

Diskrétní matematika

V podzimním semestru roku 2014 zapsala a obrázky opatřila Bc. Veronika Kosíková.

Vyučující: Mgr. Helena Durnová, Ph. D.

Ukončení: test – přibližně 10 příkladů, 6 musí být správně

seminární práce: formou přípravy na hodinu pro žáky základní školy, vybrat si jedno z přednášených témat; v práci musí být uvedeno, pro kterou třídu je příprava určena; může být psaná rukou, doplnit obrázky; odevzdat týden před udělením zápočtu

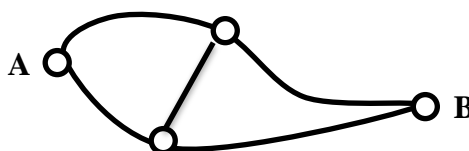
Skripta z diskretní matematiky: Eduard Fuchs, *Diskrétní matematiky pro učitele*, Brno 2001 nebo 2011.

[Teorie grafů kolem nás]

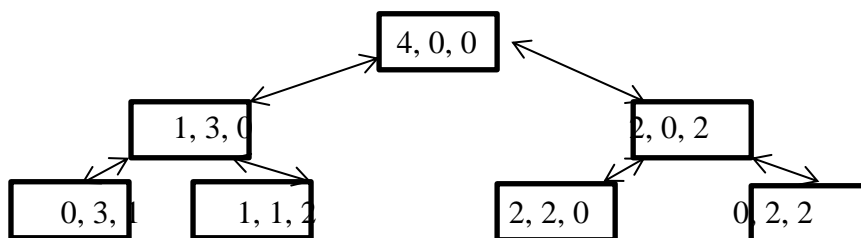
Jde nakreslit tento graf jedním tahem?



Kolik existuje cest z bodu A do bodu B?

***Příklad:***

Máme skleničky s obsahem 5, 3 a 2 dl. Na začátku jsou v první skleničce 4 dl, další dvě jsou prázdné (4,0,0). Chceme, aby na konci byl počet dl ve sklenicích následující 2, 1, 1.



Teorie grafů: popisuje vlastnosti struktur složených z uzlů (vrcholů) a hran
graf musí mít aspoň jeden uzel, jinak nemáme o čem mluvit


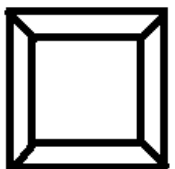
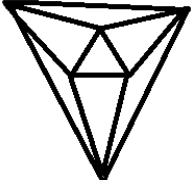
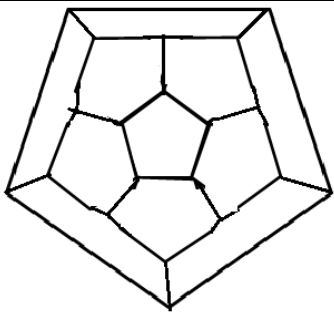
v obyčejném grafu spojuje hrana dva (různé) uzly (vrcholy),

hrany: - orientované (se šípkami)

- neorientované

Patří sem také **problematika pravidelných mnohostěnů**

- aby byly pravidelné, musíme je skládat pouze z \triangle , \square a pentagon

	mnohoúhelník (polygon)	počet hran ve vrcholu	„pohled shora“
čtyřstěn	\triangle	3	
šestistěn (krychle)	\square	3	
osmistěn	\triangle	4	
dvanáctistěn	pentagon	3	
dvacetistěn	\triangle	5	

Tímto zrušíme délku stran.

[Poznámky na okraj – k topologii:]

Pokud zrušíme i úhly, lze \triangle překreslit: \triangle , \triangle , \square a tak dále. Překreslený obrazec musí mít pořád minimálně 3 vrcholy.

Z kuličky plastelíny lze udělat cokoli, co nemá díru.

Definice:

Nechť U je neprázdná množina, H je podmnožina množiny dvojic prvků U. Pak $G(U,H)$ nazýváme graf.

H..... uspořádané dvojice uzlů orientovaný graf

H neuspořádané dvojice uzlů neorientovaný graf

Neřekneme-li jinak, tak se budeme zabývat KONEČNÝMI neorientovanými grafy.

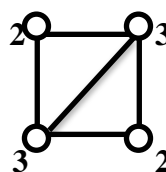
Stupeň uzlu – počet hran vycházejících z daného uzlu

Např. v grafu na obr. je:

počet vrcholů: 4


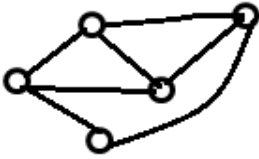
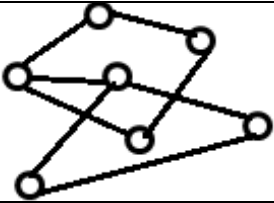
počet hran: 5

součet stupňů uzlu: 10



Příklad:

Nakreslete 3 grafy a napište počet vrcholů, hran, součet stupňů uzlů.

			
počet vrcholů	6	5	7
počet hran	7	7	8
součet stupňů uzlů	14	14	16

Věta:

Součet stupňů uzlů je roven dvojnásobku počtu hran.

Příklad:

7 kamarádů se před prázdninami dohodlo, že každý pošle pohled 3 kamarádům tak, aby ten komu posílám já, poslal pohled i mě.

Řešení: zkoušeli jsme to kreslit, nejde to, součet stupňů uzlů by musel být 21; neboli „nejde mít 10,5 hrany“.

IZOMORFISMUS

Je mi jedno jak velké to nakreslím a jak to otočím, záleží jen na tom, co je s čím spojeno – zda existuje mezi danými dvěma grafy bijekce mezi uzly, z níž vyplývá i bijekce mezi hranami.

Grafy na 1 uzlu:



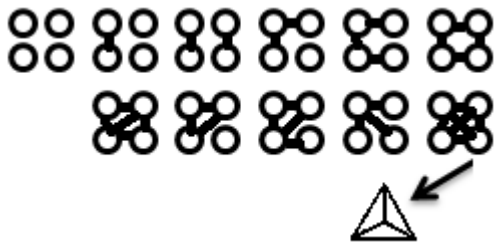
Grafy na 2 uzlech:



Grafy na 3 uzlech:



Grafy na 4 uzlech:



Definice: Pokud je v grafu každý uzel propojen s každým, nazýváme jej *úplný graf*.

Izolovaný uzel – stupeň uzlu je roven 0.

Příklad:

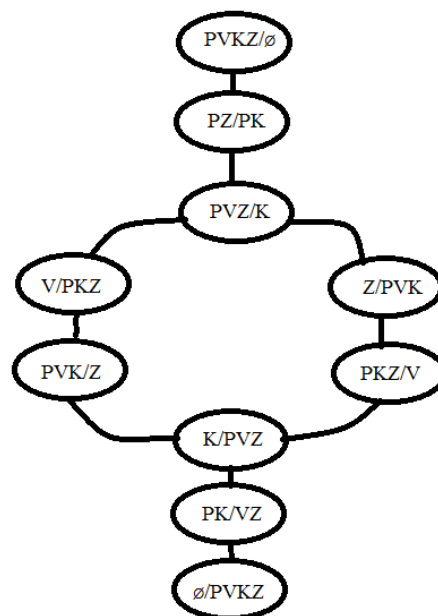
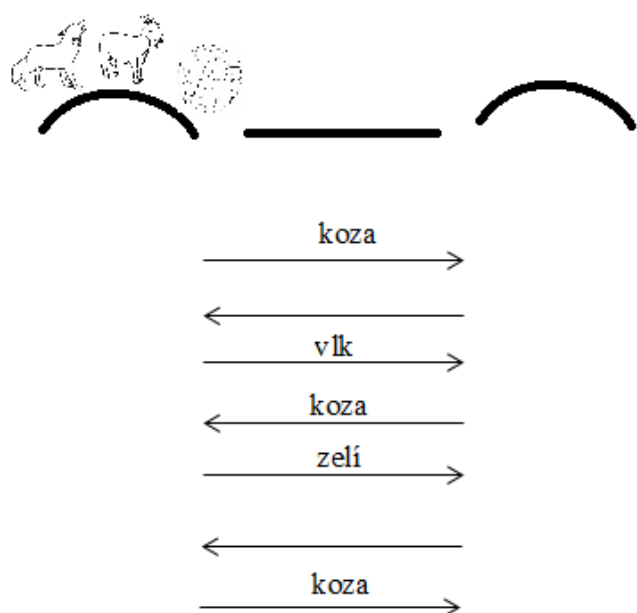
Nakreslete graf o 5-ti uzlech tak, aby se hrany nekřížili:

Opět nelze nakreslit (úloha o třech domech a 3 studnách)

Příklad:

Na jedné straně je vlk, koza a zelí a my je musíme převést na druhou stranu tak, aby nedošlo k úhoně.

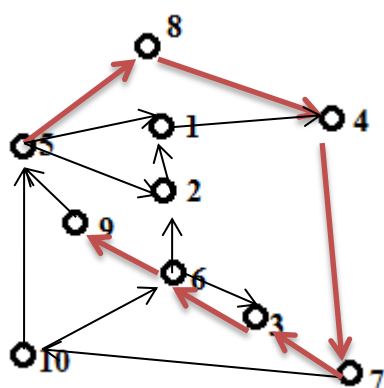
- do loďky: P+V nebo P+K nebo P+Z.



Příklad:

V klubu hádankářů mají deset pater. Ve výtahu mají tlačítka +3, -4, :2.

