ZAJÍMAVÁ MATEMATIKA

Lilly Görkeová · Kurt Ilgner · Günter Lorenz ·
Günter Pietzsch · Manfred Rehm

Ilustroval Rudolf Schultz-Debowski

ALBATROS · PRAHA

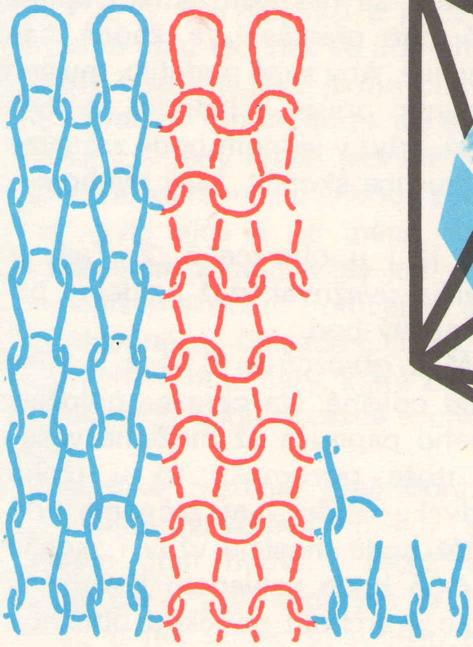
Lektoroval dr. František Běloun

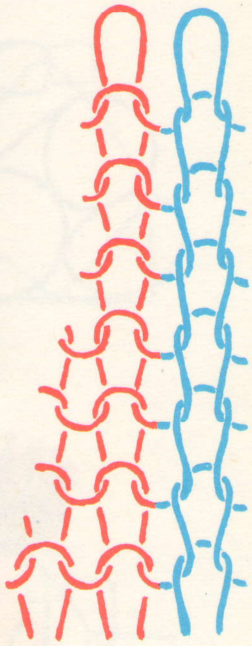
Poznámka:

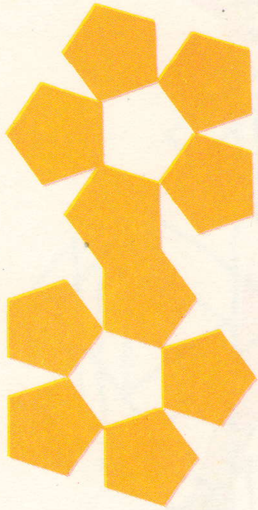
Knížka, která se vám dostává do rukou, je již druhým vydáním překladu německého originálu Rund um die Mathematik, určeného dětem a mládeži NDR. Je proto samozřejmé, že se v ní setkáte s fakty týkajícími se života v této zemi. Jsou to však pouze fakta, jejichž prostřednictvím autoři vysvětlují to, co tvoří hlavní téma knížky – různé matematické jevy, pojmy a úkony. Tak se třeba s diagramem seznámíte na příkladu struktury obyvatel NDR. Pro samotné pochopení principu grafického znázornění to však jistě není důležité.
Věříme, že vám knížka přinese mnoho nových poznatků a že se setká se stejným zájmem jako její první vydání.

Redakce

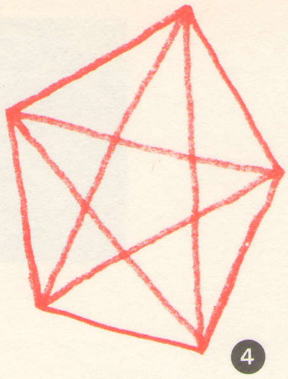
Jedním tahem



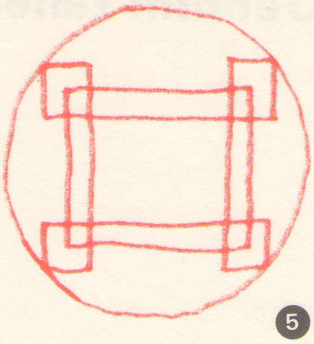




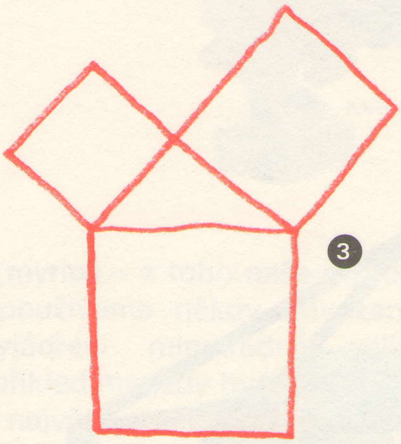
O obrazcích, které je možno nakreslit jedním tahem . . .
O jiných obrazcích, které tak nakreslit nelze . . .
O šňůře na prádlo a o námořnických uzlech . . .
O smyčkách při pletení, při háčkování a kdovíkde jinde . . .
O Eulerově procházce po sedmi mostech . . .
O Hamiltonově putování po dodekaedru . . .
O životu nebezpečném labyrintu . . .



