MA2BP_PGE, 5. ledna 2015

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích nějakého eukleidovského prostoru.

Každý úkol je hodnocen 6 body, maximální možný zisk je 84 bodů; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 42 bodů.

---

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [0, -1, 0], \quad B = [-1, 2, 2], \quad C = [0, 1, 1], \quad D = [1, 0, 6].$$

+ Dokažte, že afinním obalem množiny $\{A, B, C\}$ je rovina a že bod D v této rovině neleží.
+ Určete patu kolmice z bodu D k rovině $\rho = ABC$.
+ Určete souřadnice bodu E, který je souměrný s bodem D podle roviny $\rho = ABC$.
+ Určete objem mnohostěnu $ABCDE$.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{x_1 + 4x_2 = 1,\ x_1 - 4x_3 = 2\},$$
$$\mathcal{C} = \{[7, 0, 7, 4] + t(4, d, 1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \text{kde} \quad d \in \mathbb{R}.$$

+ Určete dimenze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, parametrické vyjádření $\mathcal{B}$ a rovnicové (neparametrické) vyjádření $\mathcal{C}$.
+ V závislosti na hodnotě $d \in \mathbb{R}$ určete vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
+ Určete, pro které hodnoty $d \in \mathbb{R}$ jsou podprostory $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ kolmé.

3. Udejte příklad afinních podprostorů vhodného eukleidovského prostoru, které jsou mimoběžné a mají vzdálenost 15.

4. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{v}_1 = (0, 5, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 0, 1, 5), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 1, 0, 0).$$

+ Definujte pojem vektorového součinu a určete $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$.
+ Dokažte, že obecně platí: vektorový součin je nulový právě tehdy, když určující vektory jsou lineárně závislé.

5. V rovině jsou dány transformace

$$f_1([x, y]) = [y - 3,\ x + 3],$$
$$f_2([x, y]) = [-y - 1,\ -x - 1].$$

+ Dokažte, že složená transformace $f = f_2 \circ f_1$ je shodnost a určete její samodružné body a směry.
+ Určete druh a určující prvky transformace $f = f_2 \circ f_1$.

6. Udejte příklad afinní transformace v rovině, která má modul různý od 1 a bod $A = [2, 0]$ zobrazuje na bod $A' = [1, 5]$.

7. Dokažte, že každé podobné zobrazení je injektivní (prosté).