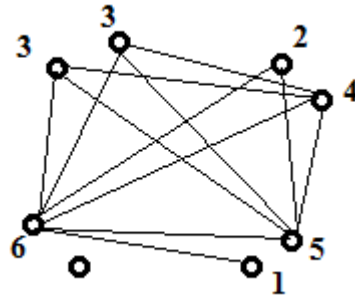
- a) Lze se z libovolného patra dostat do jiného libovolného patra?
ano, lze se dostat do libovolného patra – Silně souvislý graf



- b) Kolikrát zmáčkneme knoflík pro cestu z 5 do 9 patra?
Knoflík zmáčkneme šestkrát.

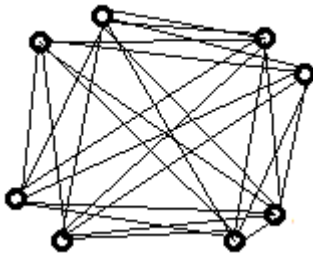
Příklad:

Manželé Adamcovi byli na večerku s dalšími třemi manželskými páry. Zdravili se podáváním ruky. Nikdo nepodal ruku sám sobě, svému partnerovi ani téže osobě. Když to skončilo, tak se pan Adamec zeptal, kolikrát kdo podal ruku. Od každého dostal jinou odpověď. Kolika lidem podala ruku paní Adamcová?



Součet v uzlu musí být šest (každý manželský pár podá ruku šesti lidem)

Podání ruky každý s každým (kromě párů)



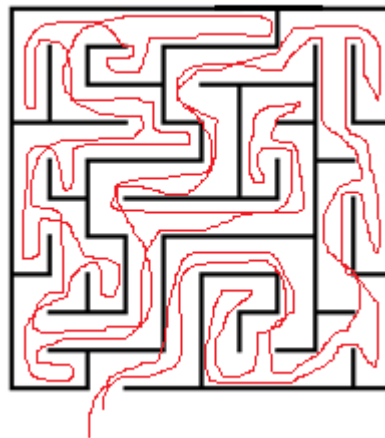
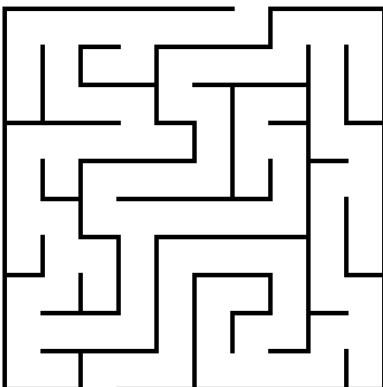
$$\frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

Příklad:

Jak udělat, abych prošla celé bludiště?

Na křižovatce:

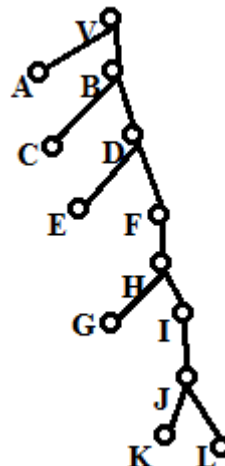
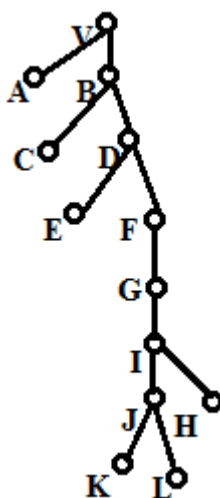
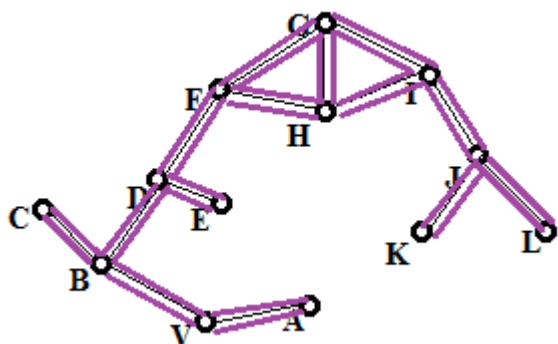
- První volba: kterou jsme nešli
- Druhá volba: zpět
- Třetí volba: chodba, kterou jsme prošli jednou



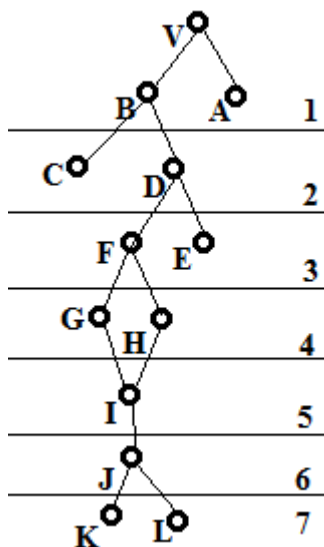
Tato metoda se nazývá prohledávání grafu do hloubky.

Prohledávání grafu do hloubky:

- Zjišťujeme, jestli je graf souvislý
- Snažíme se dostat co nejhlouběji
- Výsledek není jednoznačný, každé hledání může dopadnout rozdílně

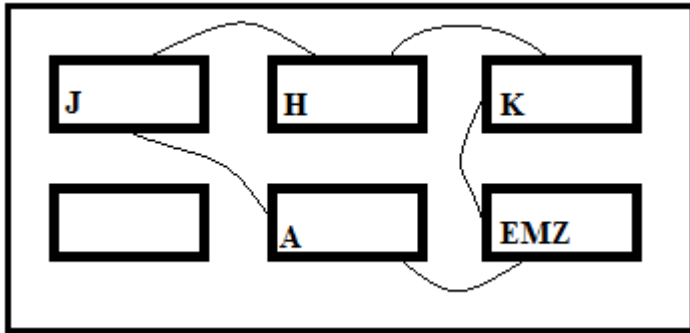


Další metoda – prohledávání do šířky:



DÚ:

1. Tři misionáři a tři lidožrouti se potřebují přepravit přes řeku na dvoumístné loďce. Je nežádoucí, aby se na některém břehu ocitlo více lidožroutů než misionářů. Loďka sama nepopluje. Zorganizujte přepravu.
2. Máme plnou 12l nádobu a dvě prázdné nádoby – 7l a 4l. Přeléváním rozdělte vodu tak, aby ve dvou nádobách bylo 6l vody.

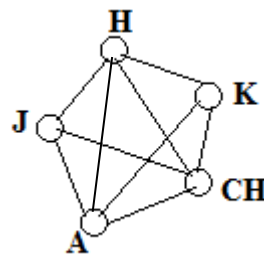


24 způsobů 6 možností od každé dívky $6 \cdot 4 = 24$

V jakém pořadí mohou chlapci navštívit dívky a zase se vrátit zpět?

a) *matice sousednosti (samé 1) – píšeme 1, pokud dané dva uzly spolu sousedí*

	A	J	H	K	CH
A	x	1	1	1	1
J	1	x	1	1	1
H	1	1	x	1	1
K	1	1	1	x	1
CH	1	1	1	1	x



b) *matice vzdálenosti (hrany jsou ohodnocené, nemusí být každé dva uzly spojené hranou stejně blízko, jako tomu bylo u neohodnoceného grafu)*

	A	J	H	K	CH
A	x	15	10	8	5
J	15	x	7	12	20
H	10	7	x	9	11
K	8	12	9	x	10
CH	5	20	11	10	x

c) *matice incidence*

	A	J	H	K	CH
5	1	-	-	-	1
7	-	1	1	1	-

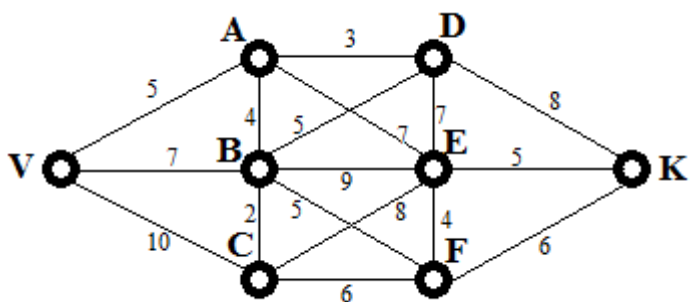
od Jitky					
6 možností	J A K H	chlapci	$20 + 15 + 8 + 9 + 11 = 63$		2
	J A H K		$20 + 15 + 10 + 9 + 10 = 64$		1
	J H A K		$20 + 7 + 10 + 8 + 10 = 55$		5
	J H K A		$20 + 7 + 9 + 8 + 5 = 49$	nejkratší	6
	J K A H		$20 + 12 + 8 + 10 + 11 = 61$		3
	J K H A		$20 + 12 + 9 + 10 + 5 = 56$		4

Problém obchodního cestujícího = NP úplný

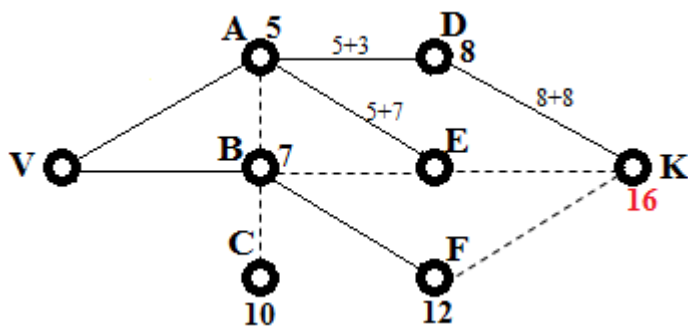
[To, že je problém NP úplný znamená zhruba to, že ho pro větší rozměr grafu nedokážeme v reálném čase vyřešit: doba potřebná k vyřešení roste exponenciálně v závislosti na velikosti grafu, tj. roste „moc rychle“.]