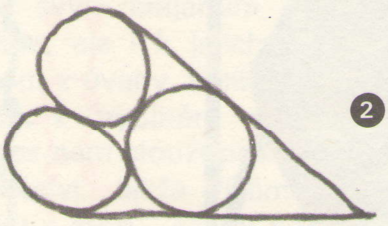
4



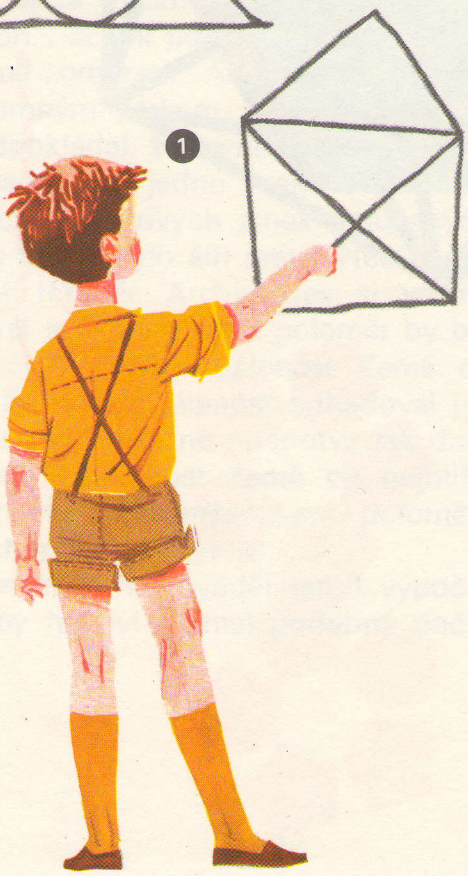
5



3



2



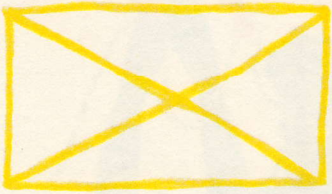
1

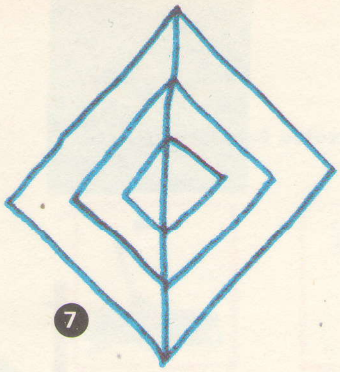
Na skromném domečku v kresbě č. 1 není na první pohled vidět, jaké má zvláštní vlastnosti. Je totiž prastarý, ba dokonce historický. Celé generace našich předků jej totiž – neobývaly, ale kreslily! Má jednu zvláštnost. Musí se nakreslit jedním tahem, to znamená bez přerušení, a žádná čára nesmí být dvojitá. Aby se to podařilo, musíme začít s kreslením pouze v jednom ze dvou určitých bodů. Když v jednom bodě začneme, ve druhém musíme skončit. Měli bychom to také zkusit.

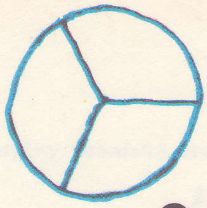
Obdobné to je i u obrazce č. 2. Tam už musíme chvilku uvažovat, než najdeme počáteční a konečný bod.

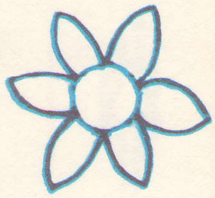
Zkusme totéž u obrázců č. 3, 4 a 5, které jsou poněkud odlišné. Na obrazce položíme list průsvitného papíru a už můžeme vesele kreslit. Při troše pozornosti to u těchto obrazců vždycky vyjde – ať začneme kdekoli. V tomtéž bodě musíme vždy i skončit. U obrazce č. 5 bude vzhledem k velkému počtu spojnic a vrcholů poněkud obtížnější udržet si přehled.

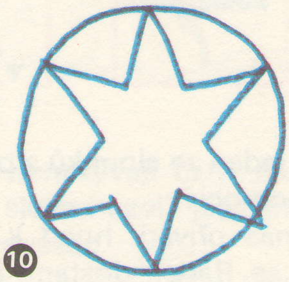
Marně se však budeme pokoušet nakreslit jedním tahem obrazec č. 6. V čem to vězí? Přemýšlejme, co je bezpodmínečně nutné k tomu, chceme-li nakreslit nějaký obrazec jedním tahem tak, aby žádná čára nebyla dvojitá. Z každého bodu, do kterého jsme došli, musíme opět vyjít jinou cestou. V každém bodě se proto musí setkat dvě čáry: jedna vstupující, druhá vystupující... nebo čtyři čáry: dvě vstupující, dvě vystupující... nebo šest čar..., krátce: Počet čar, které se protínají v jednom bodě, musí být vždy sudý.

