

# Posloupnosti

Repetitorium z matematiky

Podzim 2012

Ivana Medková

# Osnova:

## 1 Posloupnosti

### 1.1 Vlastnosti posloupností

## 2 Aritmetická posloupnost

## 3 Geometrická posloupnost

## 4 Limita posloupnosti

# 1 Posloupnosti

- Posloupnost je funkce, která je definovaná v množině přirozených čísel  $\mathbf{N}$ .

**A) Konečná posloupnost,**  $D(f) =$  je množina prvních  $k$  přirozených čísel

$$\{a_n\}_{n=1}^k = a_1, a_2, a_3 \dots a_k$$

**B) Nekonečná posloupnost,**  $D(f) = \mathbf{N}$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3 \dots a_n$$

# Úlohy

**Př.1:** Napište prvních pět členů posloupnosti dané vzorcem pro n-tý člen:

a)  $(3n)_{n=1}^{\infty}$

b)  $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

c)  $(0,5 + 0,5 \cdot (-1)^n)_{n=1}^{\infty}$

d)  $((n-1)n)_{n=1}^{\infty}$

Zadáno vzorcem pro n-tý člen

**Př.2:** Zapište dané posloupnosti vzorcem pro n-tý člen:

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

b) 1, 4, 9, 16, 25

c) 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5

d) 3, -3, 3, -3, 3, -3, 3, -3, 3, -3

e)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \dots$

**Př.3:** Je dána posloupnost  $(n^2 + 2n + 1)_{n=1}^{\infty}$ . Rozhodněte, zda číslo 223 je členem této posloupnosti.

## Zadání posloupnosti rekurentním vzorcem

= jsou zadány první členy posloupnosti a vztah pro výpočet dalších členů posloupnosti pomocí členů předcházejících

$$\begin{array}{l} \text{Např.: } a_1 = 4 \\ a_{n+1} = -2a_n \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} a_2 = -2a_1 = -8 \\ a_3 = -2a_2 = 16 \\ a_4 = -2a_3 = -32 \end{array}$$

### Úlohy

**Př.1:** Napište prvních pět členů posloupnosti určené rekurentně:

$$a) \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b) \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$c) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$d) \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

# 1.1 Vlastnosti posloupností

Posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  se nazývá:

- **rostoucí**  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$
- **klesající**  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$
- **nerostoucí**  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$
- **neklesající**  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$
- **omezená shora**  $\Leftrightarrow$  existuje takové  $h \in \mathbb{R}$ , že pro  $\forall n \in \mathbb{N}$  je  $a_n \leq h$
- **omezená zdola**  $\Leftrightarrow$  existuje takové  $d \in \mathbb{R}$ , že pro  $\forall n \in \mathbb{N}$  je  $a_n \geq d$
- **omezená**  $\Leftrightarrow$  posloupnost je omezená shora i zdola zároveň

## Úlohy

**Př.1:** Rozhodněte, která z daných posloupností je rostoucí či klesající:

$$a) \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad a_n = (-2)^n$$

$$b) \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad b_n = \frac{n}{n+1}$$

## 2 Aritmetická posloupnost

Posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  se nazývá **aritmetická**, právě když existuje takové  $d \in \mathbf{R}$ , že pro každé  $n \in \mathbf{N}$  je :

$$a_{n+1} = a_n + d$$

diference aritmetické  
posloupnosti

Dále platí:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= d \\ a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ a_s &= a_r + (s - r)d \end{aligned}$$

Pro **součet**  $s_n$  prvních  $n$  členů aritmetické posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , tj. pro  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , platí:

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$



## Úlohy

**Př.1:** Vypište první 3 členy aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$a) \quad a_1 = 4, \quad d = -1$$

$$b) \quad a_1 = 0,5, \quad d = -3$$

$$c) \quad a_5 = 6, \quad d = 2$$

$$d) \quad a_5 = 7, \quad a_9 = 11,$$

**Př.2:** Určete součet prvních dvanácti členů aritmetické posloupnosti, pro kterou platí:

$$a) \quad a_1 = 6, \quad a_{12} = 28$$

$$b) \quad a_1 = 0, \quad d = 1,5$$

$$c) \quad a_1 = 2, \quad a_8 = -19$$

$$d) \quad a_4 = 7, \quad a_8 = -1$$

**Př.3:** Vypočítejte součet všech dvojciferných přirozených čísel.

# 3 Geometrická posloupnost

Posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  se nazývá **geometrická**, právě když existuje takové  $q \in \mathbf{R}$ , že pro každé  $n \in \mathbf{N}$  je :

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Kvocient geometrické  
posloupnosti

Dále platí:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}$$

Pro **součet**  $s_n$  prvních  $n$  členů geometrické posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , s kvocientem  $q$  platí:

a) je-li  $q = 1$ , pak

$$s_n = n \cdot a_1$$

b) Je-li  $q \neq 1$ , pak

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

## Úlohy

**Př.1:** Vypočtěte kvocient dané geometrické posloupnosti a určete členy  $a_5$  a  $a_8$ :

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad a_1 = 6, \quad a_2 = 24$$

