MA2BP_PGE, 29. ledna 2015

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích nějakého eukleidovského prostoru.

Každý úkol je hodnocen 6 body, maximální možný zisk je 84 bodů; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 42 bodů.

---

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [1, 0, 1], \quad B = [2, 0, 2], \quad C = [3, -1, 1], \quad D = [2, 3, 2].$$

+ Rozhodněte, zda jsou body A, B, C, D v obecné poloze.
+ Určete souřadnice bodu E, který je souměrný s bodem D podle přímky $p = AB$.
+ Rozhodněte, zda jsou body D a E souměrné podle roviny $\beta = ABC$.
+ Určete odchylku rovin $\beta = ABC$ a $\gamma = ABD$.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{x_1 + x_2 - x_3 = 4,\ x_4 = b\}, \quad \text{kde} \quad b \in \mathbb{R},$$
$$\mathcal{C} = \{[2, 9, 0, 1] + s(2, 0, 1, 5) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

+ Určete dimenze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, parametrické vyjádření $\mathcal{B}$ a rovnicové (neparametrické) vyjádření $\mathcal{C}$.
+ V závislosti na hodnotě $b \in \mathbb{R}$ určete vzájemnou polohu podprostorů $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
+ V závislosti na hodnotě $b \in \mathbb{R}$ určete, zda jsou podprostory $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ kolmé.

3. Ve vhodném eukleidovském prostoru udejte příklad dvou podprostorů, které jsou mimoběžné a současně kolmé.

4. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{u} = (1, 2, 0, 0), \quad \mathbf{v} = (2, 0, 1, 0), \quad \mathbf{w} = (0, 1, 0, 2).$$

+ Definujte pojem vektorového součinu a určete $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.
+ Alespoň dvěma způsoby určete objem rovnoběžnostěnu zadaného vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

5. Afinní transformace v rovině je dána obrazy tří bodů v obecné poloze:

$$[2, 1] \mapsto [2, 1], \quad [0, -1] \mapsto [0, -1], \quad [0, 1] \mapsto [2, -1].$$

+ Určete transformační rovnice a všechny samodružné body, resp. směry této transformace.
+ Určete typ, příp. druh a určující prvky této transformace.

6. Udejte konkrétní příklad neidentické afinní transformace, která má modul roven 1.

7. Definujte pojem podobného zobrazení a rozhodněte, zda středové promítání mezi dvěma afinními podprostory může být podobné.