MASARYKOVA UNIVERZITA

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

L o g i k a

P ř í k l a d y k z á p o č t u – vzor

Student(ka): Marie Chytrá

2014/2015

Výroková logika

Příklad 1
Mějme složený výrok:
Je nemocen nebo unaven.

a) zapište jej jazykem výrokové logiky,
b) vytvořte a zapište jazykem výrokové logiky jeho negaci.

Řešení:
a)
p …. je nemocen
q …. je unaven

$\mathbf{p \vee q}$

b)
$\neg(p \vee q) \equiv \mathbf{\neg p \wedge \neg q}$

$\neg p$ …. není nemocen
$\neg q$ …. není unaven

Není nemocen a není unaven.

Příklad 2
Určete, zda daná formule je tautologie, kontradikce nebo splnitelná formule:

$((p \wedge (\neg q)) \vee p) \rightarrow (r \vee (\neg q))$

Řešení:

p	q	r	((p	$\wedge$	($\neg$q))	$\vee$	p)	$\rightarrow$	(r	$\vee$	($\neg$q))
1	1	1	1	0	0	1	1	**1**	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	1	**0**	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	**1**	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	**1**	1	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	**1**	1	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	**1**	0	1	1
				2)	1)	3)		6)		5)	4)

Splnitelná formule (sloupec $\rightarrow$ obsahuje jak 1, tak i 0).

Příklad 3
Dokažte, že platí de Morganovo pravidlo negace konjunkce:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \qquad p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$

Řešení:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\boldsymbol{\neg(p \wedge q)}$	$\boldsymbol{\neg p \vee \neg q}$	$\boldsymbol{p \wedge q}$	$\neg p \vee \neg q$	$\boldsymbol{\neg(\neg p \vee \neg q)}$
1	1	0	0	1	**0**	**0**	**1**	0	**1**
1	0	0	1	0	**1**	**1**	**0**	1	**0**
0	1	1	0	0	**1**	**1**	**0**	1	**0**
0	0	1	1	0	**1**	**1**	**0**	1	**0**
					*	*	**		**

Platí (ve sloupcích *, resp. ** jsou vždy ve všech řádcích shodné pravdivostní hodnoty).

Příklad 4
Zjistěte, zda platí pravidlo správného usuzování (vyplývá z premis P závěr Z?):
P1: Nejsem sportovec, ale jsem právník.
P2: Jsem historik.
Z: Jsem právník a historik.

Řešení:
A: Jsem sportovec.
B: Jsem právník.
C: Jsem historik.

$2^3 = 8$ řádků

				P1	P2	Z	
A	B	C	$\neg A$	$\neg A \wedge B$	C	$B \wedge C$	
1	1	1	0	0	1	1	
1	1	0	0	0	0	0	
1	0	1	0	0	1	0	
1	0	0	0	0	0	0	
0	1	1	1	**1**	**1**	**1**	*
0	1	0	1	1	0	0	
0	0	1	1	0	1	0	
0	0	0	1	0	0	0	

Platí (v 5. řádku * jsou pro P_1, P_2 a Z jedničky (**1**), tj. pro pravdivé premisy P_1 a P_2 je pravdivý závěr Z).

Predikátová logika

Příklad 5
Zapište jazykem predikátové logiky tato tvrzení:

a) Jsou takoví učitelé jazyků, kteří neumějí česky.
b) Obrazy, které zde visí, nejsou originály.

Vytvořte a zapište jejich negace.

Řešení:
a) $\exists x\ (K \wedge \neg L)$

$\forall x\ (K \rightarrow L)$
Všichni učitelé jazyků umějí česky.

b) $\forall x\ (K \rightarrow \neg L)$

$\exists x\ (K \wedge L)$
Některé obrazy, které zde visí, jsou originály.

Příklad 6
Vytvořte negaci souvětí:
Všichni učitelé jsou přísní a někteří žáci jsou snaživí.

Řešení:
A: Všichni učitelé jsou přísní.
B: Někteří žáci jsou snaživí.
$\forall x\ A \wedge \exists x\ B$

$\exists x\ \neg A \vee \forall x\ \neg B$
Někteří učitelé nejsou přísní nebo žádní (všichni) žáci nejsou snaživí.

Příklad 7
Vytvořte negaci souvětí:
Jestliže se žádný student neučí, pak některý učitel pláče.

Řešení:
A: Žádný student se neučí.
B: Některý učitel pláče.
$\forall x\ \neg A \rightarrow \exists x\ B$

$\forall x\ \neg A \wedge \forall x\ \neg B$
Žádný student se neučí a žádný učitel nepláče.

Třídová logika

Příklad 8

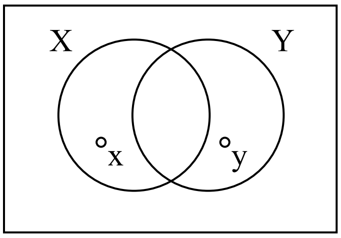
Čemu se rovná: **a)** $Y \cap (Y \cup X)$

b) $(Y \cap X) \cup (Y \cap X')$

Řešení:

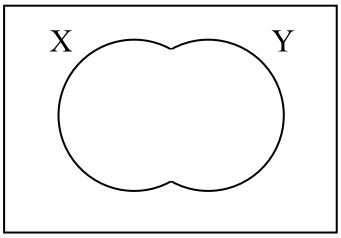
a)