**Př.2:** Vypočtěte kvocienty daných geometrických posloupností a určete první 3 členy.

$$a) \left( \frac{2}{(-2)^n} \right)_{n=1}^{\infty}$$

$$b) (2^n \cdot 3^{2-n})_{n=1}^{\infty}$$

**Př.3:** Určete součet prvních deseti členů geometrické posloupnosti, pro kterou platí:

$$a) \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 4$$

$$b) \quad a_1 = 6, \quad a_2 = 24$$

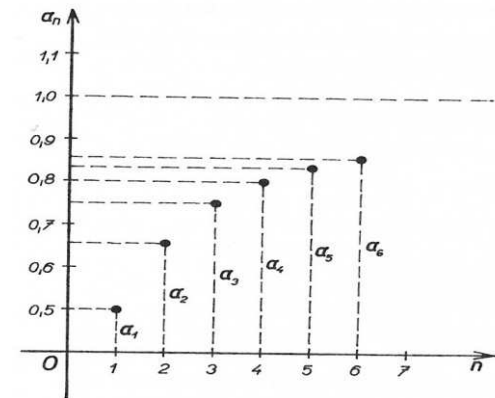
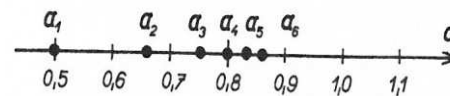
# 4 Limita posloupnosti

Pro každou posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  může nastat jeden z těchto tří typových případů:

a) S rostoucím  $n$  se členy posloupnosti neomezeně blíží k určitému  $a \in \mathbf{R}$ , pak  $a$  je **vlastní limitou** posloupnosti.

Např.:

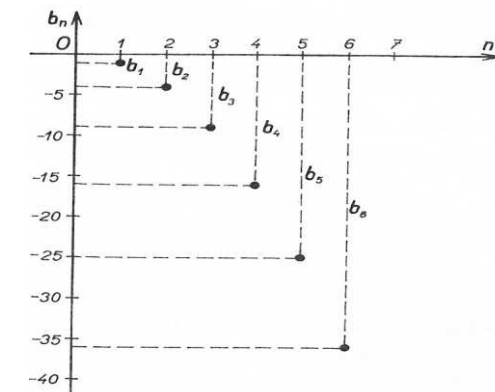
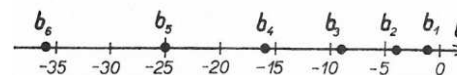
$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left( \frac{n}{n+1} \right)_{n=1}^{\infty}$$



b) S rostoucím  $n$  se členy posloupnosti blíží k  $+\infty$  nebo  $-\infty$ , pak říkáme, že posloupnost má **nevlastní limitu  $+\infty$  nebo  $-\infty$** .

Např.:

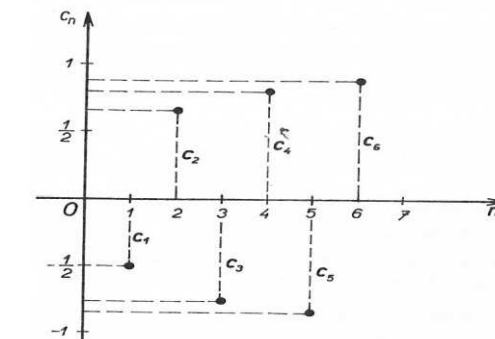
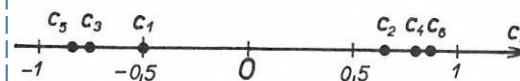
$$(b_n)_{n=1}^{\infty} = (-n^2)_{n=1}^{\infty}$$



c) S rostoucím  $n$  se členy posloupnosti **neblíží** ani k  $a \in \mathbf{R}$ , ani k  $+\infty$  nebo  $-\infty$ , pak říkáme, že posloupnost **nemá** ani vlastní, ani nevlastní limitu.

Např.:

$$(c_n)_{n=1}^{\infty} = \left( (-1)^n \frac{n}{n+1} \right)_{n=1}^{\infty}$$



# Věty o limitách posloupností

- Pokud  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je:

- aritmetická posloupnost, kde  $d = 0, a_1 = a$

- geometrická posloupnost, kde  $q = 1, a_1 = a$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

- Pokud je u aritmetické posloupnosti  $d \neq 0 \Rightarrow$  nemá vlastní limitu.

- Pokud pro geometrickou posloupnost platí:

$$|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$|q| > 1 \text{ nebo } q = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{nemá vlastní limitu}$$

- Při výpočtu limit využíváme následující vztahy:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0).$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{n} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right) = 0$$

## Úlohy

**Př.1:** Určete limity:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{6n + 5}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 1}{n^2 + 5}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n + 1}{3n - 5} \right)^3$$

# Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Odvárko, O. Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady, Praha: Prometheus, 1996.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.