Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Otakar Zich

K třicátému výročí úmrtí Davida Hilberta

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 18 (1973), No. 6, 301--306

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139538

K třicátému výročí úmrtí Davida Hilberta

Otakar Zich, Praha

DAVID HILBERT 1862—1943

Rok 1943, v němž zemřel velký německý matematik a logik David Hilbert, spadá do jednoho z nejsmutnějších období našeho národa. Nelze se divit, že naši matematikové tehdy nehodnotili jeho dílo, nebyly ani podmínky (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky nevycházel) a snad ani chuť, ačkoli Hilbert rozhodně nepatřil k osobnostem, jež byly v přízni nacistické vlády. Kupodivu však nedalo Hilbertovo dílo ani dříve podnět k rozsáhlejšímu zhodnocení při některém jeho životním jubileu, ačkoli již od přelomu století vyvolala jeho osobnost pozornost a zájem (dr. Pexider). K Hilbertovým šedesátinám vyšel v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky kratičký článeček, spíše poznámka*). Je bez podpisu (šifry) a vcelku velmi výstižně charakterizuje na minimálním prostoru Hilbertovu všestrannost, spojenou s badatelskou pronikavostí a původností. V době, kdy tento článeček vyšel, se mohlo zdát, že soubor pracovních okruhů Hilbertovy činnosti je uzavřen. I tak by byl býval úctyhodný, neboť obsahuje aritmetiku, teorii čísel, teorii forem, klasickou analýzu (zejména základy variačního počtu, teorii integrálních rovnic), syntetickou geometrii a řadu prací aplikujících matematiku na moderní fyzikální odvětví. Avšak soubor Hilbertových pracovních okruhů nebyl uzavřen, jak si ještě naznačíme. To samo svědčí o neobvyklé tvůrčí svěžesti, již

*) Roč. *51* (1922) str. 219. Za upozornění na tento článeček vděčím laskavosti prof. FR. VESELÉHO.

si Hilbert zachoval až do konce života. Protože v tomto roce je tomu třicet let, co se Hilbertův život uzavřel, pokusíme se zamyslit nad některými rysy jeho díla.

Nápadnou vlastností Hilbertovy osobnosti je jeho vztah k nejobtížnějším matematickým a logickým problémům, později dokonce obecně metodologickým. Zdá se jakoby byl přitahován právě tím nejtěžším. Uveďme si alespoň jeden doklad, týkající se teorie čísel. Je dobře znám Lagrangeův teorém, jenž říká, že každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet nejvýše čtyř čtverců přirozených čísel. Platnost tohoto teorému byla tušena již před Lagrangem a tak, jak se historicky vyvíjela problematika teorie čísel, často se empiricky odkryté zákonitosti zobecňovaly. Pracoval tak i Fermat. Anglický matematik WARING (nar. 1736) vyslovil hypotézu, že každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet k-tých mocnin přirozených čísel ($k > 2$), který obsahuje nejvýše $\varrho(k)$ sčítanců, kde $\varrho(k)$ je konstanta, závisející pouze na exponentu k. Ukázalo se, že důkaz této hypotézy je neobyčejně obtížný, jak o tom svědčily neúspěšné pokusy do roku 1907, kdy Hilbert podal poměrně krátký důkaz Waringovy hypotézy, opíraje se o značně silné prostředky analýzy. HENRI POINCARÉ, který se vícekrát zabýval Hilbertovým dílem, obdivoval tento důkaz a vyslovil se, že budou-li někdy poznány základní podněty tohoto důkazu, budou z nich patrně plynout významné aritmetické teorémy jako z rohu hojnosti. Poincaréovo tušení se skutečně potvrdilo (HARDY, LITTLEWOOD aj.). V této souvislosti snad stojí za zmínku i drobnost, která se vypráví o Hilbertovi a tzv. posledním teorému Fermatově. Na počátku našeho století věnoval zámožný německý matematik dr. WOLFFSKEHL nemalou částku 100 000 říšských marek na rozřešení Fermatova problému. Do té doby, než by byl rozřešen, měly být úroky z uvedené sumy použity k odměně nejúspěšnějších prací na tomto poli. Hilbert prý říkával, napolo v žertu, že tento problém by stejně rozřešil jen on sám, a že je lépe, plynou-li úroky z Wolffskehlovy ceny dál.