[Příklady problémů, pro něž existují relativně rychlé algoritmy, tzv. polynomiální]

- hledání nejkratší cesty
- hledání minimální kostry



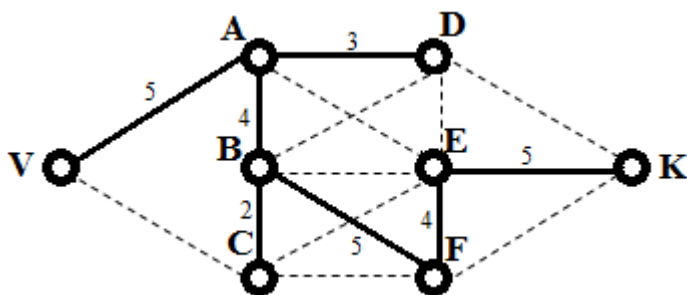
- 1) Najděte nejkratší cestu z V do K
 - Jen kladné vzdálenosti



- cestu, která je delší než již zjištěná, neberu v úvahu

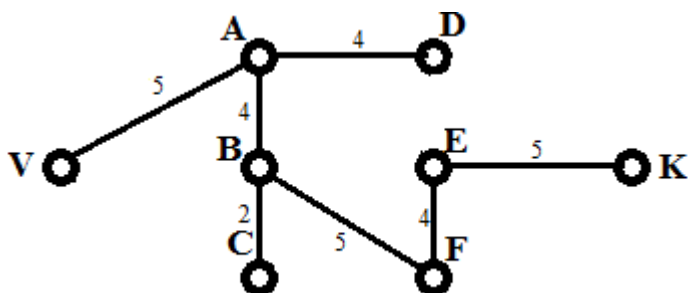
- 2) Najděte nejkratší faktor – strom

a. **Kruskalův algoritmus** – seřadím si hrany podle velikosti, přidávám od nejmenší nebo ubírám od největší, dávám pozor, aby se to nerozpadlo



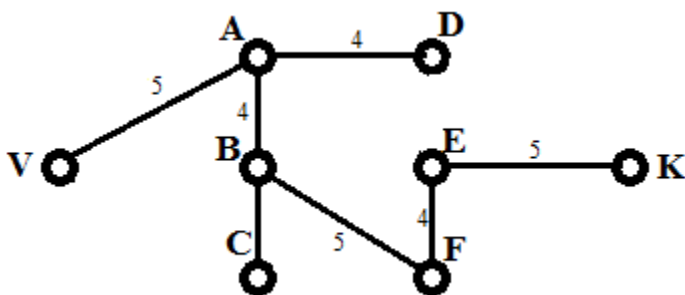
.... Nejdelší vzdálenosti, které lze odstranit

b. Borůvkův algoritmus – (1926) postupně přiřazujeme nejkratší vzdálenosti
- na počítači nejrychlejší



VAD – BC 4 (AB)
VAD – EFK 7 (AE nebo DE)
BC – EFK 5 (BF)

c. Jarníkův algoritmus – je nejrychlejší pro ruční řešení [*– také srozumitelný, nejsnáze uchopitelný – což je možná do jisté míry i věc názoru*]



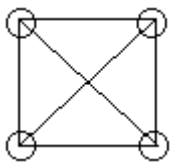
- „nabalování“
- mám AD co je nejbliž B (4)
- mám ADB co je nejbliž C (2)
- mám ADBC co je nejbliž V nebo F

Pod pojmem graf si představujeme „puntíky spojené čarami“.

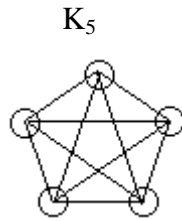
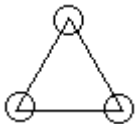
- a) Graf neorientovaný - konečný graf bez smyček
- platí (Věta): $\sum_{u \in U} stU = 2/H$
 - součet počtu uzlů je roven dvojnásobku počtu hran
 - důsledek (Lemma): počet uzlů lichého stupně je sudý.
 - součet stupňů uzlu je liché číslo $\sum_{u \in U} stU = 1 + 2(n - 1)$

b) Úplný graf
Př. Nakreslit K_4

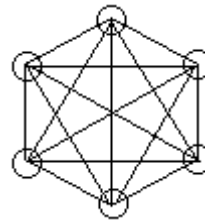
- je takový, kde každý uzel je spojený s každým jiným uzlem



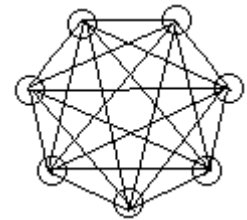
K_3



K_5



K_6



K_7

Které se dají nakreslit jedním tahem??

Jedním tahem lze nakreslit: K_3, K_5, K_7

- jedním tahem lze nakreslit pouze úplný graf na lichém počtu uzlů (všechny jeho uzly jsou pak sudého stupně)

Definice:

Sled je posloupnost uzlů a hran $u_1(u_1u_2)u_2(u_2u_3)u_3(u_3u_4)\dots$
uzel*hrana*uzel*hrana*....

- uzly i hrany se mohou opakovat
- speciální typy sledů:
 - cesta – sled, v němž se neopakují uzly
 - tah – sled, ve kterém se neopakují hrany

Souvislý graf je takový, v němž mezi každými dvěma uzly existuje sled.

Věta: Konečný souvislý graf, který má všechny uzly sudého stupně, lze nakreslit jedním tahem.

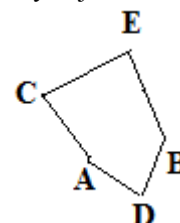
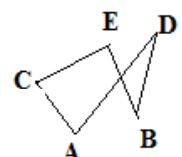
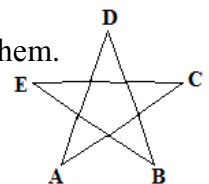
Poznámka: uzavřený graf začíná a končí ve stejném uzlu.

Hypotéza: Úplný graf na lichém počtu uzlů dokáží nakreslit jedním tahem.

- Důkaz například indukcí, když nakreslím ještě dva uzly, tak to musím umět doplnit

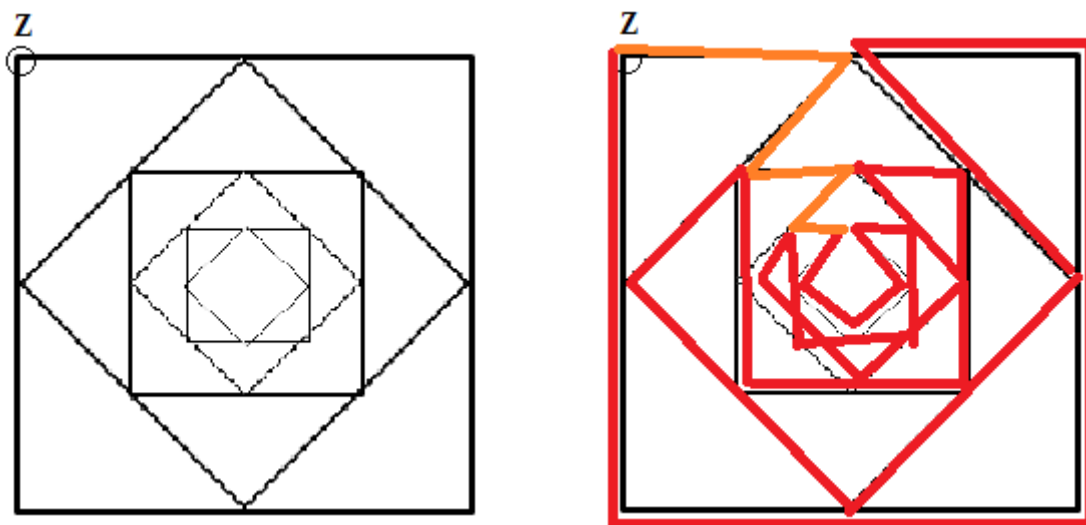
Při průchodu uzlem seberu grafu dvě hrany (když je stupně šest, tak uzlem projdu 3x). Do každého uzlu musím vlézt a zase z něj vylézt.

Pokud je graf lichého stupně, tak se do jednoho uzlu musím jednou dostat a už z něj nevylezu. Vždy to jde zařídít tak, že se tam dostanu. Cestu, kterou jsme našli, dokážeme zvětšit.



Obrázek nakreslit jedním tahem:

- Všechny uzly jsou sudého stupně
- Předtím než se vrátím, tak musím „vlézt dovnitř“



Otázka: Kolika otevřenými tahy lze nakreslit souvislý graf se 2, 4, 6, atd. (2k) uzly lichého stupně??

