

9. Derivace funkce

Repetitorium z matematiky

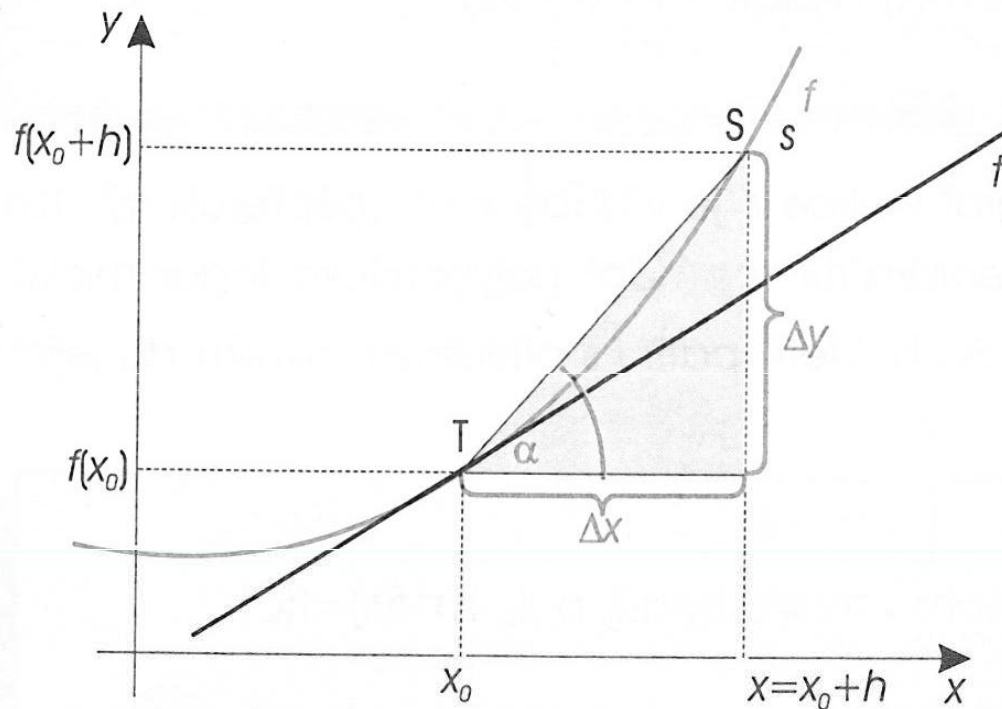
Podzim 2012

Ivana Medková

Osnova:

- 1 Pojem derivace
- 2 Geometrický význam derivace funkce
- 3 Derivace základních funkcí
- 4 Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí
- 5 Vzorce pro derivaci složené funkce
- 6 Aplikace – vyšetřování průběhu funkce
 6. 1 Vyšetřování monotónnosti funkce užitím derivací
 6. 2 Vyšetřování lokálních extrémů funkce užitím derivací

1 Pojem derivace



Je-li funkce f definována v okolí bodu x_0 a existuje-li limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

potom tuto limitu označujeme $f'(x_0)$ a nazýváme ji **derivací funkce f v bodě x_0** .

Derivace funkce f v bodě x_0 je tedy číslo:

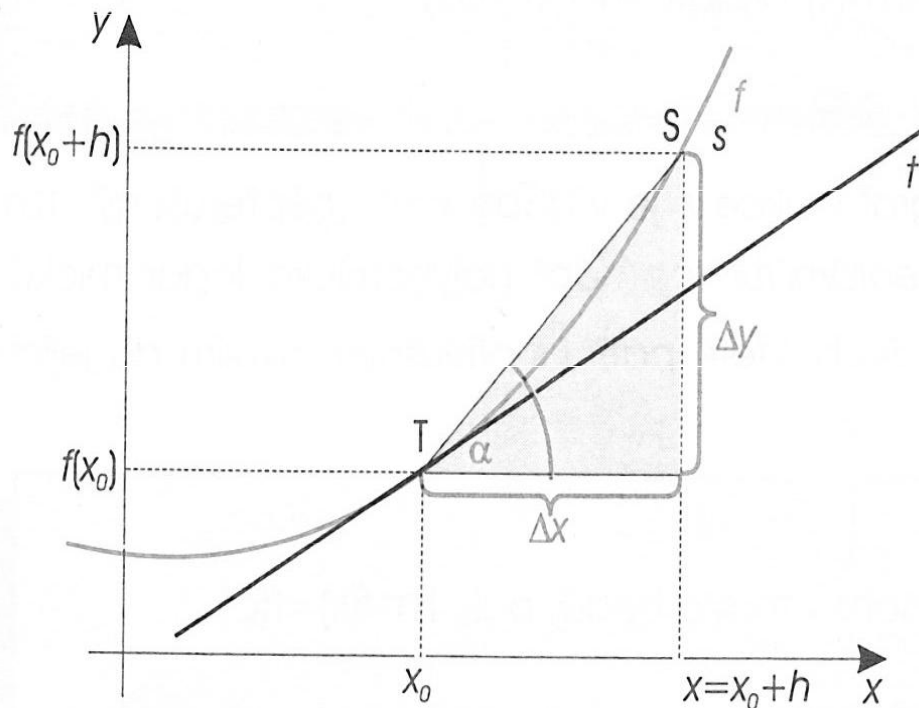
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pozn.: Při označení $x = x_0 + h$ a $x - x_0 = h$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2 Geometrický význam derivace funkce

