Kapitola 1

Délka úsečky, velikost úhlu

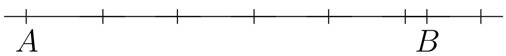
1.1 Délka úsečky a axiomy spojitosti

V předcházející kapitole jsme zavedli pojem shodnosti úseček a seznámili jsme se s tím, že tento pojem nám umožňuje porovnávat úsečky, definonovat grafický součet a rozdíl úseček a násobek úsečky. Tyto pojmy jsou východiskem pro měření úsečky. Cílem měření úsečky je určení její délky, tj. stanovení čísla, které vyjadřuje, kolikrát je daná úsečka větší (nebo menší) než jistá, pevně zvolená, tzv. ***jednotková úsečka***. Délkou jednotkové úsečky přitom rozumíme číslo 1. Při měření úsečky tedy zjišťujeme, jakým násobkem jednotkové úsečky je daná úsečka. Je zřejmé, že tento násobek nemusí být celočíselný.

Při měřené úsečky v praxi postupujeme zpravidla tak, že na měřenou úsečku nanášíme postupně od jednoho jejího krajního bodu úsečku jednotkovou. Může se stát, že měřená úsečka je celočíselným násobkem jednotkové úsečky.
Na obr. 1.1 je délka úsečky $AB =$ 5cm při jednotkové úsečce o délce 1cm.

Obr. 1.1

Není-li měřená úsečka celočíselným násobkem úsečky jednotkové, můžeme její délku vyjádřit buď přibližně nebo postupovat dál tak, abychom její délku určili přesně nebo alespoň přesněji. Označme délu úsečky AB symbolem $|AB|$.[1] Pak pro úsečku AB na obr. 1.2 platí: $5 < |AB| < 6cm$. Délka 5cm se nazývá dolní mez, délka 6cm se nazývá



Obr. 1.2

horní mez délky úsečky AB. Délku úsečky AB na obr. 1.2 můžeme vyjádřit přibližně takto $|AB| \doteq 5cm$.

[1]Ve starší literatuře se užívá pro označení délky úsečky zápis $d(AB)$.

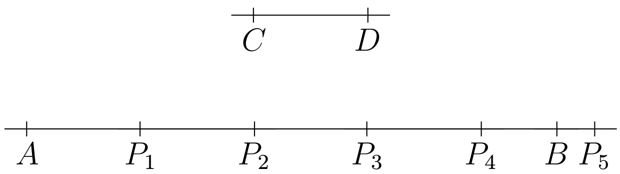
Chceme-li délku úsečky vyjádřit přesněji, užijeme místo jednotkové úsečky 1cm úsečku o délce rovné $\frac{1}{10}$ původní jednotkové úsečky, tj. 1mm. Zjistíme například, že $|AB| = 5,3$ nebo $5,3 < |AB| < 5,4cm$.

Nastane-li druhý případ, můžeme opět použít úsečku o délce rovné $\frac{1}{10}$ jednotkové úsečky 1mm, tj. $0,1mm$ a celý postup opakovat. Teoreticky je možné tento postup dále opakovat ve snaze docílit toho, aby bod B splynul přesně s některým koncovým bodem nanášené jednotkové úsečky. Podaří-li se to, pak je úsečka AB určitým r-násobkem jednotkové úsečky, přičemž r je racionální číslo.

Jak víme, nemusí být délka úsečky AB vyjádřena při dané jednotkové úsečce racionálním číslem. Například uhlopříčka čtverce s jednotkovou délkou $1cm$ má délku $\sqrt{2}cm$. V takovém případě nelze při určování délky úsečky AB docílit toho, aby bod B splynul při nanášení libovolně malého dílu jednotkové úsečky s některým jejím koncovým bodem. Říkáme, že úsečku AB nelze beze zbytku ***pokrýt*** nanášením jednotkové úsečky a jejích dílů. V těchto případech je délka úsečky vyjádřena číslem iracionálním.

Je-li délka úsečky AB vyjádřena při dané jednotkové úsečce racionálním číslem, říkáme, že úsečka AB a daná jednotková úsečka jsou souměřitelné. Není-li délka úsečky AB vyjádřena racionálním číslem, nazýváme tyto dvě úsečky nesouměřitelné. Z hlediska matematické teorie je důležitá odpověď na otázku, zda je možno při pevně zvolené jednotkové úsečce přiřadit každé úsečce jisté nezáporné číslo, které vyjadřuje její délku přesně, a naopak, zda je každé nezáporné reálné číslo délkou některé úsečky. Odpověď na tuto otázku je kladná. K důkazu tohoto tvrzení je však třeba zavést další skupinu axiomů ***axiomy spojitosti***. Axiomy spojitosti jsou dva, první se nazývá *Archimedův* axiom a druhý *Cantorův* axiom.