Překreslení

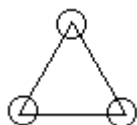
K_5 – jeden uzavřený tah



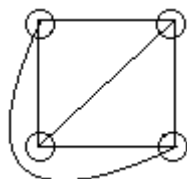
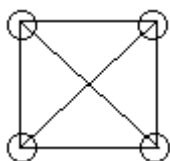
K_6 – tři otevřené tahy



V grafu K_3 se nic nekříží

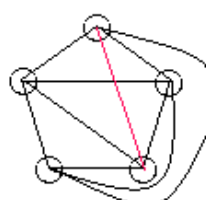
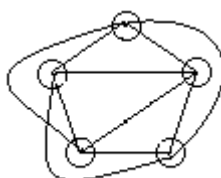
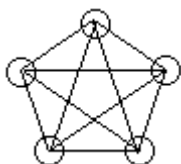


Překreslení K_4 , aby se nic nekřížilo



Překreslení K_5 , aby se nic nekřížilo


- nikdy se nám nepovede překreslit úplný graf na pěti uzlech, aniž by se něco křížilo.



Definice:

Planární graf je takový graf, který LZE nakreslit V ROVINĚ tak, aby se žádné dvě hrany nekřížily.



Tzn. když nakreslím  tak pokud mám dokázat, že je graf planární, tak musím dokázat, že to nelze

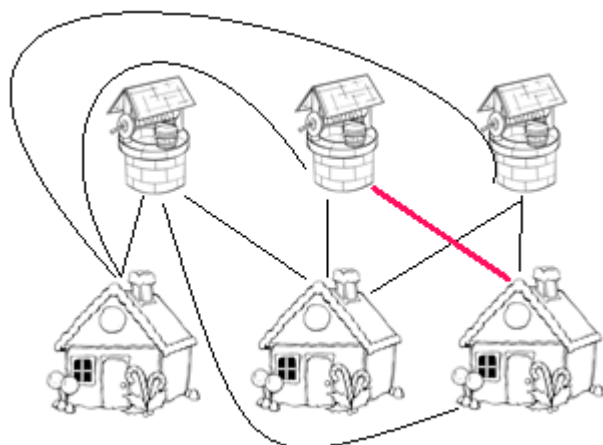
nakreslit bez křížení. U toho grafu ale nakreslení v rovině známe, totiž



Tento graf tedy lze nakreslit v rovině tak, aby se hrany nekřížily, proto je planární.

Příklad:

„tři domy, tři studně“ – musíme se dostat z každého domu do každé studny tak, aby se cesty nekřížily



Věta: (Kuratowského věta – Kuratowského grafy)

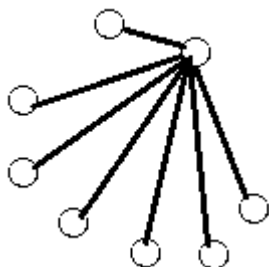
Graf, který obsahuje K_5 nebo $K_{3,3}$ jako podgraf není planární – nelze jej v rovině nakreslit tak, aby se hrany nekřížily.

Příklad:

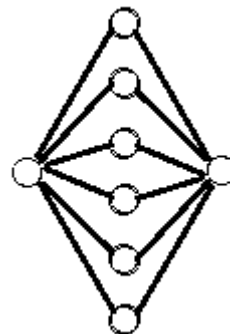
Uveďte příklad planárního grafu na 8 uzlech.

!není nikde psané, že graf má být úplný! Pokud by graf měl být úplný, tak by to nešlo, takhle to jde.

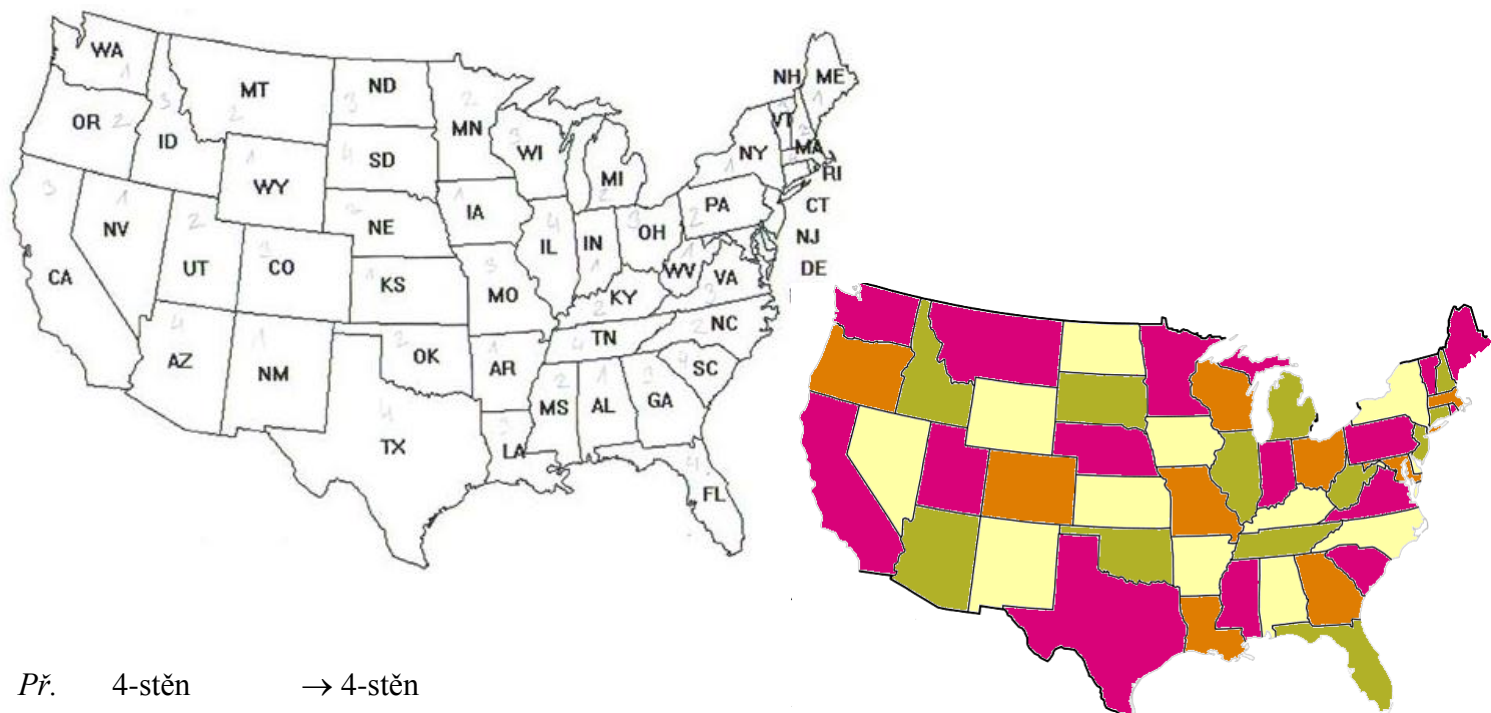
- Může to být osm libovolně spojených uzlů např.



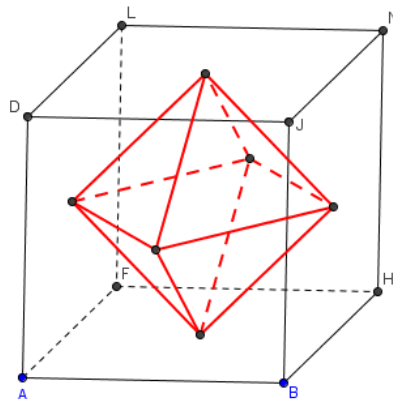
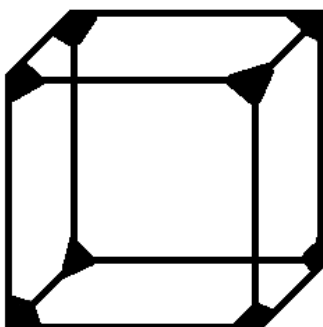
- nebo $K_{6,2}$



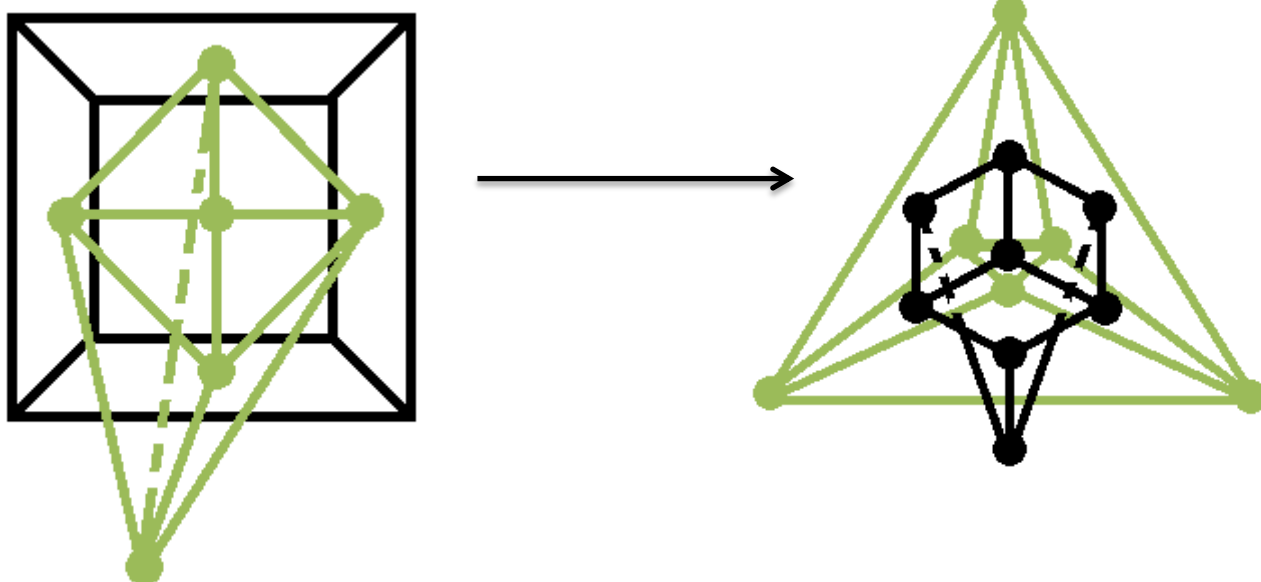
Př. Vybarvěte mapu USA co nejméně barvami.