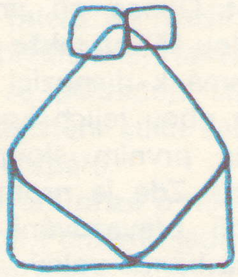

6

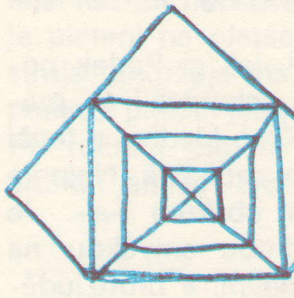

7

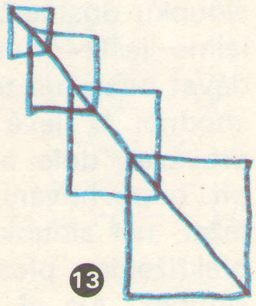

8

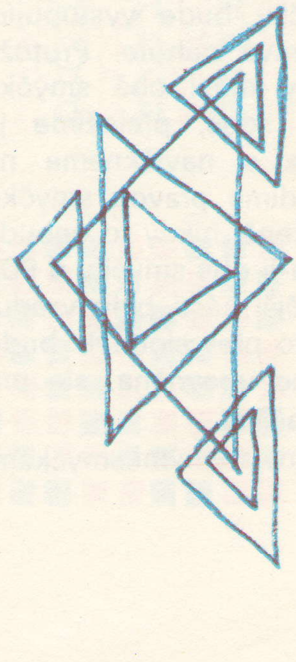

9


10


11


12


13


14

V tomto případě obrazec snadno nakreslíme a tažená čára se vrátí opět k výchozímu bodu, jak tomu je u obrazců č. 3, 4 a 5.
Je ovšem také možné, že skončíme s obkreslováním v jiném místě, jako třeba u obrazců č. 1 a 2. Pak vychází z počátečního bodu o jednu čáru víc, než se do něho vrací, a konečný bod má také jednu čáru navíc, která sice vede do tohoto bodu, ale už z něho nevychází. Lze tedy kreslit jedním tahem i takové obrazce, které mají dva body s lichým počtem čar – ne více a ne méně. Musíme přece s kreslením začínat vždy jen v jednom bodě a v dalším skončit. Podívejme se nyní znovu a důkladně na obrazce č. 1 a 2 a spočítejme u všech vrcholů čáry, které z nich vycházejí! Z ostatních bodů obrazce vycházejí vždy dvě čáry.
Nyní také zjistíme, proč obrazec č. 6 tak tvrdošíjně vzdoroval našim snahám. Má celkem čtyři body, z nichž vychází lichý počet čar – totiž vždy jen tři. Nemusíme se proto o něj vůbec pokoušet. Než začneme s překreslováním obrazců č. 7 až 14, pozorně si je prohlédněme! U kterých budeme volit libovolný počátek? Které z nich mají zcela určité výchozí a konečné body a u kterých to v žádném případě nevyjde?
Se zcela obdobným problémem se setkává Radek, který často pomáhá mamince s věšením prádla. Stojí s prádelní šňůrou před čtyřmi sloupky a marně se snaží natáhnout šňůru tak, aby tvořila všechna možná spojení. Prádlo přece potřebuje hodně místa. Ale šňůra nesmí jít nikde dvojmo. Dokud bylo sloupků pět, podařilo se mu to oka-

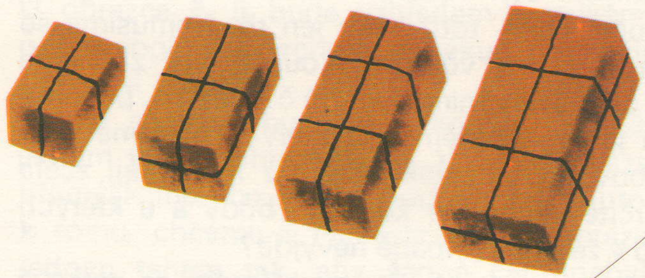
mžitě, ale teď se jeden ze sloupků zlomil. Kdo může Radkovi pomoci?

Prádelní šňůra nás přivádí hned k dalšímu problému: Když se Radek dostane až k poslednímu sloupku, musí šňůru upevnit tak, aby držela, ale zároveň aby se dala snadno rozvázat. Občas, při „malém prádle", nenapíná celou šňůru, takže mu kus zbývá. Radek tedy nemá k dispozici pro upevnění šňůry žádný z obou jejích konců. Jeden konec je vždy na prvním sloupku, druhý je ještě v klubku. Zde je proto upevnění těžší než třeba při převazování balíčku provázkem, který má konec volný.

Abychom lépe pochopili, jak si Radek pomůže, vezmeme si sami „sloupek" a „prádelní šňůru" – třeba topůrko kladiva a tenčí provázek – a zkusíme to společně. Nejprve udělejme smyčky podle obrázku –a–. Je jasné, že se šňůra jedinou smyčkou na sloupku dostatečně neupevní, a proto udělejme ještě druhou vedle. Přitom musíme dávat pozor na to, aby smyčky nebyly zcela shodné. U levé smyčky bude vystupující provázek dole a u pravé nahoře. Protože při připevňování šňůry musí obě smyčky ležet na sloupku na sobě, přeložíme je překřížením přes sebe a navlékneme na sloupek. Ale ať přehodíme pravou smyčku přes levou, nebo obráceně, nikdy to nebude pořádně držet. Otočíme-li obě smyčky o 90° dozadu, aby jejich vnější části byly vzadu, a navlékneme-li je takto přes sloupek, bude sice šňůra o něco lépe upevněna, ale pro prádlo by to ještě nestačilo.