Řekli jsme již, že Hilbert byl přitahován kouzlem nejtěžších problémů. K takovým jistě patří práce na základech matematických disciplín. Chceme-li alespoň trochu pochopit poslední tvůrčí období Hilbertovo, v němž učinil tak mnoho po své šedesátce, musíme se zamyslit nad přípravou tohoto období, která přinesla mimořádné výsledky již koncem 19. století a začátkem století našeho. Jde o Hilbertovo klasické zkoumání základů geometrie ([1]). V tomto díle byly poprvé vůbec formulovány a využity některé metodologické zásady, společné pro všechny matematické obory a od té doby závazné. Hilbert především vyjmenoval třídy objektů, jež vyhovují axiómům. Dále uvedl úplný seznam axiómů, jež jsou rozděleny na skupiny, z nichž každá charakterizuje určitou stránku geometrických vztahů. Tak je to např. skupina axiómů uspořádání (II. skupina), axiómů kongruence (III. skupina) nebo nakonec skupina axiómů spojitosti (V. skupina). Protože operace, o které jde v geometrii, jsou matematické povahy, nevyslovuje tu Hilbert zvláštní pravidla odvozování, běžná v logických soustavách. Velmi důležité a původní je Hilbertovo zkoumání nezávislosti axiómů (v podstatě na vhodných modelech jako dnes) a studium takových geometrií, jež vypouštějí některé axiómy nebo teorémy. Zde dosáhl Hilbert výsledků, jež překvapily celý matematický svět. Obdivu se neubránil ani Henri Poincaré (tentokrát opět), který zvláště rozebírá Hilbertovu nearchimedovskou geometrii i další, jako je nepascalovská geometrie ([2]: str. 261 a násl.). V nearchimedovské geometrii neplatí axióm, formulovaný EUDOXEM, který pro naše účely ne zcela přesně vyslovíme takto: zvolíme-li na přímce dva body A, B libovolně vzdálené a kromě toho úsečku d pevné délky, pak existuje přirozené číslo n takové, že n-násobným nanesením úsečky d od bodu A směrem k B překročíme bod B. Taková geometrie, pro niž sestrojil Hilbert zvláštní třídu komplexních čísel, není pouhou hrou intelektu. Hilbert tuto geometrii objevil ještě před EINSTEINOVOU teorií relativity. V této teorii nelze překročit mez mechanické rychlosti, tj. rychlost světla, žádným n-násobkem rychlosti menší než rychlost světelná. Nepascalovské geometrie, které opouštějí platnost známé Pascalovy věty o šestiúhelníku vepsaném do kuželosečky (zde degenerující ve dvě přímky) mají tu vlastnost, že v nich neplatí zákon záměnnosti násobení úseček. Populárně řečeno, v takové geometrii není plocha obdélníka nezávislá na záměně jeho stran. Slavný je Hilbertův důkaz bezespornosti geometrie. Projevuje se v něm metodologický postup, užitý od té doby mnohokrát. Hilbert převedl bezespornost geometrie na bezespornost aritmetiky tak, že zobrazil geometrické vztahy vzájemně jednoznačně na aritmetické. Otevřenou otázkou zůstala ovšem bezespornost aritmetiky. Poincaréův zájem na Hilbertově práci vyústil v další závažný objev. Původní soustava Hilbertových axiómů končila Archimedovým axiómem. Poincaré ukázal, že Hilbertově soustavě vyhovují ještě jiné třídy geometrických objektů než tři obvyklé: třída bodů, třída přímek a třída rovin. To vedlo Hilberta k formulaci tzv. axiómu úplnosti, jenž tvoří s Archimedovým skupinu axiómů spojitosti. Axióm úplnosti vyvolal celou literaturu. Jeho základní myšlenka se objevuje v řadě úvah o deduktivních soustavách (povaha jejich modelů), a to nejen při vytváření soustavy axiómů, ale i v požadavcích na tvoření výrazů.