- Př.
- 4-stěn → 4-stěn
 - krychle → 8-stěn
 - 8-stěn → krychle
 - 12-stěn → 20-stěn
 - 20-stěn → 12-stěn

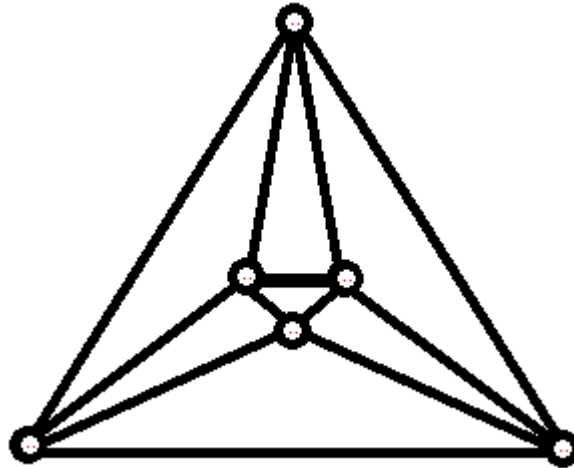
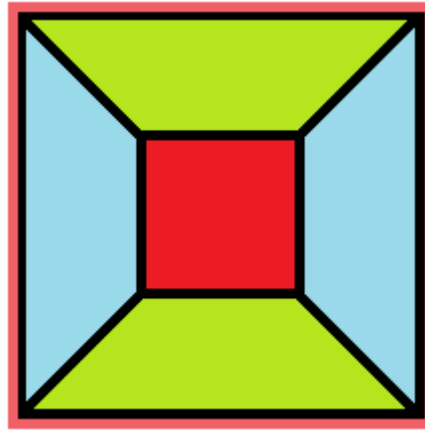


krychle a osmistěn jsou navzájem duální



Kolika barvami obarvíme krychli?

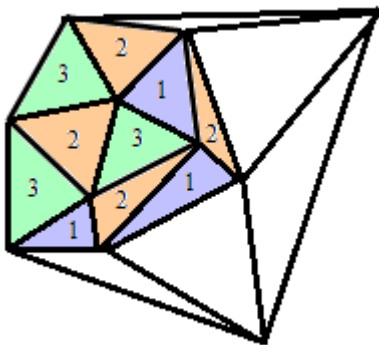
- 3 barvy



Barvení grafu

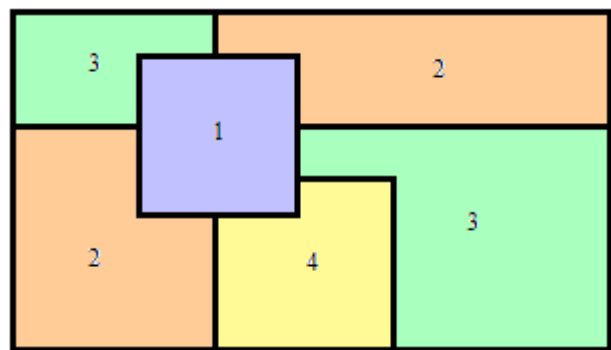
Definice: Obarvení grafu je funkce, která každému uzlu přiřadí hodnotu (barvu) podle následujícího pravidla: jsou-li dva uzly spojeny hranami, nesmí mít stejnou barvu $f: U \rightarrow B$

20-stěn (výřez)



- stačí 3 barvy

mapa



- stačí 4 barvy (empirické řešení)

- nevezmeme raději 5 barev?? ano, 5 barev rozhodně stačí

- zakážeme „.... státy“, zakážeme společnou hranici 4 a více států a nebo řekneme, že státy, které se dotýkají pouze v jediném bodě, mohou mít stejnou barvu (v mapě USA státy UT, CO, AZ, NM)

Definice:

Podraf – část grafu, která je sama grafem.

Faktor – je podgraf, který obsahuje všechny uzly.

Příklad:**První pokus**

Máme čtyři kostky, které jsou různobarevné.

Žluté stěny: 4

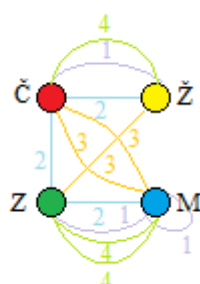
Červené stěny: 6

Modré stěny: 8

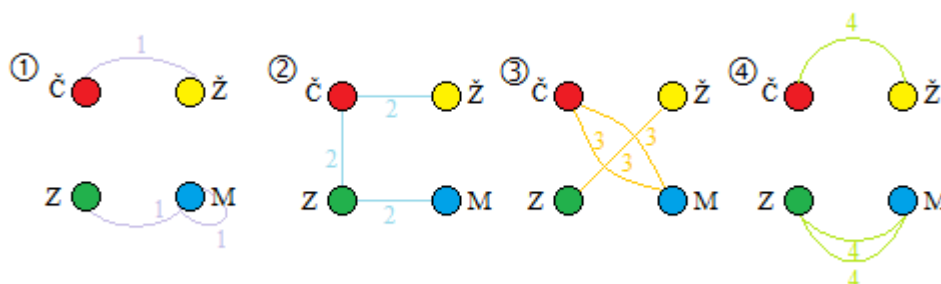
Zelené stěny: 6

Každá kostka má jednu stěnu žlutou.

Graf (barvy protějších stran kostek)

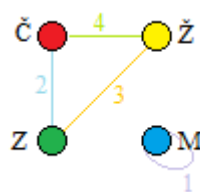


graf má 12 hran



Najdu podgraf (faktor), který mi splňuje zadání:

- faktor má stupeň 2
- nemusí být vše propojené
- musí obsahovat čtyři hrany s různými čísly – podle kostek, na nichž jsou stěny příslušných barev proti sobě.



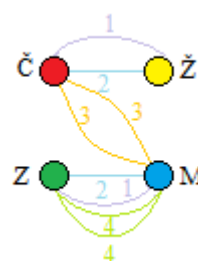
Skládám kostky podle faktoru:

Na první kostce dám proti sobě dvě modré, na druhé kostce naproti sobě zelenou a červenou, na třetí kostce zelenou a žlutou, na čtvrté kostce červenou a zelenou.

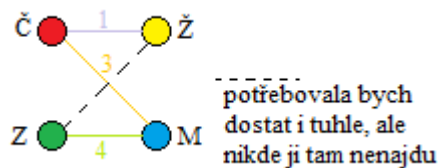
Mám naskládánu přední a zadní stranu, teď řeším jen spodek a vršek, ale pozor, točíme jen dokola, přední a zadní strana zůstává na místě.

Nakreslíme si to znova a zrušíme hrany, které jsme už použili.

graf má 8 hran



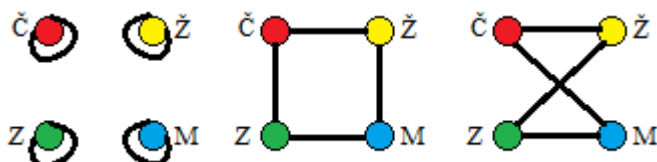
Ted' potřebujeme dostat ještě jeden podgraf (faktor).



Z našeho zjištění je zřejmé, že tyto kostky nejde naskládat dle zadání.

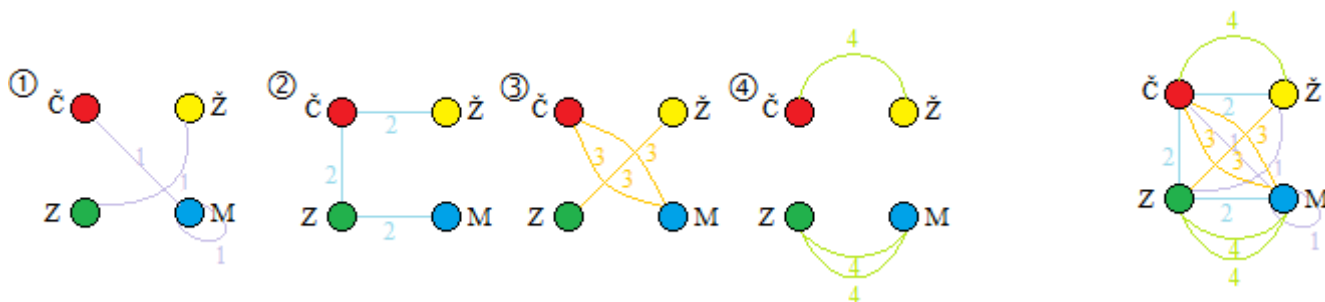
Každá hrana musí mít jiné číslo a každý uzel musí být stupeň 2.