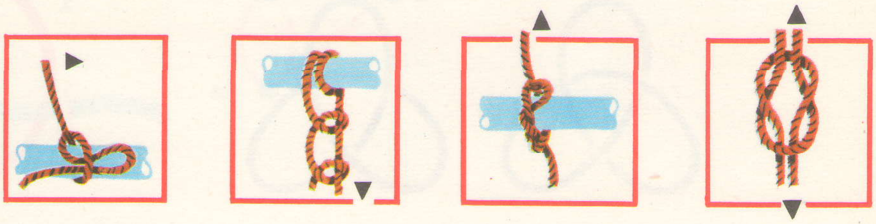
Zkusme to nyní se dvěma stejnými smyčkami

Uvažuj, jak můžeme tyto balíčky převázat jediným kouskem provázku tak, aby nikde nebyl veden dvojitě. Vyzkoušej si to!



a **b**

Škotový uzel, dvě poloviční smyčky, tesařský uzel, křížový uzel



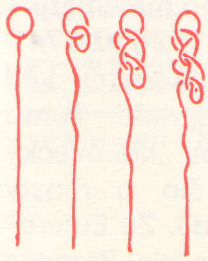
–b– a přesuňme levou smyčku přes pravou tak, aby vystupující a vstupující část provázku byly uvnitř. Navlékneme-li tuto dvojitou smyčku na sloupek a zatáhneme, docílíme v obou směrech takové pevnosti, že nemusíme mít o prádlo strach. Námořníci nazývají tuto dvojitou smyčku tkalcovským uzlem a upevňují jí lodi u břehu tak, že smyčky postupně přehazují na kůl v molu. I v našem případě si nebudeme smyčky předem překládat přes sebe a teprve potom je navlékat na sloupek, ale jednu po druhé přehodíme. Zkusme to a přesvědčíme se zároveň, že tento uzel lze také lehce rozvázat.

Zmíněný uzel je pouze jedním z mnoha námořnických uzlů. Uzly tohoto typu jsou důležité také pro horolezce. V matematice se však nenazývají uzly, protože matematik používá slova „uzel" jen tehdy, jde-li o uzavřený provazec.

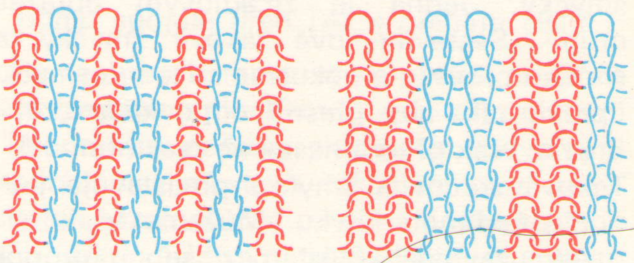
Zvlášť složité je vedení příze při háčkování a pletení. Háčkování začíná základním okem na začátku příze a háčkem se pak protahují další smyčky – oka (která na rozdíl od základního oka nejsou překřížená), takže vznikne nové oko a tak se pokračuje stále dál. Dokud není konec zajištěn, stačí zatáhnout za přízi a celé dílo se rozpáře.

Při pletení je protahování příze o něco složitější než při háčkování. Poměrně jednoduché je pletení na pletacím stroji. Hřeben tohoto stroje přidržuje na okrajích oka, jimiž se pomocí pletací jehly protahují další oka.

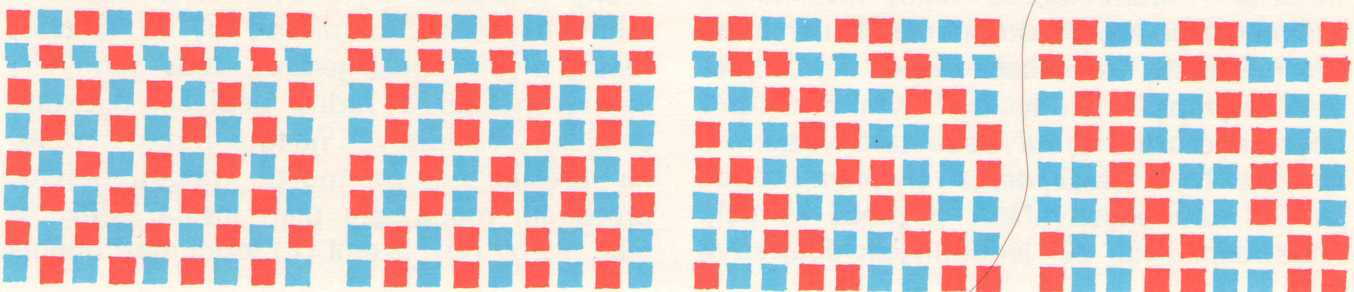
Při ručním pletení jedna jehlice oka drží, druhá jehlice tvoří nová oka. Základem

