MA2BP_PGE, 21. ledna 2015

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích nějakého eukleidovského prostoru.

Každý úkol je hodnocen 6 body, maximální možný zisk je 84 bodů; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 42 bodů.

---

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [1, -4, -5], \quad B = [-5, 4, -5], \quad C = [-5, 4, 5], \quad D = [1, -4, 5], \quad E = [6, 6, 0].$$

+ Dokažte, že body A, B, C, D leží v jedné rovině a že žádná trojice těchto bodů neleží na přímce.
+ Určete barycentrické souřadnice bodu D vzhledem ke trojici bodů (A, B, C).
+ Určete vzdálenost bodu E od roviny $ABCD$.
+ Určete objem jehlanu $ABCDE$.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{x_1 + x_3 - 4x_4 = 0,\ x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -1\},$$
$$\mathcal{C} = \{[1, 0, 0, 1] + t(3, 1, 0, 2) + s(7, 0, 1, 2) \mid t, s \in \mathbb{R}\}.$$

+ Určete dimenze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, parametrické vyjádření $\mathcal{B}$ a rovnicové (neparametrické) vyjádření $\mathcal{C}$.
+ Určete vzájemnou polohu podprostorů $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, příp. jejich společné body a směry.
+ Rozhodněte, zda jsou podprostory $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ kolmé.

3. Ve vhodném eukleidovském prostoru udejte příklad dvou podprostorů, které mají netriviální průnik a odchylku $45°$.

4. V čtyřrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{u} = (2, 1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 0, 1, 5), \quad \mathbf{w} = (0, 0, 0, 1).$$

+ Určete vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ a ukažte, že tento vektor je kolmý ke každému z daných vektorů.
+ Dokažte, že předchozí vlastnost platí obecně.

5. V rovině jsou dány transformace

$$f_1([x, y]) = [2x - 2,\ 2y - 1],$$
$$f_2([x, y]) = \left[\frac{x + 4}{2},\ \frac{y - 1}{2}\right].$$

+ Určete transformační rovnice složené transformace $f = f_2 \circ f_1$, její samodružné body a směry.
+ Určete typ, příp. druh a určující prvky transformace $f = f_2 \circ f_1$.

6. Udejte příklad afinní transformace, která má aspoň dva samodružné body a modul různý od ± 1.

7. Dokažte, že pro každou afinní transformaci platí:

Pokud existují nějaké vlastní samodružné body, potom všechny tyto body tvoří afinní podprostor.