X, Y



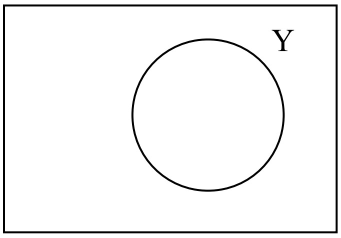
1. krok: $(Y \cup X)$

$(Y \cup X)$



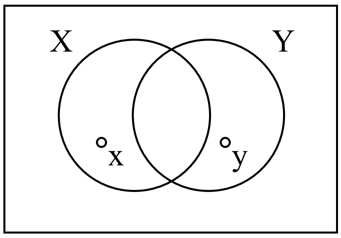
2. krok: $Y \cap (Y \cup X)$

$Y \cap (Y \cup X)$ = **Y**

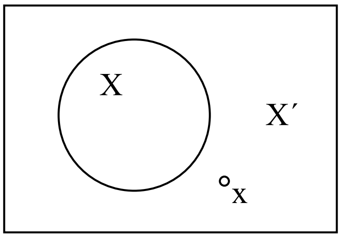


b)

X, Y

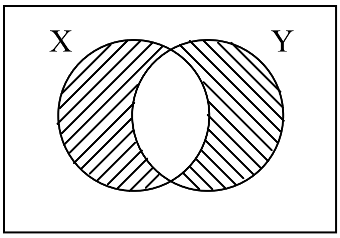


X′



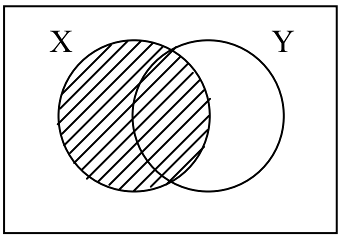
1. krok: $Y \cap X$

$Y \cap X$



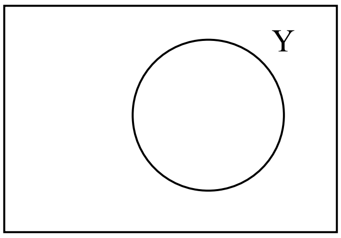
2. krok: $Y \cap X'$

$Y \cap X'$



3. krok: $(Y \cap X) \cup (Y \cap X')$

$(Y \cap X) \cup (Y \cap X') = \mathbf{Y}$



Příklad 9

Zapište a určete, zda závěr (Z) vyplývá z premis (P1 a P2) – zda je sylogismus pravdivý či ne.
P1: Všechny velryby jsou savci.
P2: Někteří vodní živočichové jsou velryby.
Z: Někteří vodní živočichové jsou savci.

Řešení:

Predikáty:
K .... být velrybou.
L .... být savcem.
M .... být vodním živočichem.

P1: O každém individuu platí, že je-li velryba, pak je savcem.
$\forall x\, (K \rightarrow L)$

převod na existenční:
Není pravda, že o některém individuu platí, že je velrybou a současně není savcem.
$\neg\exists x\, (K \wedge \neg L)$

$$\forall x\, (K \rightarrow L) \leftrightarrow \neg\exists x\, (K \wedge \neg L)$$

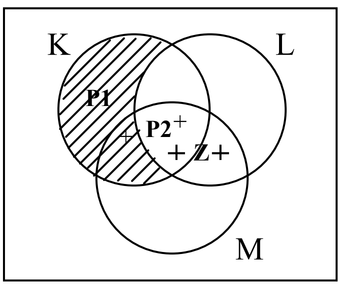
P2: O některém individuu platí, že je vodním živočichem a současně je velrybou.

$$\exists x\, (M \wedge K)$$

Z: O některém individuu platí, že je vodním živočichem a současně savcem.

$$\exists x\, (M \wedge L)$$

P1: $\neg\exists x\, (K \wedge \neg L)$
P2: $\exists x\, (M \wedge K)$
Z: $\exists x\, (M \wedge L)$



Ano (velké + závěru Z je ve stejném poli s malým + premisy P_2).

Příklad 10
Zapište a určete, zda závěr (Z) vyplývá z premis (P1 a P2) – zda je sylogismus pravdivý či ne.
P1: Žádný zdejší žák není hudebník.
P2: Všichni hudebníci jsou umělci.
Z: Žádný zdejší žák není umělec.

Řešení:

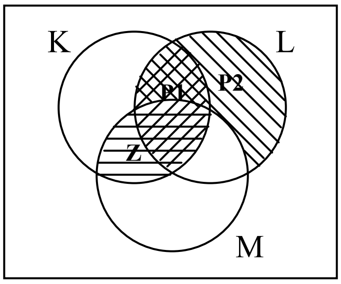
Predikáty:
K .... být zdejší žák.
L .... být hudebník.
M .... být umělec.

P1: O každém individuu platí, že je-li zdejší žák, pak není hudebník.
převod na existenční:
P1: $\forall x\ (K \rightarrow \neg L) \leftrightarrow \neg\exists x\ (K \wedge L)$

P2: O každém individuu platí, že je-li hudebník, pak je umělec.
převod na existenční:
P2: $\forall x\ (L \rightarrow M) \leftrightarrow \neg\exists x\ (L \wedge \neg M)$

Z: O každém individuu platí, že je-li zdejší žák, pak není umělec.
převod na existenční:
Z: $\forall x\ (K \rightarrow \neg M) \leftrightarrow \neg\exists x\ (K \wedge M)$

P1: $\neg\exists x\ (K \wedge L)$
P2: $\neg\exists x\ (L \wedge \neg M)$
Z: $\neg\exists x\ (K \wedge M)$



Ne (závěr Z se překrývá se s nevyšrafovanou plochou $K \cap M$).