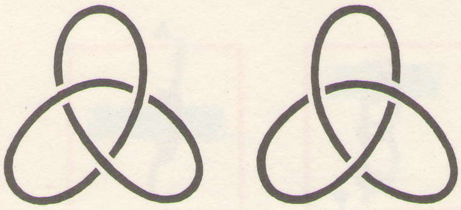


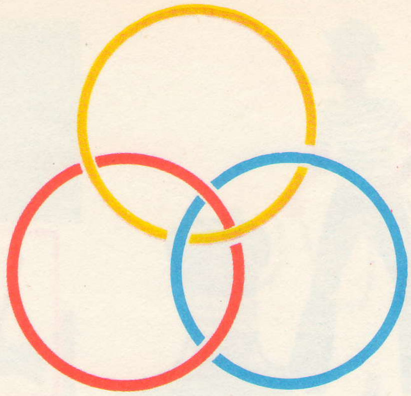
Vedení příze při háčkování



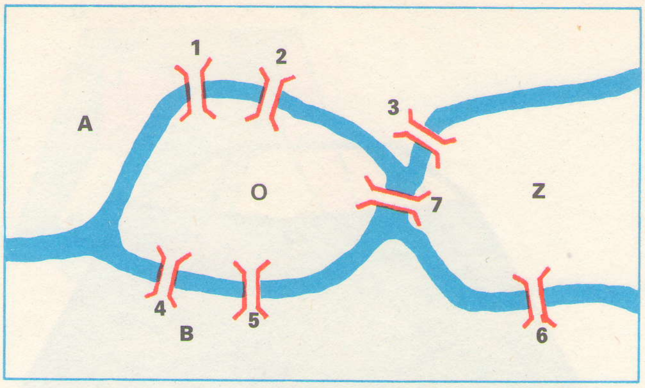
Střídáním ok hladce a obrace při pletení vznikají různé vzory

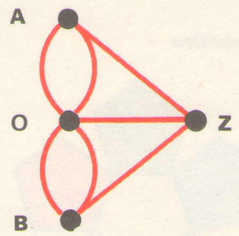


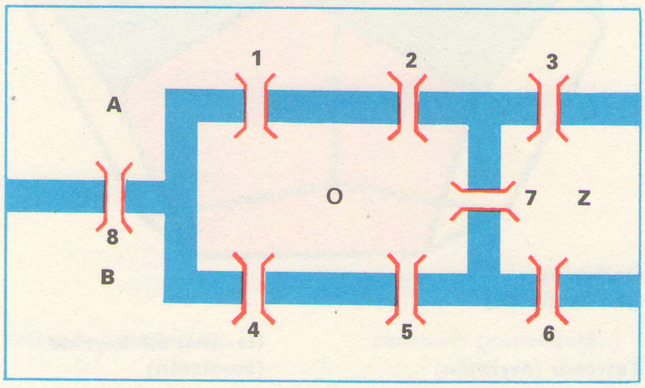




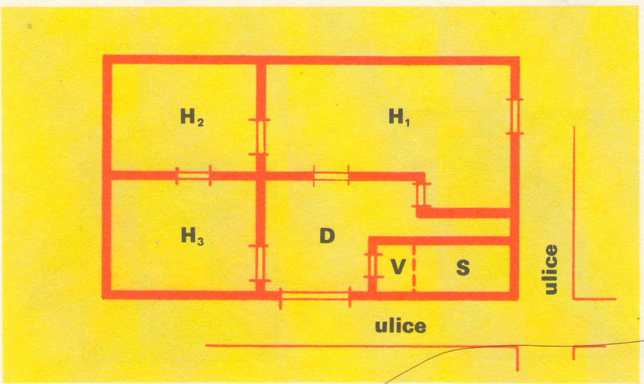
každého pletení jsou dva způsoby tvoření ok – hladce a obrace –, jejichž kombinací vznikají různé vzory.
I při pletení je možno zatáhnutím za dosud nezajištěnou přízi celou práci zmařit. To je podstatný rozdíl proti splétání, které běžně nazýváme uzly. Za skutečně zauzlenou tkaničku můžeme tahat, jak dlouho chceme, ale uzel tím nanejvýš ještě víc utáhneme. Nakonec se tkanička třeba utrhne, ale nerozváže se.
Proto také není naopak možno udělat uzel na provázku, aniž bychom uvolnili aspoň jeden konec, ledaže bychom použili malého triku a připravili si tento uzel předem na zkřížených rukou. Když potom konec provázku uchopíme a roztáhneme ruce, „přejde" uzel jaksi z rukou na provázek.
Nyní si prohlédneme obě „srdcovité" smyčky. Jedna je zrcadlovým obrazem druhé. Sestavme dvě takové smyčky ze silného provazu a pokusme se jednu smyčku upravit tak, aby přesně odpovídala druhé. Provaz však přitom nesmíme přestřihnout!
Taková srdcovitá smyčka představuje jedinou uzavřenou křivku. Můžeme však také různé uzavřené křivky mezi sebou propojit tak, jak to vidíme u tří barevných kruhů na obrázku. Přitom nejsou nikdy dva kruhy vzájemně spojeny. Přestřihneme-li jeden kruh, všechny kruhy se od sebe oddělí. Podívejme se na olympijské kruhy, které symbolizují pět obydlených dílů světa. Jsou také vzájemně spojeny. Nyní uvažujme, jak bychom propojili pět uzavřených křivek tak, aby se celý řetěz rozpadl na pět jednotlivých dílů, když jednu z křivek (kteroukoli) rozstřihneme. S olympijskými kruhy se nám to samozřejmě nepodaří.
Všechny otázky, které jsme zatím položili, patří do zvláštního odvětví geometrie, do topologie. V topologii nezáleží na tom, jak dlouhé jsou jednotlivé obrazce nebo jaký mají plošný obsah. Stejně se nerozlišuje mezi přímkou a křivkou a nezáleží ani na velikosti úhlů. Topologie se zabývá takovými vlastnostmi geometrických útvarů, které zůstávají zachovány, i když útvar všelijak deformujeme, ovšem jen tak, abychom neporušili vzájemné souvislosti. Například nepřidáme ani neubereme žádné křížení čar, neboť sousední body musí zůstat zase sousedními a obráceně: body, které nejsou sousední, musí tuto vlastnost zachovat.
Jeden z nejstarších topologických problémů je spojen se jménem švýcarského matematika Leonarda Eulera, který v letech 1725 až 1741 a 1766 až 1783 působil na Akademii věd v Petrohradě, dnešním Leningradě. Tento problém je znám pod jménem „královecký mostový problém", protože šlo o mosty v Královci, dnešním Kaliningradě. Za Eulerových dob vedly přes obě ramena řeky Pregelja mosty 1 až 7, z nichž pět vedlo na ostrov (O) zvaný Kneiphof. Bylo by možné udělat si takovou procházku, při níž by se všechny mosty přešly pouze jednou, tedy žádný by se nevynechal a žádný nepřešel dvakrát? Je zřejmé, že odpověď na tuto otázku nezáleží na přesné poloze mostů; nepotřebujeme proto ani mapu, ani plán města. Můžeme také ostrov (O), území (Z) ležící mezi oběma







