Fyzikální praktikum I

(Úvod do praktických cvičení z fyziky)

- Bezpečnost práce v laboratoři
- Metody měření
- Chyby měření
- Metody zpracování výsledků měření
- Měření zákl. fyz. veličin
- Základní měřicí přístroje, jejich vlastnosti
- Forma a obsah protokolů
- Organizace práce ve fyz. praktiku

Podmínky pro udělení zápočtu :

Laboratorní řád:

1. Svrchní oděv a tašky se odkládají v místech k tomu určených
2. V místnostech praktika je třeba zachovávat klid, pořádek a dbát všech upozornění asistenta. Není dovoleno jíst a kouřit.
3. Na každou úlohu řádná teoretická příprava je přezkušována. Pokud je nedostatečná, není měření uznáno.
4. Každý je povinen absolvovat všechny předepsané úlohy.
5. Protokoly o vypracovaných úlohách je třeba odevzdat do měření další úlohy.
6. Přípravu k úloze a výsledky měření si zaznamenává každý do pracovního sešitu. Po měření je potřeba jej předložit vedoucímu praktika k podpisu.
7. Zjištěné závady na přístrojích je třeba hned ohlásit.
8. Elektrické přístroje je možno zapojit až po souhlasu asistenta.

Měřicí prostředek - přístroj

Forma s jakou je měření uspořádáno ozn. jako metodu měření (měřicí metoda)

Požadavky na měření:
- reprodukovatelnost
- správnost
- přesnost

2. Bezpečnost práce v laboratoři

3. CHYBY MĚŘENÍ

Při každém měření se dopouštíme chyb. Např. při opakovaném měření dostáváme různé hodnoty. Měřené veličině přísluší však jediné správná hodnota x (za daných podmínek). Chyby jsou nutným následkem nedokonalosti smyslů, nepřesnosti přístrojů, nemožnosti splnit zcela přesně jisté podmínky měření, interakce přístroje z měřeným objektem, přičemž jako chybu obecně označujeme odchylku naměřené hodnoty x' od správné hodnoty.

Tj. $\quad \overset{\text{správná}}{} \Delta x = x - \underset{\text{naměřená}}{x'}$ (1)

Chybu (stanovenou) definovanou podle vztahu (1) ozn. jako absolutní chybu. $[\Delta x] \equiv [x]$
stejné jednotky v SI

Přesnost měření často hodnotíme relativní chybou

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} \quad \text{(bezrozměrné)} \qquad (2)$$

často v % $\quad \delta x = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\,\%$

Výsledek měření je třeba vždy udat s příslušnou chybou

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) \qquad (3)$$

např. $\quad l = (2{,}48 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-3}\ \text{m}$

Výsledek udáváme na takový počet platných míst, aby poslední pl. m. odpovídalo platnému místu chyby (udává se na 1, max. 2 pl. m.)

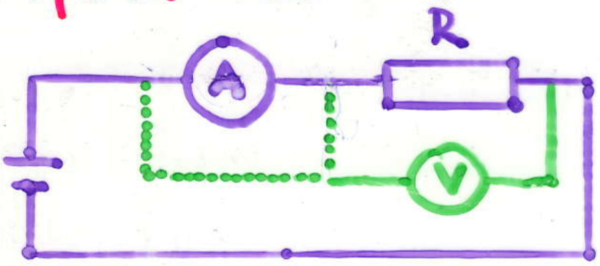
Rozdělení chyb:

- hrubé (omyly)
- soustavné (systematické)
- náhodné

2.1. Systematické chyby

zkreslují výsledek měření s jistou pravidelností, lze vyloučit nebo silně omezit

a) Chybná metoda



$? \quad R = \frac{U_V}{I_A}$

b) Chybná metoda vyhodnocení

Doba kmitu mat. kyvadla

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ platí jen pro $\varphi \lesssim 5^\circ$

↳ $\sin\varphi \doteq \varphi$ (v rad)

c) Chybně stanovené podmínky měření

$l = l_0(1+\alpha t)$

chyba Δt vnese chybu $\Delta l = \alpha l_0 \Delta t$ i když délka l je měřena správně

