

Kartézský součin množin, binární relace, zobrazení.

Kartézský součin množin A, B je množina, ozn. $A \times B$, která se skládá ze všech uspořádaných dvojic, jejichž první složkou je prvek množiny A a druhou složkou prvek množiny B.

Binární relace z množiny A do množiny B je kterákoliv množina R, která je podmnožinou kartézského součinu $A \times B$.

(Pokud $A = B$, pak mluvíme o **binární relaci v množině A** – a jde o libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times A$.)

Doplňková relace R' k relaci R v množině A je množina všech uspořádaných dvojic z $A \times A$, které nepatří do relace R, tj. $R' = (A \times A) - R$.

Inverzní relace R^{-1} k relaci R v množině A je relace $R^{-1} = \{[x,y] \in A \times A; [y,x] \in R\}$

První obor relace $O_1(R)$ je množina všech prvních složek uspořádaných dvojic z relace R.
Druhý obor relace $O_2(R)$ je množina všech druhých složek uspořádaných dvojic z relace R.

Relace R z množiny A do množiny B se nazývá **zobrazením z A do B**, právě když ke každému prvku $a \in A$ existuje nejvýše jeden prvek $b \in B$ takový, že platí $[a,b] \in R$.
(Tedy každý prvek z množiny A se může vyskytnout jako první složka uspořádané dvojice v relaci R nejvýše jednou.)

Jestliže $[a,b] \in R$, pak prvek a nazýváme **vzorem** prvku b a prvek b **obrazem** prvku a v zobrazení R (nebo že zobrazení R přiřazuje prvku a prvek b).

Příklad:

Jsou dány množiny A, B: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Rozhodněte, které z binárních relací $R_1 - R_5$ jsou zobrazení z A do B.

$R_1 = \{[a,1], [b,2], [d,3]\}$ - je zobrazení

$R_2 = \{[a,1], [c,1], [a,2], [b,3]\}$ - není zobrazení - prvek a je 1. složkou ve dvou dvojicích

$R_3 = \{[a,1], [b,2], [c,3], [d,1]\}$ - je zobrazení

$R_4 = \{[b,3]\}$ - je zobrazení

$R_5 = \{[a,2], [c,1], [d,2], [b,3]\}$ - je zobrazení

Typy zobrazení:

Podle toho, jaký je vztah mezi prvním oborem relace R a množinou A a druhým oborem relace R a množinou B , rozlišujeme:

zobrazení celé množiny A na necelou množinu B , je-li $O_1(R) = A$ a $O_2(R) \neq B$,
(tzn. každý prvek z A je vzorem a v B existuje aspoň jeden prvek, který není obrazem žádného prvku z A),

zobrazení necelé množiny A na celou množinu B , je-li $O_1(R) \neq A$ a $O_2(R) = B$,
(tzn. v A existuje prvek, který není vzorem žádného prvku z B a každý prvek z B je aspoň jednou obrazem nějakého prvku z A)

zobrazení necelé množiny A na necelou množinu B , je-li $O_1(R) \neq A$ a $O_2(R) \neq B$,
(tzn. v A existuje prvek, který není vzorem žádného prvku z B a v B existuje aspoň jeden prvek, který není obrazem žádného prvku z A)

zobrazení celé množiny A na celou množinu B , je-li $O_1(R) = A$ a $O_2(R) = B$.
(tzn. každý prvek z A je vzorem a každý prvek z B je aspoň jednou obrazem nějakého prvku z A)

Každé z uvedených typů zobrazení může být navíc **prosté zobrazení**:

Zobrazení R z A do B se nazývá **prosté**, právě když každé dva různé vzory mají různé obrazy. (Jinak řečeno: Zobrazení je prosté, právě když relace inverzní R^{-1} je zobrazením z B do A)

Prosté zobrazení celé množiny na celou množinu se nazývá **vzájemně jednoznačné zobrazení**.

Říkáme, že dvě **množiny** jsou **ekvivalentní**, právě když existuje aspoň jedno prosté zobrazení (=vzájemně jednoznačné zobrazení) jedné z těchto množin na druhou.

Cvičení:

1. Rozhodněte přesně o typu jednotlivých zobrazení ve výše uvedeném příkladu včetně toho, zda jsou prostá .
2. Zapište několik zobrazení z množiny M do množiny N tak, abyste na nich mohli ilustrovat jednotlivé typy zobrazení. $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \{x, y, z, u, v\}$.
3. Uvažujte množinu všech cestujících v jisté tramvaji, množinu všech sedadel v této tramvaji a binární relaci určenou vztahem „Osoba X sedí na sedadle Y “. Přemýšlejte o různých situacích v této tramvaji (např. Každý cestující sedí na jednom sedadle a ještě jsou dvě místa volná.) a rozhodněte, zda se jedná o zobrazení z množiny cestujících do množiny sedadel. Pokud ano, určete přesně typ tohoto zobrazení.
4. Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou některé z množin ve výše uvedeném textu ekvivalentní?
5. Přesvědčte se o tom, že množina N všech přirozených čísel ($N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$) je ekvivalentní s množinou S všech sudých čísel ($S = \{2, 4, 6, \dots\}$).