Poslední období Hilbertovy tvorby, o němž jsme se zmínili, je vyplněno úsilím o zvládnutí velkorysého programu, známého v dějinách moderní matematiky jako Hilbertův program. Hilbert k němu nepřistupoval bez přípravy. Jeho úvahy o základech matematiky, porůznu uveřejněné, vystupují již od r. 1900, např. v práci [3] o pojmu čísla nebo v heidelberské přednášce o základech logiky a aritmetiky ([4]). A konečně celá jeho práce v geometrii, o níž jsme mluvili a v axiomatizaci aritmetiky, byla též přípravnou etapou jeho programu, i když relativně samostatnou. Hilbert obětoval programu, pro jehož realizaci získal řadu svých vynikajících žáků (jako ACKERMANN, BERNAYS, SCHÜTTE a jiní, patří sem i geniální HERBRAND), celou svoji ostatní práci. Dokonce je známo, že práci na základech logiky a matematiky pokládal za svůj dluh vědecké veřejnosti (srv. [5]: str. 317 a násl.). Je nemožné vylíčit stručně motivy, které vedly k jeho programu. Proto se pokusíme popsat stručně program sám. Zdá se, že nutným předpokladem tu bylo vytvoření systému *Principia mathematica*, díla RUSSELLOVA a WHITEHEADOVA, logických základů moderní matematiky. Hilbert však potřeboval jít dále a oprostit základy matematiky od takových prvků intuice, jež by se daly těžko kontrolovat. Hilbertův program je určen dvěma etapami. Za prvé bylo třeba matematiku plně formalizovat, tj. vytvořit takové axiomatické soustavy základních matematických disciplín jako je aritmetika, klasická analýza, teorie množin, aby v nich pomocí pevné množiny pravidel bylo možno vyvodit teorémy přibližně v rozsahu citovaných *Principií.* Pro formalizaci je charakteristické formální pojetí, při němž se bere v úvahu jen tvar a uspořádání symbolů, z nichž se tvoří posloupnosti, speciálně pak důkazové posloupnosti. Intuice se tu užívá minimálně, je třeba pouze umět symboly rozeznávat nebo typograficky identifikovat. Nic víc není zapotřebí a práci s posloupnostmi symbolů by zásadně bylo možno svěřit mechanismu. Není tedy třeba symbolům a jejich sestavám rozumět, znát jejich význam. Náznaky této krajní pozice Hilbertovy jsou již v jeho axiomatizaci geometrie. Význam termínů je dostatečně určen tím, co o nich vypovídají axiómy. Již v realizaci této první etapy programu byla řada nových výsledků, mezi jinými zavedení tzv. epsilon-operátoru Hilbertova, jímž je možno definovat oba klasické kvantifikátory predikátové logiky, totiž obecný a existenční, a který má složitý vztah k známému množinovému axiómu výběru.

Za druhé bylo třeba ukázat, že aplikace pravidel odvozování (jako je pravidlo substituce nebo modus ponens) nepovedou k formálnímu sporu, tj. ke konjunkci typu *p et non-p*. K tomu cíli byla vytvořena teorie důkazu, již nazval Hilbert metateorií. V metateorii využil výsledků kritiky, kterou na základech matematiky uplatnila BROUWEROVA intuicionistická škola (zákaz užití zákona tertium non datur při úvahách o nekonečných souborech) nebo Russellovy rozbory nepredikativních postupů v definicích, aby bylo zabráněno vzniku antinomií. Jinak řečeno: Hilbert vtělil do svého programu požadavek finitnosti metod důkazu, ač tento požadavek, podobně jakou Brouwer, nikdy jasně neformuloval. Hilbertova metateorie by tedy měla zaručit bezespornost matematických teorií, na něž se aplikovala, tedy také bezespornost teorie množin v některé z jejích axiomatizovaných podob. Pro Hilberta (ostatně jako pro mnoho jiných matematiků) to byl požadavek zajišťující existenci matematických objektů.