Možné kombinace:

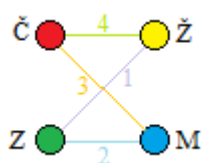


Závěr: Jednu kostku musíme přeskládat

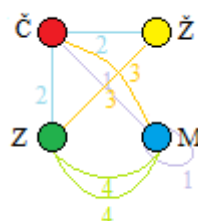
Druhý pokus po přeskládání



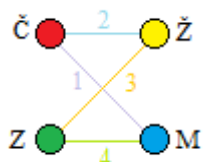
Faktor – přední/zadní strana:



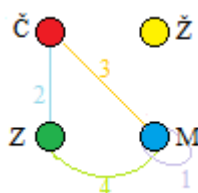
Zbyde:



Faktor – horní/dolní strana:



Zbyde:



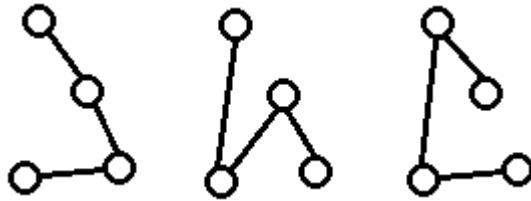
další podgraf už nenajdu

Pokud si kostky chceme seskládat sami, tak aby vznikl hlavolam, tak si vezmeme čtyři uzly a nakreslíme si dva grafy a ten třetí uděláme tak, aby to nešlo, bylo by to moc jednoduché.

Tenhle hlavolam se jmenuje instantní šílenství.

Příklad: Je možné, aby v konečném souvislém grafu bez násobných hran a smyček existovaly dvě kostry, které nemají žádnou společnou hranu?

Graf o 4 uzlech, hledáme 2 stromy.



Kostra je taky faktor, který je stromem.

Kostrou grafu budeme rozumět libovolný podgraf, který hranami spojuje **všechny vrcholy** původního grafu a zároveň sám neobsahuje žádnou kružnici (→ jde o strom).

Máme dáno n přirozených čísel, $n \geq 2$.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby existoval strom, kde s_1, \dots, s_n jsou stupně uzlů, je:

$$\sum_{i=1}^n s_i = 2n - 2$$

Existuje, ale není strom

2, 2, 2 $\Sigma 6$ ×

2, 1, 0 ← $\Sigma 3$ ×

není přirozené číslo → BLBOST ☺

ale ani kdybychom dovolili i nulu, nešlo by to: izolovaný uzel má stupeň 0, ale nejde mít dva uzly, kde jeden má stupeň 1 a druhý stupeň dva, ani kdybychom povolili smyčky

1, 1, 1 $\Sigma 3$ ×

lichý počet uzlů → $\frac{1}{2}$ hrany NEJDE

2, 1, 1 $\Sigma 4 = 2 * 3 - 2$

→ dokážeme nakreslit strom (ale není to důkaz!)



(nutná a postačující podmínka)

implikace

ekvivalence

1. "⇒" Existuje strom se stupni s_1, \dots, s_n

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n s_i = 2n - 2 \Leftrightarrow 2(n - 1) = 2|H|$$

← dvojnásobek počtu hran



ukrajuju

strom: ($n=1$ hran)

2. "⇐" $\sum_{i=1}^n s_i = 2n - 2 \Rightarrow$ existuje strom

Příklad:

(2, 2, 2, 0)

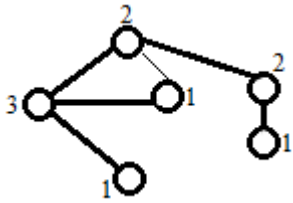
- nemůže být, strom musí obsahovat alespoň jednu jedničku



(3, 2, 2, 1, 1, 1)

- $2 * 6 - 2 = 10$

(kdy m..... 2, 2, 2, 2, 1, 1)

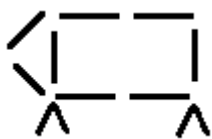


není kostra
strom

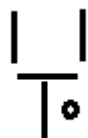
[Na zpestření – aneb jak zabít představivost]

Prasátko:

Předělejte dvě zápalky tak, aby se prasátko dívalo na druhou stranu.



Přesuňte smítko na lopatku:



IZOMORFISMY

Izomorfní – mají stejnou strukturu

Izomorfní grafy mají stejný počet uzlů a hran

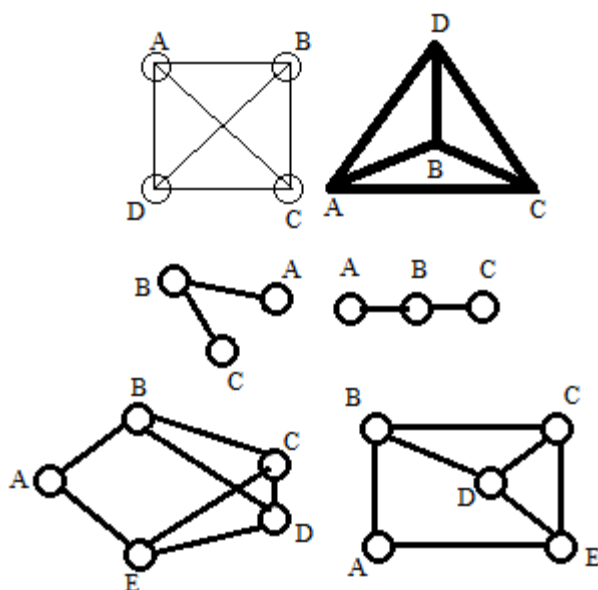
Definice:

Izomorfismus grafů

Zobrazení $G_1(U_1, H_1)$ na $G_2(U_2, H_2)$, které je bijekcí: $f_1: U_1 \rightarrow U_2$

$f_2: H_1 \rightarrow H_2$

Dva grafy jsou izomorfní, pokud existují současně f_1 a f_2 – bijekce mezi množinami uzlů a hran.

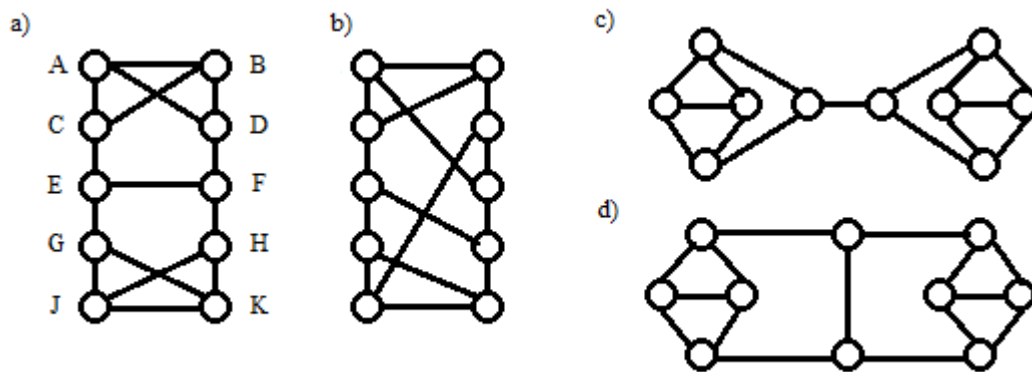


Bijekce je mezi množinami uzlů taková, že bude bijekce i mezi množinami hran.

Aby byly dva grafy izomorfní, tak:

- musí mít stejný počet uzlů
- musí mít stejný počet hran
- musí být stejné stupně uzlů

Které následující grafy jsou izomorfní??



a) Pokud chceme zjistit, jestli je tento graf izomorfní s nějakým jiným, tak hledáme příslušné hrany

c) Tento graf je jiný, obsahuje most (pokud jej odstraníme, tak se graf rozpadne); jiné grafy jej neobsahují

Kružnice v grafech:

délky	3	4	5	6	7	8	9	10
a)	4 ACB, ABD, GJK, HJK	2 ACBD, GJHK	4 ACEFD, ACEFD, EGJHF, EGKHF	4 ABCEFE, C, EFJKHF, EFHJKC, BCEFDA	-	2	4	1
b)	2	2	4					
d)	4	2	4	4	-	2		

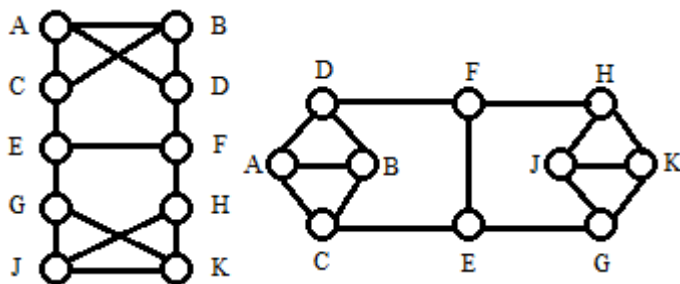
Definice:

Hrana se nazývá mostem, pokud jejím odstraněním vznikne ze souvislého grafu graf nesouvislý.

Most – hrana, která neleží na žádné kružnici

Kružnice – souvislý podgraf, který má všechny uzly stupně 2

Grafy a a d jsou izomorfní:

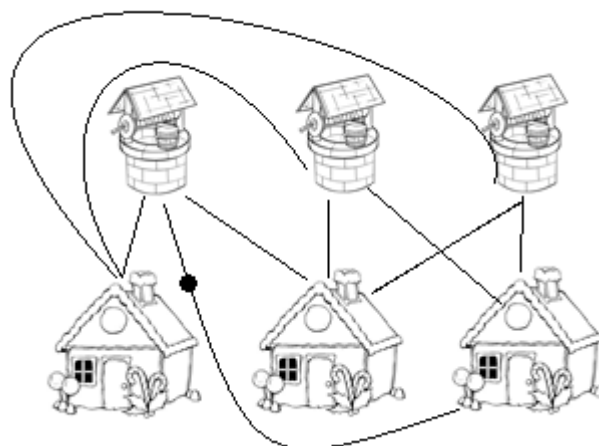


Homeomorfní graf:

3 domy, 3 studny – nic si nezjednoduším, když tam přidám uzel

Definice:

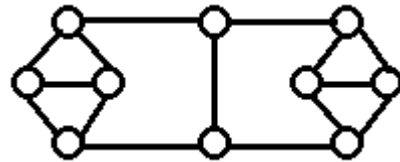
Homeomorfní graf vznikne z jiného grafu půlením hrany.



