) = 2$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. a); 4. b); 5. b); 6. a); 7. a); 8. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 6 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.4. znovu.