Ukázalo se však, že Hilbertův program nelze uskutečnit v té podobě, jak jej göttingenský mistr razil. Dvanáct let před Hilbertovou smrtí uveřejnil mladý rakouský matematik a logik KURT GÖDEL krátkou práci, jež se ukázala být rozhodující pro nová zkoumání základů matematiky ([6]). Její výsledek je zdánlivě negativní, ale právě jen zdánlivě. Na jejím základě a z jejích podnětů vyrostla velká literatura, zabývající se novými prostředky ve zkoumání základů matematiky. Gödelův výsledek zní: každý logický systém, obsahující formalizovanou rekursivní aritmetiku, je buď sporný, nebo obsahuje některou nerozhodnutelnou formuli (třeba pravdivou)*). Přitom nerozhodnutelná formule systému je taková formule, kterou uvnitř systému nelze ani dokázat ani vyvrátit. Důsledek tohoto základního výsledku je teorém, který omezil naděje kladené Hilbertem a jeho skvělými spolupracovníky do původního programu. Teorém říká: mějme tvrzení, které lze přesně interpretovat jako tvrzení vyjadřující bezespornost nějakého bezesporného logického systému. Jestliže takový systém obsahuje aritmetiku, nelze v něm tvrzení o bezespornosti dokázat.

I když se Hilbertův program ukázal jako neuskutečnitelný v principu, nemůže tento částečný nezdar oslabit váhu celého bádání, jež provedl Hilbert se svou školou, zejména výzkum metateorie. Ostatně v jeho škole a v jeho pokračovatelích se rozřešilo mnoho dílčích výsledků nemalého významu pro nynější matematiku a matematickou logiku.

Mohlo by se zdát, že Hilbert byl vyloženým typem analytickým (logickým), jak říkal Poincaré, když jej kladl jako protiklad typu geometrického (intuitivního), jehož představitelem byl mu velký německý matematik Felix KLEIN, Hilbertův přítel ([7]: str. 12—13). Není tomu tak. Hilbert dovedl napsat kouzelnou knihu o názorné geometrii

*) Původní Gödelova formulace počítá s omega-sporností; vzhledem k pozdějšímu ROSSEROVU výsledku lze tento pojem nahradit obvyklým pojmem spornosti.

[8], v jejíž předmluvě píše: „... na základě názoru si můžeme přiblížit mnohá geometrická fakta a kladení otázek, a kromě toho se dají naznačit v názorné podobě v mnoha případech i metody výzkumu a důkazu, jež vedou k poznání fakt, aniž bychom se potřebovali zabývat jednotlivostmi pojmové teorie a výpočtem". Uveřejněním této knihy v r. 1932 sledoval také cíl učinit matematiku populárnější, neboť „obecně se matematika netěší žádné oblibě, i když se uznává její význam" (tamtéž). Fakt, že Hilbert uměl zaujmout k matematické problematice takovýto postoj, není příliš znám. Jeho láska k vědě byla taková, že se snažil ukázat dokonce její přístupnost širším kruhům. To se mu znamenitě podařilo, uvážíme-li, že mezi mnoha problémy, o nichž kniha mluví, jsou i nesnadné a přece poutavě podané zákonitosti topologie.

Literatura

[1] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 6. nezměněné vydání, Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner 1923.

[2] H. POINCARÉ, *Dernières Pensées*, Paris, E. Flammarion 1933.

[3] D. HILBERT, *Ueber den Zahlbegriff*, Anhang VI v knize [1].

[4] D. HILBERT, *Ueber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, Anhang VII v knize [1].

[5] A. A. FRAENKEL - Y. BAR-HILLEL, *Foundations of Set Theory*, ruský překlad, Moskva 1966 izd. Mir.

[6] K. GÖDEL, *Über formal unentscheidbare Sätze der Prinzipia Mathematica und verwandter Systeme*, Monatshefte für Mathematik und Physik *38* (1931).

[7] H. POINCARÉ, *La Valeur de la Science*, Paris, E. Flammarion 1927.

[8] D. HILBERT und S. COHN-VOSSEN, *Anschauliche Geometrie*, Berlin, J. Springer 1932.

