

Didaktika matematiky 1: **DĚLITELNOST CELÝCH ČÍSEL**
(Růžena Blažková)

1) Dokažte:

- a) Součet každých dvou lichých čísel je číslo sudé.
- b) Součet každých dvou sudých čísel je číslo sudé.
- c) Součet libovolného sudého čísla a libovolného lichého čísla je číslo liché.
- d) Součin každých dvou lichých čísel je číslo liché.
- e) Součin každých dvou sudých čísel je číslo sudé a je dělitelné čtyřmi.
- f) Součin libovolného lichého a libovolného sudého čísla je číslo sudé.
- g) Součet dvou lichých po sobě jdoucích čísel je vždy dělitelný čtyřmi.

2) Jestliže čísla a , b nejsou dělitelná třemi, pak je vždy jedno z čísel $a + b$, $a - b$ dělitelné třemi. Dokažte.

3) Jestliže p je prvočíslo větší než tři, pak je vždy jedno z čísel $p + 1$, $p - 1$ dělitelné šesti. Dokažte.

4) Jestliže p je prvočíslo větší než tři, pak je číslo $p^2 + 1$ dělitelné číslem 24. Dokažte.

5) Dokažte, že rozdíl dvou kladných trojčiferných čísel, z nichž první je zapsáno v desítkové soustavě týmiž číslicemi jako druhé, avšak v opačném pořadí, je dělitelný čísly 9 a 11.

6) Dokažte:

- a) Druhá mocnina každého lichého čísla zmenšená o 1 je dělitelná osmi.
- b) Rozdíl druhých mocnin dvou libovolných lichých čísel je dělitelný osmi.
- c) Součet třetích mocnin tří za sebou jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.
- d) Součet tří po sobě následujících čísel, z nichž první a třetí jsou lichá, je dělitelný šesti.

7) Je-li $a > 1$ libovolné číslo, pak vždy jedno z čísel $a^2 - 1$, a , $a^2 + 1$ je dělitelné pěti. Dokažte.

8) Jestliže přirozené číslo a není dělitelné sedmi, pak jedno z čísel $a^3 + 1$, $a^3 - 1$ je dělitelné sedmi. Dokažte.

9) Dokažte, že číslo $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$ je dělitelné třemi.

10) Dokažte, že číslo $4^1 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{100}$ je dělitelné pěti.

11) Dokažte, že číslo $A = \underbrace{111\dots1}_{k \text{ cifer}} \underbrace{222\dots2}_{k \text{ cifer}}$ je rovno součinu dvou po sobě jdoucích přirozených čísel. (např. $12 = 3 \cdot 4$, $1122 = 33 \cdot 34$ atd.)

12) Jestliže trojčiferné číslo tvaru ABC je dělitelné 37, pak každé číslo BCA nebo CAB je dělitelné 37. Dokažte.

13) Dokažte, že jestliže k libovolnému trojčifernému číslu připišeme zprava totéž číslo, že takto vzniklé šesticiferné číslo je dělitelné čísly 7, 11, 13.

14) Je-li a libovolné přirozené číslo, pak je číslo $(a^2 - 1) \cdot (a + 3)$ dělitelné číslem 24. Dokažte.

- 15) Určete, zda čísla 411, 573, 1007, 2773 jsou prvočísla nebo čísla složená.
- 16) Doplňte, je-li to možné, chybějící číslice v daných číslech tak, aby vzniklo číslo, které je dělitelné: a) devíti b) jedenácti c) dvanácti.
 37_46 , 536_4 , $378_ _$
- Pokud je to možné, najděte všechny možnosti.
- 17) Najděte přirozené číslo, pro které platí současně: při dělení třemi dává zbytek 1, při dělení čtyřmi dává zbytek 2, při dělení pěti dává zbytek 3 a při dělení šesti dává zbytek 4.
- 18) Ověřte, že platí: $n(64, D(30, 42)) = D(n(30, 64), n(42, 64))$.
- 19) Jaké číslice musíme doplnit, aby pěticiferné číslo 5_3_8 bylo dělitelné číslem 24.
- 20) Zvolte si tři různá trojciferná čísla a určete jejich největšího společného dělitele.
- 21) Zvolte si tři různá dvojciferná čísla a určete jejich nejmenší společný násobek.
- 22) Kolik různých obdélníků lze sestavit z 225 čtvercových dlaždic tak, aby bylo všech dlaždic použito?
- 23) Kolika způsoby můžeme zaplatit částku 39 Kč pouze dvoukorunovými a pěti korunovými mincemi?
- 24) Určete trojciferná čísla, která při dělení třemi dávají zbytek 2 a zároveň při dělení sedmi dávají zbytek 5.
- 25) Dokažte nebo vyvráťte věty:
a) Součet dvou po sobě jdoucích mocnin čísla 2 je vždy dělitelný číslem 3.
b) Součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2 je vždy dělitelný číslem 7.
c) Jestliže je přirozené číslo dělitelné dvěma a šesti, pak je dělitelné dvanácti.
d) Jestliže je přirozené číslo dělitelné třemi a čtyřmi, pak je dělitelné dvanácti.
e) Každé číslo ve tvaru $10^a + 8$, kde a je přirozené číslo, je dělitelné číslem 18.
f) Číslo $3^{2a} - 1$ je dělitelné osmi pro každé přirozené a .
g) Necht' p je prvočíslo větší než 3. Pak $2p^2 + 1$ je vždy dělitelné třemi.
h) Necht' p je prvočíslo větší než 2. Pak $3p^2 + 5$ je vždy dělitelné čtyřmi.
- 26) Najděte nejmenší přirozené číslo, které je násobkem všech čísel od 1 do 10.
- 27) Do přístavu připlouvají parníky. První se vrací každé 4 týdny, druhý za 8 týdnů, třetí za 12 týdnů a čtvrtý za 16 týdnů. Vypluly 2. ledna. Setkají se ještě v tomto roce v přístavu?
- 28) Podnikatel chtěl objednat výrobu kartónových krabic na balení krabiček čaje o rozměrech 13 cm, 7 cm, 5 cm. Jaké budou rozměry krabice, jestliže v ní má být umístěno minimálně 60 krabiček čaje. Bylo by reálné, aby krabice měla tvar krychle?
- 29) Věk kapitána vynásobený šířkou lodí, počtem jeho dcer a počtem synů je 5406. Určete, kolik je kapitánovi roků, kolik má dětí a jak široká je jeho loď.