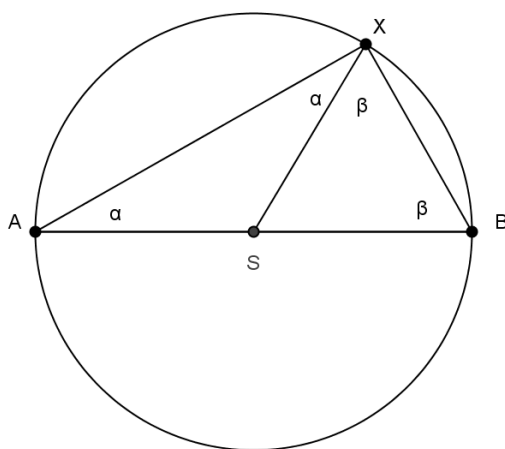


Thaletova kružnice

Thaletova věta: Množina M vrcholů všech pravých úhlů v rovině, jejichž ramena procházejí dvěma danými různými body A, B , je kružnice s průměrem AB s výjimkou bodů A, B .

Důkaz :



Obr. 1

a) Dokážeme, že platí : **Jestliže bod X patří množině M , pak je úhel AXB pravý.**

Zvolme kružnici k se středem S , její průměr AB a bod X kružnice k , $X \neq A$, $X \neq B$ (viz obr.1). Trojúhelník ASX je rovnoramenný, velikosti jeho vnitřních úhlů při základně jsou shodné. Velikost každého z nich označme α . Trojúhelník BSX je rovněž rovnoramenný a velikost jeho úhlu při základně označme β . Vyjádříme-li součet velikostí všech vnitřních úhlů v trojúhelníku AXB , dostáváme vztah:

$$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^{\circ}$$

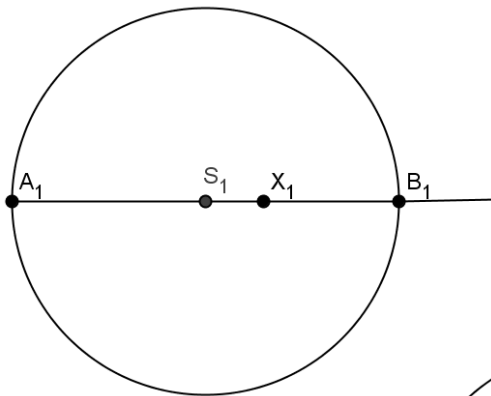
Úpravou dostáváme

$2\alpha + 2\beta = 180^{\circ}$, tj. $\alpha + \beta = 90^{\circ}$, což je velikost konvexního úhlu AXB , a tedy konvexní úhel AXB je pravý – což jsme měli dokázat.

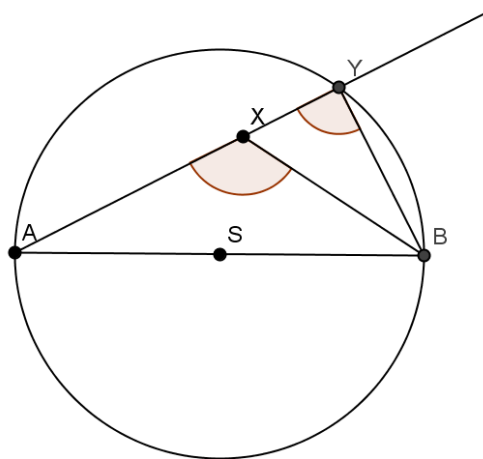
b) Dokážeme, že platí: **Jestliže je úhel AXB pravý, pak bod X patří množině M , tj. leží na kružnici k s průměrem AB , $X \neq A$, $X \neq B$.** Použijeme nepřímý důkaz, tj. dokážeme větu

obměněnou: *Neleží-li bod X na kružnici k s průměrem AB , pak konvexní úhel AXB není pravý.*

- *Nechť bod X patří vnitřní oblasti kružnice k . Jestliže bod X leží mezi body A, B , pak úhel AXB je přímý úhel a nikoliv pravý (obr.2). Neleží-li bod X mezi body A, B , sestrojme bod Y , který je průsečíkem kružnice k s přímkou AX (obr.3). Konvexní úhel AXB je vnější úhel trojúhelníku XYB a je tedy větší než konvexní úhel XYB , tj. než konvexní úhel AYB . Konvexní úhel AYB je však vzhledem k části a) důkazu pravý. Konvexní úhel AXB je tedy větší než pravý úhel.*



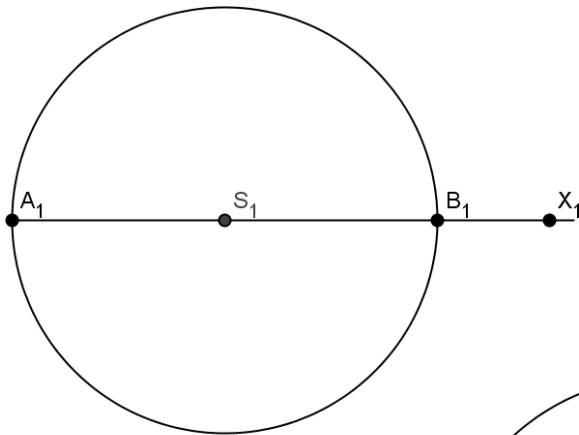
Obr.2



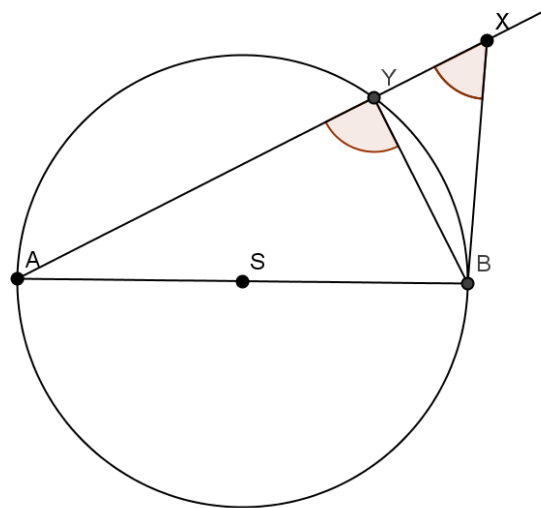
Obr.3

- *Nechť bod X patří vnější oblasti kružnice k . Jestliže bod X leží na přímce AB , pak úhel AXB zřejmě není pravý (obr.4). Neleží-li bod X na přímce AB , sestrojme bod Y , který je průsečíkem kružnice k s přímkou AX (obr.5). Konvexní úhel AYB je vzhledem k části a) důkazu pravý. Tento úhel je vnějším úhlem trojúhelníku XYB a konvexní úhel YXB ,*

tj. konvexní úhel AXB , je tedy menší než pravý úhel AYB .



Obr. 4



Obr. 5

Z výše uvedeného plyne, že platí: *Neleží-li bod X na kružnici k s průměrem AB , pak konvexní úhel AXB není pravý. Platí tedy : **Jestliže je úhel AXB pravý, pak bod X patří množině M , tj. leží na kružnici k s průměrem AB , $X \neq A$, $X \neq B$** – což jsme měli dokázat.*

Závěr: Množinou M vrcholů všech pravých úhlů v rovině, jejichž ramena procházejí dvěma danými různými body A, B , je kružnice s průměrem AB s výjimkou bodů A, B . Tuto množinu nazýváme **Thaletovou kružnicí**.