A: **(Archimedův axiom:) Nechť jsou dány dvě úsečky AB, CD. Na polopřímce AB sestrojíme navzájem různé body $P_1, P_2, P_3, \ldots$ tak, že $AP \cong P_1P_2 \cong P_2P_3 \cong \ldots \cong CD$. Potom existuje takové přirozené číslo n, že bod P_n už nepatří úsečce AB. Obr. 1.3.**



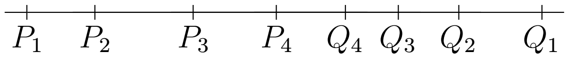
Obr. 1.3

Dříve než uvedeme druhý axiom spojitosti, je třeba se seznámit s pojmem ***posloupnost úseček do sebe zařazených***, který se v tomto axiomu vyskytuje.

Posloupnost úseček P_nQ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, z nichž každá následující je částí předcházející, se nazývá ***posloupnost úseček do sebe zařazených***.

Na obr. 1.4 je znázorněna posloupnost čtyř takový úseček P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, P_4Q_4. Platí $P_4Q_4 \subset P_3Q_3 \subset P_2Q_2 \subset P_1Q_1$.

C: **(Cantorův axiom:) Průnik posloupnosti úseček do sebe zařazených je neprázdný.**



Obr. 1.4

Užitím Archimédova axiomu se dá dokázat, že každé úsečce se dá při dané jednotkové úsečce přiřadit jisté nezáporné reálné číslo jako její délka. A užitím Cantorova axiomu lze dokázat, že každé nezáporné reálné číslo je při dané jednotkové úsečce délkou některé úsečky. Důkazy těchto tvrzení pro svoji rozsáhlost přesahují rámec tohoto textu a nebudeme je zde uvádět, budeme však dále počítat s jejich platností. Zvolíme-li tedy pevně jednotkovou úsečku a každé úsečce přiřadíme jisté nezáporné číslo jako její délku, je toto přiřazení *zobrazením množiny všech úseček na množinu všech nezáporných reálných čísel.* Toto zobrazení je funkcí a nazývá se ***míra úsečky***. Oborem funkce míra úsečky je množina všech úseček, oborem hodnot této funkce je množina všech nezáporných reálných čísel.

Označme M množinu všech úseček a f funkci míra úsečky. Tato funkce má následující vlastnosti:

1. Pro každou úsečku $x \in M$ je $f(x) \geq 0$.
2. Jsou-li $x, y \in M$ shodné úsečky, je $f(x) = f(y)$.
3. Je-li $x + y$ grafický součet úseček x, y, kde $x, y \in M$, je $F(x + y) = f(x) + f(y)$.

Funkční hodnoty uvedené funkce nazýváme *délky* nebo též *velikosti* jednotlivých úseček a jak již bylo uvedeno místo $f(AB)$ píšeme $|AB|$ pro označení délky úsečky AB.

1.2 Vzdálenost bodů, přímek a rovin

Délka úsečky nám umožňuje definovat vzdálenost dvou bodů.

Definice 1.1 ***Vzdáleností dvou bodů*** X, Y nazýváme délku (velikost) úsečky XY.

Vzdálenost dvou bodů je základem pro určení vzdálenosti libovolných dvou geometrických útvarů. Následující definicí zavedeme pojem vzdálenosti bodu od přímky, pojem vzdálenosti bodu od roviny, vzdálenosti dvou přímek, vzdálenosti přímky a roviny a vzdálenosti dvou rovin. V definici 1.2 je zahrnuta j vzdálenost dvou bodů.

Definice 1.2 ***Vzdáleností geometrických útvarů*** U_1, $U_2 \in M$ rozumíme délku (velikost) nejmenší úsečky XY, kde $X \in U_1$ a $Y \in U_2$. Značíme $|U_1U_2|$.

Z definice 1.2 je zřejmé, že vzdálenost dvou útvarů U_1, $U_2 \in M$, které mají neprázdný průnik, je rovna 0.