2. To je plán závodu s dvorem D, s halami H_1, H_2, H_3 a se správní budovou S, kde je vrátnice V. Strážný má na noční obhlídce projít všemi dveřmi a bránami pouze jednou a ihned je za sebou zavřít. Pochůzka musí samozřejmě skončit ve V. Uzavření dveří V před obchůzkou se nezapočítává. Je taková cesta možná? Kde by musel strážný začít a kudy by cesta vedla?

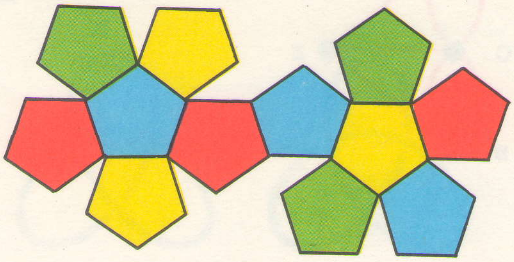


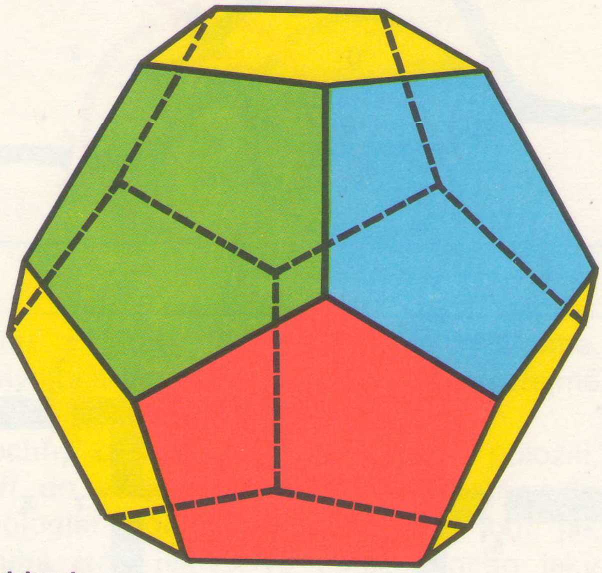
rameny řeky a rovněž obě nábřeží (A) a (B) nahradit body a mosty spojnicemi bodů. Tak vznikne takzvaný graf a královecký mostový přoblém vyústí v otázku, zda je možno tento graf projít jedním tahem. Jak to můžeme vyřešit, to jsme už poznali. Můžeme si proto sami promyslet, proč taková procházka přes královecké mosty není možná. Pokusme se nyní zodpovědět tyto otázky:

1. Byla by tato procházka uskutečnitelná, kdybychom mohli přejít dvakrát jenom most 7?
2. Jak musíme jít, když má procházka začít a skončit v bodě (A), žádný most se nesmí vynechat a co nejméně mostů projít dvakrát?
3. Byla by taková procházka možná, kdybychom mohli použít také později postaveného železničního mostu (8), který přímo spojuje břeh (A) s břehem (B)?