Příklad:

Mějme graf, jehož hrany se při daném nakreslení nekříží

a)	b)	
10	7	u ... počet uzlů
15	7	h ... počet hran
1	2	k ... počet komponent (souvislých částí)
7	3	s ... počet oblastí



$$u + s = h + k + 1$$

$$7 + 3 = 7 + 2 + 1$$

$$7 + 3 = 8 + 1 + 1$$

$$7 + 4 = 9 + 1 + 1$$

Necht' v G platí:

$$u + s = h + k + 1$$

Ubereme hranu, pak:

a) sníží se počet částí

$$u + s - 1 = h - 1 + k + 1$$

b) nebo se zvýší počet komponent

$$u + s = h - 1 + k + 1 + 1$$

$$2 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$4 + 1 = 3 + 1 + 1$$

$$3 + 1 = 2 + 1 + 1$$

$$4 + 2 = 4 + 1 + 1$$

Pro souvislou mapu:

(graf s nakreslením v rovině)

! POZOR! Mapa není totéž co graf.

Co platí pro grafy, nemusí platit pro mapy. Co platí pro mapy, musí platit pro grafy.

Pro souvislou mapu:

$k = 1$, tj.

$$u + s = h + 1 + 1$$

$$u + s = h + 2$$

$$u + s - h = 2$$

4-boký jehlan:

5 uzlů

5 stěn

8 hran

krychle:

8 uzlů

6 stěn

12 hran

Eulerova věta o mnohostěnech

Věta:

Součet uzlů a stěn v každé mapě je alespoň 8

$$u_3 + s_3 \geq 8$$

$$3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \dots = 2h$$

$$\underline{3u_3 + 4u_4 + 5u_5 + \dots = 2h}$$

$$(A) 3(s_3+u_3) + 4(s_4+u_4) + 5(s_5+u_5) + \dots = 4h$$

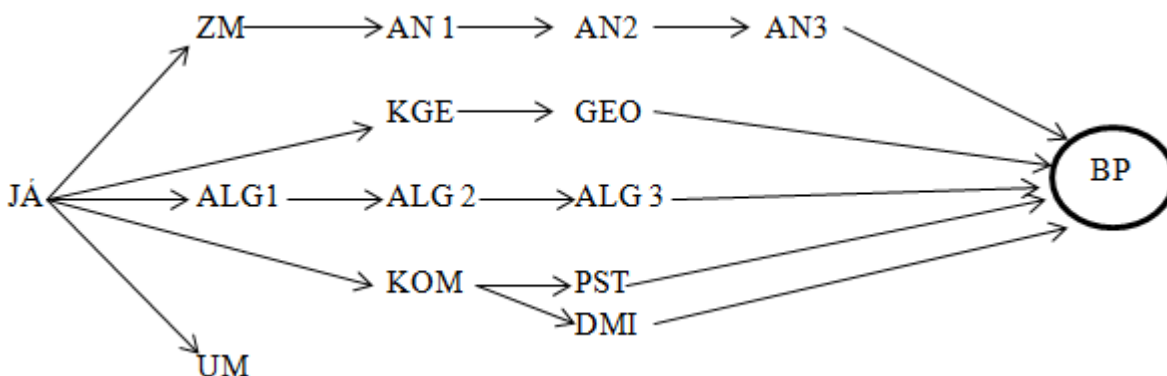
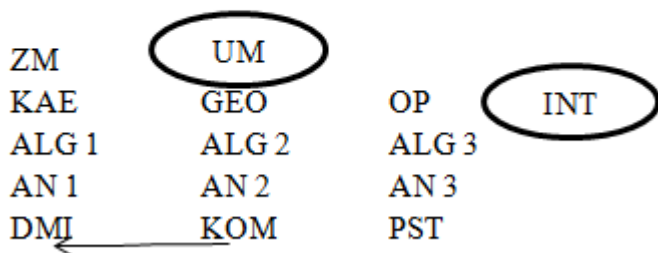
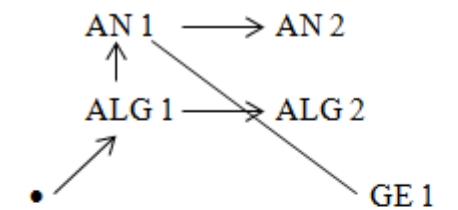
$$\text{víme: } (u_3 + u_4 + u_5 + \dots) + (s_3 + s_4 + s_5 + \dots) = h + 2$$

$$(C) 4(u_3+s_3) + 4(u_4+s_4) + \dots = 4h + 8$$

$$(B-A) u_3+s_3 + 0 - s_5 -u_5 -2s_6 -2u_6 \dots = 8$$

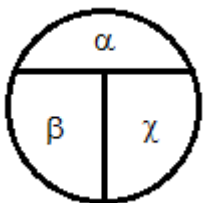
PERT - zkratka používaná ekonomy
 - Program evaluation and review technique

Je zobecněním metody kritické cesty(CPM). Tato metoda se používá k řízení složitých akcí majících stochastickou povahu. Zde se doba trvání každé dílčí činnosti chápe jako náhodná proměnná mající určité rozložení pravděpodobnosti. [Empiricky bylo zjištěno, že v praxi toto nejlépe vystihuje tzv. *beta rozdělení*, které lépe vystihuje proměnlivost provozních podmínek (například důlní provoz). ... to je pro mě novinka....]

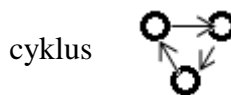


CMP - Critical Path Method = metoda kritické cesty
 - používá Dijkstrův algoritmus pro hledání nejkratší cesty

α číslo uzlu
 β minimální čas
 χ maximální čas



- orientovaný graf
- cyklický graf
- neobsahuje cykly

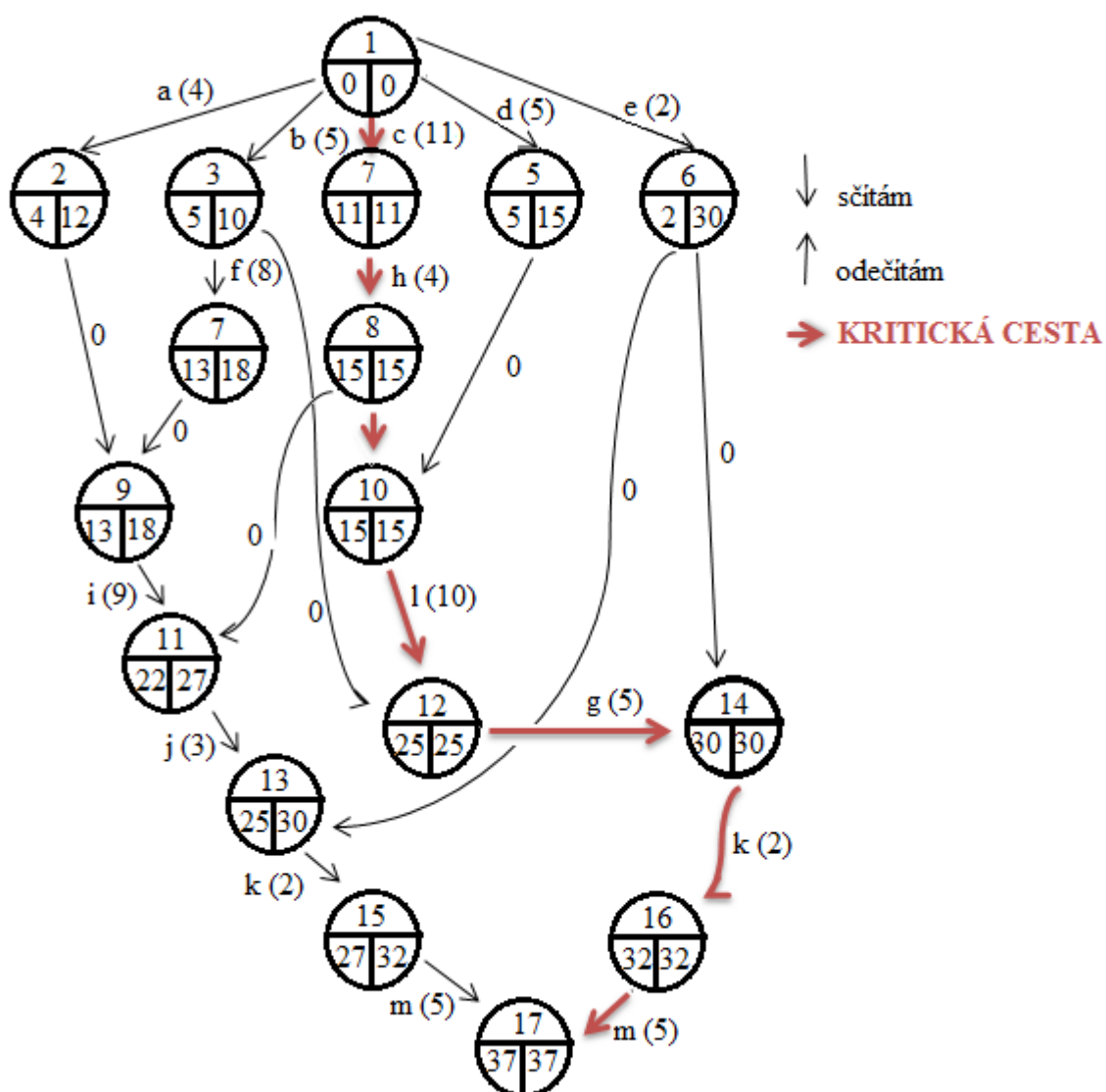


Obložené chlebíčky:

- 1) Plátek vecky, vlašský salát, salám, vajíčko, okurka
 - 2) Plátky vecky, máslo, vaječná pomazánka, okurka
- Vaječná pomazánka: vajíčko natvrdo, hořčice, nakrájená cibule

Činnosti:

- | | |
|-------------------------------|--------|
| a) Krájení a loupání salámu | 4 min |
| b) Krájení vecky | 5 min |
| c) Vaření vajec | 11 min |
| d) Krájení cibule | 5 min |
| e) Krájení okurek | 2 min |
| f) Mazání salátem | 8 min |
| g) Mazání máslem a pomazánkou | 5 min |
| h) Loupání a krájení vajec | 4 min |
| i) Pokládání salámu | 9 min |
| j) Pokládání vejce | 3 min |
| k) Pokládání okurky | 2 min |
| l) Výroba (míchání) pomazánky | 10 min |
| m) Skládání na mísu | 5 min |



První úroveň – úkony, které mohu dělat bez toho, abych měla něco jiného nachystané.

Druhá úroveň – musím vykonat činnosti, které předcházejí těm ostatním

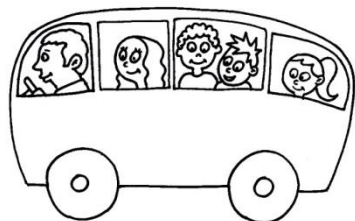
Další úrovně – navazující činnosti

- hledáme nejdelší cestu

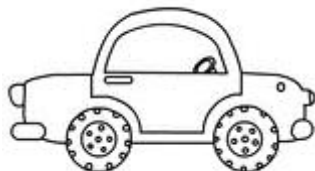
Algoritmus hledání minimální cesty pro acyklický graf:

- 1) Očíslováme uzly vhodným způsobem (menší před větším)
- 2) Určíme orientovanou vzdálenost: ∞ nedostanu se tam
0 uzel sám od sebe

Vzdálenost x od u_1 = maximální vzdálenost ze všech uzlů, přes které se dostanu do tohoto uzlu

TOKY V SÍTÍCH

cca 30 osob



cca 6 osob

Tramvaje 9 a 11 mají normálně určené trasy tak, že část jedou dohromady, kvůli počasí se musela dělat optimalizace



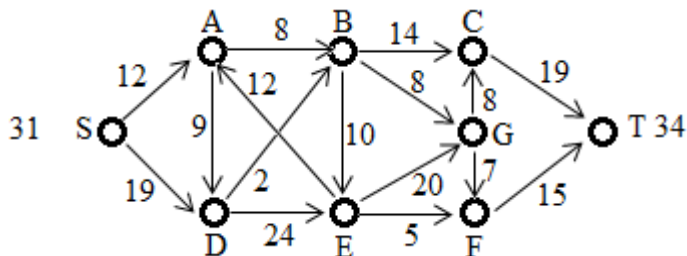
Jak toho přepravit co nejvíce z jednoho místa to místa druhého?

Čísla hran nejsou vzdálenosti, jako při hledání nejkratší cesty či minimální kostry, ale kapacita (kolik se tam do toho vejde, kolik proteče, kolik může projet aut, ...).

Když něco bude protíkat, tak to musí mít směr. Můžeme si to představit tak, že na jedné straně lejeme do potrubí určité množství vody za vteřinu a na druhé straně nám voda vytéká nebo si to představíme jako město, kde se auta dostávají z jednoho konce na druhý.

Chceme poslat co nejvíce z S do T.

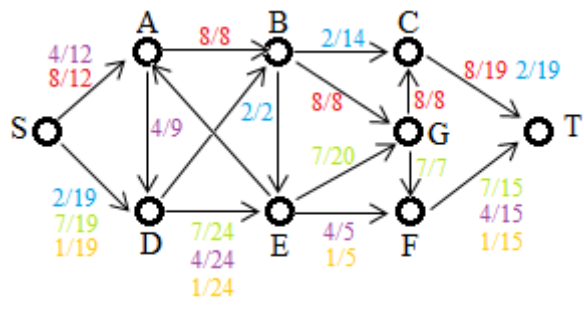
Z S může vyjet naráz 31 aut, do T může naráz dojet 34 aut. Menší z těchto čísel je také horní hranicí maximálního toku danou sítí.



1. Cesta – červená
 - nejprve si vyberu nejmenší kapacitu na trase a tu naplním.
 - S-A-B-G-C-T
 - 8 autíček

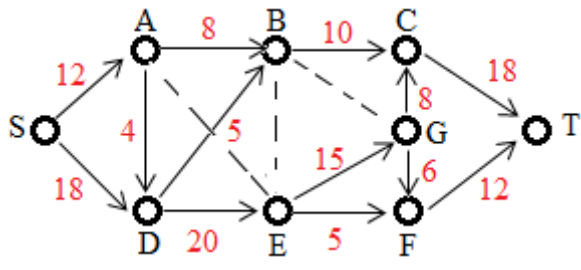
2. Cesta – zelená
 - nejmenší možný počet je sedm, takže pošlu sedm
 - S-D-B-C-T
 - 7 autíček

- 3. Cesta – modrá - S-D-B-C-T
- 2 autíčka
- 4. Cesta – fialová - S-A-D-E-F-T
- 4 autíčka
- 5. Cesta – oranžová - S-D-E-F-T
- 1 autíčko



To co kreslíme je postup, neznamená to, že to na konci bude všechno obsažené. Kdybychom v prvním kroku nevynechali tři osmičkové hrany, udělali bychom líp – respektive nemuseli bychom to pak po sobě spravovat..

Pouze pro toky, nikoliv pro kapacity hran, graf splňuje Kirchhoffův zákon (množství, které teče do uzlu je stejné jako množství, které z uzlu odtéká)



- přerušované hrany jsme nepoužili, není to výhodné (poznámka na okraj: budou se nám možná hodit jako objízdné trasy)

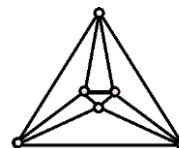
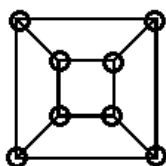
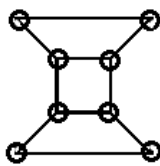
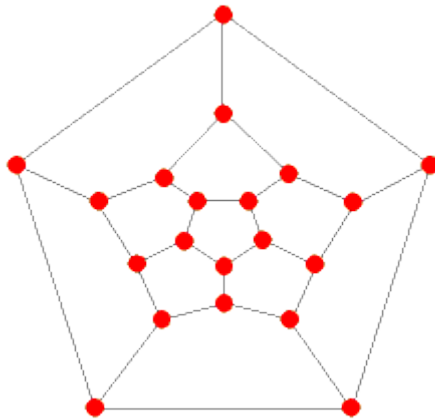
Když hledáme maximální tok, tak to souvisí s minimálním řezem – graf by se měl rozpadnout na dvě části.

Potrubí – na začátku graf neorientovaný (může téct tam i zpátky) v momentě když něco pošlu, tak to teče nějakým směrem, nemůžu to vzít zpátky.

Můžu jít proti směru tam, kde můžu kapacitu snížit a po směru tam, kde ji můžu zvýšit.

HAMILTONOVSKÝ GRAF

Hledáme souvislou kružnici, která obsahuje všechny uzly grafu.



Nutná podmínka pro existenci kružnice:

- G je souvislý graf
- G nemá uzly stupně 1
- G není strom

Dostatečná podmínka pro existenci kružnice: předpoklad $|U| = u \geq 3$

- (Dirac) Je-li každý uzel stupně $\frac{u}{2}$, pak je graf hamiltonovský
- Úprava předchozí podmínky (Ore): Je-li součet stupňů libovolných dvou uzlů nespojených hranou roven alespoň $\frac{u}{2}$, pak je graf hamiltonovský.
- (Pósa) Jestliže pro každé $k < \frac{u}{2}$ ($k \in \mathbb{N}$) je počet uzlů stupně max. k menší než k, pak je graf hamiltonovský.

Dostatečná podmínka je moc silná, existují grafy (viz grafy vzniklé z plošných těles), které podmínky nespĺňují, ale hamiltonovské jsou.

Pósova podmínka v praxi: aby byla splněna, musel by níže uvedený graf obsahovat maximálně 2 uzly stupně nejvýše 3 – z obrázku je vidět, že je to splněno.

Uzly vyšších stupňů nás nezajímají, pouze do st. 3,5, tj. polovina z počtu uzlů (7)

(Kdyby ale uzel stupně 3 v daném grafu měl stupeň 2, Pósova podmínka by splněna nebyla, ale hamiltonovská kružnice by v grafu existovala.)

