MA2BP_PGE, 6. února 2015

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích nějakého eukleidovského prostoru.

Každý úkol je hodnocen 6 body, maximální možný zisk je 84 bodů; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 42 bodů.

---

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [3, -6, 1], \quad B = [-7, -6, 1], \quad C = [-7, 2, -5], \quad D = [3, 2, -5], \quad E = [-2, 4, 6].$$

+ Dokažte, že body A, B, C, D, E jsou vrcholy pravidelného čtyřbokého jehlanu.
+ Určete velikost výšky tohoto jehlanu.
+ Určete (afinní) souřadnice bodu F, který je souměrný s bodem E podle roviny ABC.
+ Určete barycentrické souřadnice bodu F vzhledem ke trojici bodů (A, C, E).

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{x_2 - 2x_4 = 2,\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 2\},$$
$$\mathcal{C} = \{[3, 9, 1, 1] + t(3, 2, 0, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

+ Určete dimenze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, parametrické vyjádření $\mathcal{B}$ a rovnicové (neparametrické) vyjádření $\mathcal{C}$.
+ Určete vzájemnou polohu podprostorů $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
+ Určete vzdálenost podprostorů $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

3. Ve vhodném eukleidovském prostoru udejte příklad dvou podprostorů, které mají netriviální průnik a odchylku $90°$.

4. V trojrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{u} = (2, 1, -1), \quad \mathbf{v} = (1, 1, 1).$$

+ Určete vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, odchylku $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ a ukažte, že platí

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha.$$

+ Dokažte, že předchozí rovnost platí obecně.

5. Afinní transformace v rovině je dána obrazy tří bodů v obecné poloze:

$$[1, 0] \mapsto [5, 0], \quad [1, 1] \mapsto [5, 3], \quad [0, 1] \mapsto [2, 3].$$

+ Určete transformační rovnice a všechny samodružné body, resp. směry této transformace.
+ Určete typ, příp. druh a určující prvky této transformace.

6. Udejte konkrétní příklad afinní transformace, která má právě dva samodružné body, resp. směry.

7. Definujte pojem shodného zobrazení a dokažte, že každé shodné zobrazení je injektivní (prosté).