Euler zobecnil mostový problém tak, že místo se čtyřmi plochami (územími) pracoval s libovolným počtem ploch a s libovolným uspořádáním mostů a toků řek mezi nimi. O této otázce napsal pojednání, které předložil roku 1736 petrohradské Akademii. Touto prací se vlastně zrodila topologie. Okružní cesty jsou také podstatou hry trpělivosti s názvem Cestující po dodekaedru, kterou vydal roku 1859 v Londýně irský matematik sir William Rowan Hamilton. Úkolem této hry bylo projít po hranách pravidelného dvanáctistěnu (dodekaedru) tak, aby každý vrchol byl navštíven jednou a cesta skončila opět ve výchozím bodě.

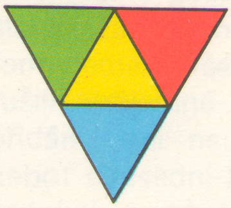
Síť dodekaedru



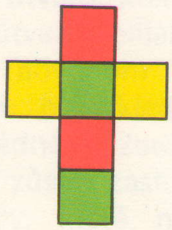


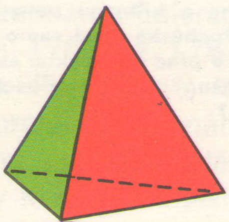
Dodekaedr
(dvanáctistěn)

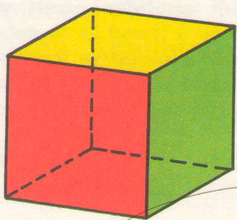
Tetraedr (čtyřstěn)

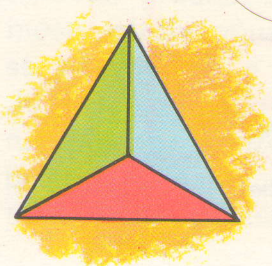


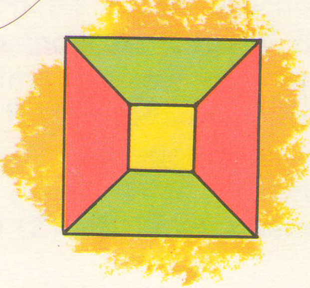
Hexaedr čili krychle
(šestistěn)











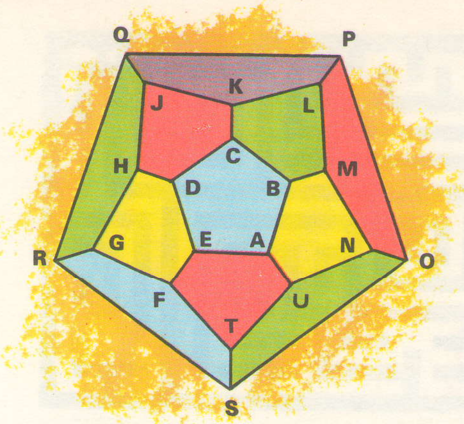
I zde je nejjednodušší a nejpohodlnější řešení pomocí grafu – tedy přechod z tělesa na rovinný útvar. Graf odpovídající dodekaedru vidíme na obrázku na str. 41. Úsečky grafu odpovídají hranám dodekaedru a body, které v grafu nazýváme uzlovými body a které jsou označeny písmeny A až U, odpovídají vrcholům tělesa.

- Okružní cesta po dodekaedru je poměrně snadná. Uvažujme, je-li ji možno provést tak, aby se po každé hraně přešlo jen jednou!
- Hamilton úkol ještě trochu pozměnil:

1. Prvních pět bodů této cesty má být stanoveno předem. Zkusme to nejprve s body K–L–M–N–O a pak s body A–U–T–S–R.
2. První tři body jsou určeny a cestovat se nesmí zpět k výchozímu bodu, ale k předem určenému bodu konečnému. Předem určenými body budou nejprve třeba body A–B–C a cesta má skončit v bodu Q, S nebo D.

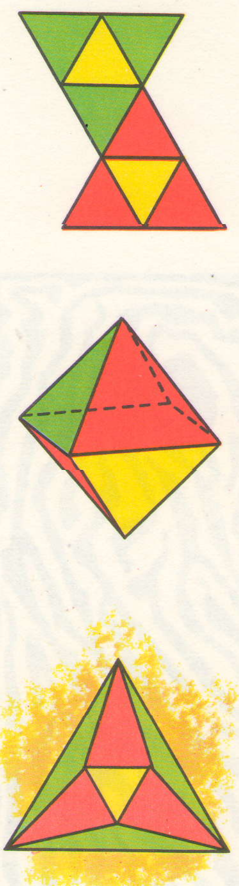
- Tento druhý případ můžeme ještě doplnit tím, že má být vynechán určitý bod, třeba M. Vidíme tedy, že počet variant této hry je nevyčerpatelný. Totéž můžeme zkusit
- i s jinými pravidelnými tělesy. Grafy patřící k těmto tělesům jsou rovněž vyobrazeny.