Pro směrnici tečny k_T ke grafu funkce f v bodě $T [x_0, y_0]$ platí: $k_T = f'(x_0)$



Platí totiž: směrnice sečny ST je

$$k_S = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pokud se bude bod S přibližovat k bodu T, bude se poloha sečny „blížit“ poloze tečny v bodě $T [x_0, y_0]$.

Pro směrnici tečny tedy dostaneme:

$$k_T = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Rovnici tečny pak můžeme psát ve tvaru:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

3 Derivace základních funkcí

Funkce $f: y = f(x)$	Vzorce pro derivaci funkce f	Podmínky platnosti vzorce ($x \in D(f')$)
$y = c (c \in \mathbb{R})$	$y' = 0$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^n, n \in \mathbb{N}$	$y' = nx^{n-1}$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^k, k \in \mathbb{Z}$	$y' = kx^{k-1}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = x^r, r \in \mathbb{R}$	$y' = rx^{r-1}$	$x \in (0, +\infty)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$	$y' = a^x \ln a$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x \in (0, +\infty)$
$y = \log_a x (a > 0)$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$x \in (0, +\infty)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$

4 Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Jestliže funkce $f: u = f(x)$, $g: v = g(x)$ mají derivaci v každém bodě $x \in M$, pak pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu těchto funkcí platí pro všechna $x \in M$ (u podílu $g(x) \neq 0$) následující vzorce:

$$\text{a) } (u + v)' = u' + v',$$

$$\text{b) } (u - v)' = u' - v',$$

$$\text{c) } (uv)' = u'v + uv',$$

$$\text{d) } (cu)' = cu', \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\text{e) } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Úlohy:

Vypočtěte v přípustných bodech derivace funkcí daných funkčními předpisy:

$$\text{a) } y = x^5 + x^3$$

$$\text{b) } y = 3x^4 - 2x^3 + x - 1$$

$$\text{c) } y = x^3 + \ln x - \sin x$$

$$\text{d) } y = x^2 \sin x$$

$$\text{e) } y = (x - 1) / (x + 1)$$

$$\text{f) } y = (1/x^2) e^x$$

5 Vzorce pro derivaci složené funkce

Jestliže je dána složená funkce $F: y = f(g(x))$, přičemž vnitřní funkce g má derivaci v každém bodě $x \in M$ a vnější funkce f má derivaci f' v každém odpovídajícím bodě $u = g(x)$, pak složená funkce $F = f \circ g$ má derivaci F' v každém bodě $x \in M$, pro niž platí:

$$F'(x) = f'(u) g'(x)$$

Úlohy:

Vypočtete derivaci složené funkce:

a) $y = \sin(7x)$

b) $y = (3x^2 - 2)^4$

c) $y = 5 \sin^2 x$

d) $y = \cos(1 - 2x)$

6 Aplikace: vyšetřování průběhu funkce

6. 1 Monotónnost funkce

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má v každém bodě $x \in (a; b)$ derivaci $f'(x_0)$. Pak platí:

- Je-li $f'(x_0) > 0$ pro každé $x \in (a; b)$ \Rightarrow f je **rostoucí** na $\langle a, b \rangle$.
- Je-li $f'(x_0) < 0$ pro každé $x \in (a; b)$ \Rightarrow f je **klesající** na $\langle a, b \rangle$.

Úlohy:

Určete intervaly, v nichž jsou rostoucí, resp. klesající funkce

a) $f : y = x^3 - 5x^2 + 3x$

b) $f : y = x^3 - 12x$

c) $f : y = x^2 + 4x - 5$

6 Aplikace: vyšetřování průběhu funkce

6. 2 Extrémy funkce

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci a je-li $f'(x_0) = 0$, pak x_0 nazýváme **stacionárním bodem**. V tomto bodě x_0 může, ale nemusí mít funkce lokální extrém – jedná se o bod „podezřelý“ z extrému.

Nechť $f'(x_0) = 0$ a necht' existuje v bodě x_0 druhá derivace. Pak:

- Je-li $f''(x_0) < 0$ → má funkce f v bodě x_0 ostré **lokální maximum**.
- Je-li $f''(x_0) > 0$ → má funkce f v bodě x_0 ostré **lokální minimum**.

Úloha:

Vyšetřete průběh funkce $f : y = x^3 - 3x^2$ a načrtněte její graf.

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Hrubý, D., Kubát, J. Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.