

## MA2BP\_PGE, 13. ledna 2015

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích nějakého eukleidovského prostoru.

Každý úkol je hodnocen 6 body, maximální možný zisk je 84 bodů; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 42 bodů.

---

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [-1, 1, 3], \quad B = [2, 1, 7], \quad C = [2, 6, 7], \quad H = [3, 6, 0].$$

- + Určete souřadnice bodů  $D, E, F, G$  tak, aby všechny tyto body tvořily vrcholy rovnoběžnostěnu s podstavami  $ABCD$  a  $EFGH$ .
- + Rozhodněte, zda počátek souřadné soustavy leží uvnitř tohoto rovnoběžnostěnu.
- + Dokažte, že tento rovnoběžnostěn je krychle.
- + Určete souřadnice bodu, který je souměrný s bodem  $B$  podle roviny  $ACH$ .

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{[-1, 1, -4, 1] + t(1, 1, 2, 0) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{C} = \{x_1 + x_2 = 4, x_2 - x_4 = 2, x_3 = 0\}.$$

- + Určete dimenze  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ , parametrické vyjádření  $\mathcal{C}$  a rovnicové (neparametrické) vyjádření  $\mathcal{B}$ .
- + Určete vzájemnou polohu  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ .
- + Určete vzdálenost  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ .

3. Ve vhodném afinním prostoru udejte příklad dvou mimoběžných podprostorů, které mají společný (nenulový) směr.

4. V trojrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{u} = (1, 0, 3), \quad \mathbf{v} = (2, 1, 1).$$

- + Určete vektorový součin  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  a ukažte, že platí

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2.$$

- + Dokažte, že tato rovnost platí obecně.

5. Afinní transformace v rovině je dána obrazy tří bodů v obecné poloze:

$$[1, 0] \mapsto [3, -2], \quad [0, 1] \mapsto [4, -3], \quad [1, 1] \mapsto [4, -2].$$

- + Určete transformační rovnice, tzn. souřadnice obrazu obecného bodu  $X = [x_1, x_2]$ .
- + Určete typ, příp. druh a určující prvky této transformace.

6. Udejte příklad nějaké neidentické transformace, která má samodružné všechny směry.

7. Definujte pojem afinního zobrazení a rozhodněte, zda středové promítání mezi dvěma afinními podprostory může být afinní.