K topologickým problémům patří také bludiště neboli labyrinty. Jejich pojmenování se odvozuje od stavby, labyrintu, kterou podle řecké pověsti vybudoval Daidalos na příkaz krále Minoa na Krétě pro vraždícího netvora Minotaura, napůl člověka a napůl býka. Minotaurus vyžadoval lidské oběti, dívky a jinochy. Hrdina Théseus si umínil,

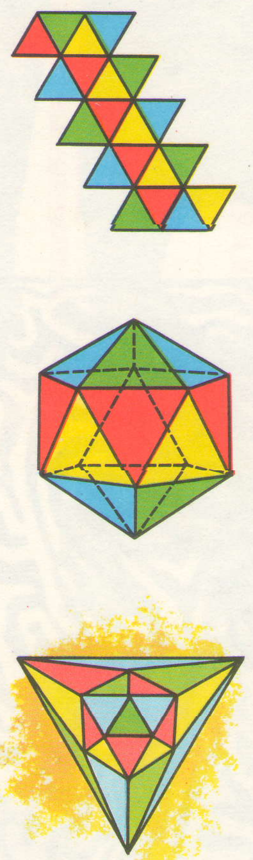


Graf dodekaedru

Oktaedr (osmistěn)



Ikosaedr (dvacetistěn)

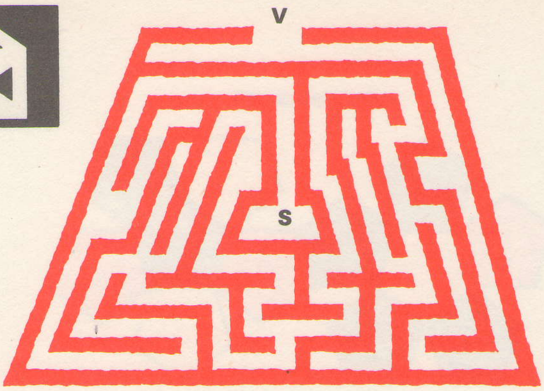


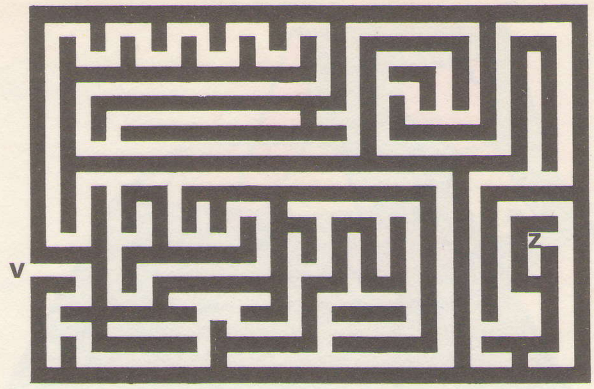
že zemi od tohoto utrpení osvobodí a Minotaura zabije. Nejprve jej však musel v labyrintu vyhledat. To bylo velmi nebezpečné, protože z labyrintu se dosud nikdo nevrátil; každý v něm zabloudil. Dcera krále Minoa, Ariadna, Thésea milovala. Dala mu velké klubko příze, jejíž začátek měl upevnit u vchodu do labyrintu, aby po vítězství nad Minotaurem našel cestu zpět. Díky tomuto nápadu královské dcery se Théseovi dílo podařilo.

V době baroka se stalo módou pěstovat živé ploty umělecky sestříhané do tvaru labyrintu. Taková zahradní bludiště nacházíme dnes u mnoha zámků. Keře jsou však uspořádány tak pravidelně, že v nich nikdo zabloudit nemůže.

Skutečný zahradní labyrint je Hampton Court poblíž Londýna. Tam je nutno najít cestu od vchodu V do středu S (obrázek na straně 42). Na zpáteční cestě by nám jistě pomohla Ariadnina nit. Co však uděláme, když žádnou nemáme? Nejjistější je držet se stále na jedné straně stěny, ať už na pravé, nebo na levé. Hlavní je zůstat po celou cestu při zvolené straně. Ani tím však není zaručeno, že projdeme všemi částmi labyrintu. Může se stát, že z bludiště vyjdeme ven, aniž jsme dosáhli středu S. Ovšem i Théseovi s Ariadniným klubkem se mohlo stát, že by byl nikdy Minotaura nenašel.

Existuje však způsob, který zaručuje cestu všemi částmi labyrintu. Je třeba označit každou chodbu, do níž vkročíme, a při návratu na stejná místa si ji znovu označit, ovšem jinak. K tomu je třeba dodat ještě





poučení, jak pokračovat dál při dosažení bodu, z něhož vedou jak označené, tak neoznačené cesty. My se však tímto složitým postupem nebudeme už dál zabývat. Přece jen se však pokusme dostat v labyrintu zahrady Hampton Court z V do S, když se budeme držet stále při pravé straně stěny! Projdeme tímto způsobem všechny chodby? Potom to zkusíme s levou stranou. Zůstanou-li nám některé chodby, kterými jsme neprošli, jsou to tytéž chodby jako při cestě po pravé straně?

Na obrázcích vidíme ještě dva jiné labyrinty. V jednom hledá zajatec Z východ V. Takové labyrinty si můžeme sestavit sami. Je ovšem rozdíl, díváme-li se na ně shora, a máme tedy přehled, nebo jsme-li uvnitř a pokoušíme se vyjít ven. Chceme-li se vžít do úlohy hledajícího, který nezná celkové uspořádání labyrintu, vystřihneme v listu papíru malý otvor. Papír položíme na labyrint tak, aby otvor umožnil pohled jen na malou plošku kolem místa, kde právě stojí hledající.