Matematika se definuje jako věda o libovolných možných „čistých" strukturách; možných — ve smyslu logicky myslitelných, i když jinak pouze „fiktivních" a „nereálných", a čistých v tom smyslu, že jejich prvky a vztahy nemají žádný jiný obsah než ten, který je dán v samotné definici struktury. Svoboda ve vytváření množinově teoretických definic přiměla Cantora k hrdému výroku: „Podstata matematiky je v její svobodě!" Avšak skutečná svoboda vyžaduje pochopení nutnosti, neboť jinak subjektivně svobodná činnost může vést k neočekávaným důsledkům nebo dokonce může ztratit schopnost sama se realizovat a ukázat se tak objektivně nesvobodnou. Takový byl i osud svobody vyhlášené Cantorem: spolu s velkolepými úspěchy vedla i k známým paradoxům. Množinově teoretické hledisko bylo otřeseno a s ním se ukázala podkopanou i celá harmonická stavba matematiky. V hořejších patrech se energicky budovalo: cihly matematických vět spojované cementem logiky byly včleňovány do rámců již existujících disciplín a byly vztyčovány skelety nových teorií — avšak v množinově teoretických základech se objevily rozšiřující se trhliny paradoxů a pod nimi pohyblivé písky a bažiny logických obtíží. Architekti a inženýři — logicisté, intuicionsté, efektivisté, konvencionalisté, realisté, formalisté — předkládali různé projekty počítající až se zbořením podstatné části celé budovy. Takto chtěli naložit speciálně intuicionisté se všemi čistě existenčními větami. Jednota v chápání matematiky byla porušena a například se prohlašovalo, že pro intuicionistu matematická pravda existuje v hlavě matematika a pro formalistu — na papíře.

K záchraně překrásné budovy matematiky Hilbert přišel s vlastním projektem podložit ji pevným základem formalizace. Matematika se musí opřít o přesně definovaná pravidla operování se symboly, a protože samy tyto symboly, jejich komplexy — formule, a posloupnosti formulí jsou dostatečně určené vnější předměty, každá nepevnost základů bude vyloučena touto vnější předmětnou jasností. Avšak tento projekt se ukázal neuskutečnitelným; jeho vlastní rozpracování přivedlo k důkazu toho, že žádná aspoň trochu obsažná část matematiky nemůže být beze zbytku formalizována, a pokud formalizována je, nemůže být v rámci této formalizace dokázána její bezespornost. Tak bylo zjištěno, nikoliv na filosofické, ale na matematické úrovni, že nekonečné nemůže být beze zbytku zahrnuto do konečného a že zkoumání a zpevňování základů matematiky nemá hranic, nemůže být nikdy ukončeno. Ukázalo se stejně neukončeným procesem jako je budování nových teorií na těchto základech.

A. D. Aleksandrov

Tento výňatek jsme vybrali z článku A. D. Aleksandrova *Matematika i dialektika* (Sibirskij matematičeskij žurnal, 1970, č. 2, str. 243—263). *Redakce PMFA*

K výročí H. A. Lorentze (1853—1928)

Elektronová teorie hmoty, kontrakce délek, transformace mezi ekvivalentními systémy speciální teorie relativity, dovršení Maxwellovy teorie elektromagnetismu, teoretický výklad Zeemanova a Faradayova efektu, jakož i dalších důležitých elektrických a optických jevů, podstatné přínosy v teorii gravitace a termodynamice — to jsou hlavní fyzikální oblasti, kde se setkáváme se jménem holandského fyzika ANTOONA HENDRIKA LORENTZE. Jeho postavu snad nejlépe charakterizují slova Alberta Einsteina: „Kdybychom my mladší byli znali H. A. Lorentze jen jako osvíceného ducha, byly by náš obdiv a úcta k němu už jedinečné. Co však pociťuji, myslím-li na H. A. Lorentze, není tím zdaleka vyčerpáno. Znamenal pro mne osobně víc než všichni ostatní, kdo mě potkali na mé životní pouti. Jak ovládal fyziku a matematiku, ovládal i sebe sama, bez námahy a v trvalé umírněnosti. Proti všem pravidlům neměl lidských slabostí, a přesto na své bližní nepůsobil tísnivě. Každý cítil jeho převahu, ale nikdo se jí necítil utlačen. Neboť ačkoliv viděl do lidí a lidských vztahů, měl přece pro všechno dobrotivou vlídnost. Nikdy nepůsobil dojmem člověka, který vládne, ale člověka, který slouží a pomáhá..."

K této krátké vzpomínce snad ještě dodejme, že po Roentgenovi byli Lorentz s Zeemanem v pořadí druzí, kteří dostali Nobelovu cenu za fyziku (v roce 1902 za výzkum v oblasti působení magnetického pole na záření) a že Lorentz, profesor teoretické fyziky v Leydenu, vyřešil i tak náročnou inženýrskou úlohu, jakou byly hydrostatické a hydrodynamické problémy Zuider Zee — velkého vodohospodářského díla Holandska.

Jiří Niederle