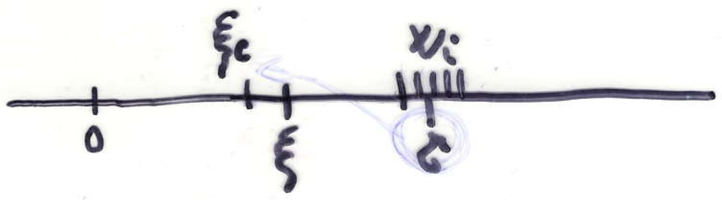
d) chyby přístrojů

e) osobní chyby pozorovatele

2.2. Chyby nahodilé

- nemají pravidelný charakter
- opakovaná měření se od sebe liší bez přesné příčiny, mohou působit různé vlivy - kolísání t, p, Hz, ...
  různá poloha pozorovatele, ...
- lze je zpracovat na základě statistických zákonitostí
- výsledek měření může stanovit nejpravděpodobnější hodnotu fyz. veličiny z velkého počtu měření
- je známo, že
  1) Malé chyby se vyskytují častěji než velké.
  2) Při nekonečně velkém počtu měření je součet nahodilých chyb (i se znaménkem) roven nule.

základní pojmy statistiky:



ξ - správná hodnota

ξ_c - konvenčně pravá hodnota (vztažná)

x_i - výsledek i měření

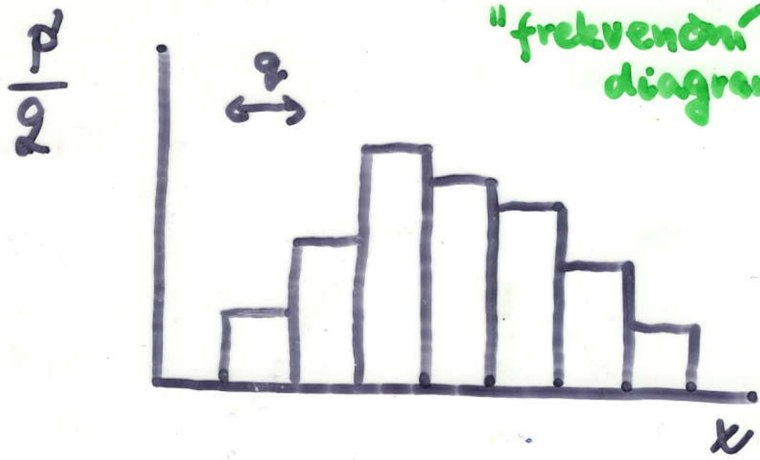
ζ - poloha zákl. souboru

po opravě $\xi_c \rightarrow \zeta$

$$P'_{x_i} = \frac{\text{počet výsl. ležících v daném int.}}{\text{počet všech výsledků}}$$

= relativní četnost

$\frac{p'}{\Delta}$ – hustota rel. četnosti



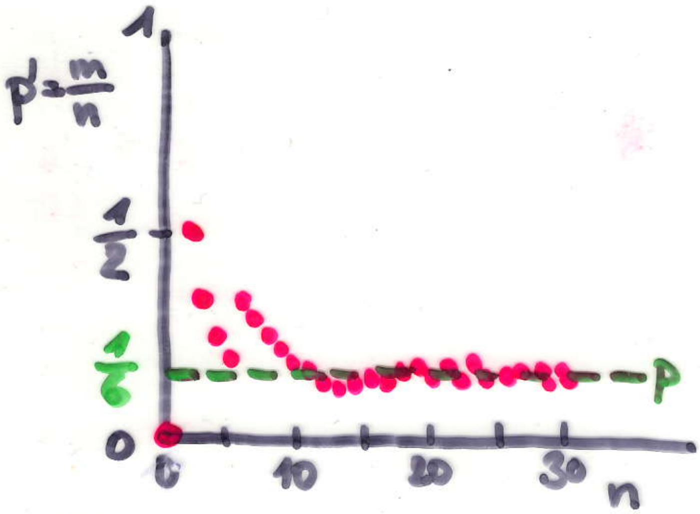
"frekvenční diagram"

Pravděpodobnost $p = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{m}{n}$ (4)

n – počet pokusů

m – počet výsledků jmen. jevu

Př. Hod kostkou – padne 6



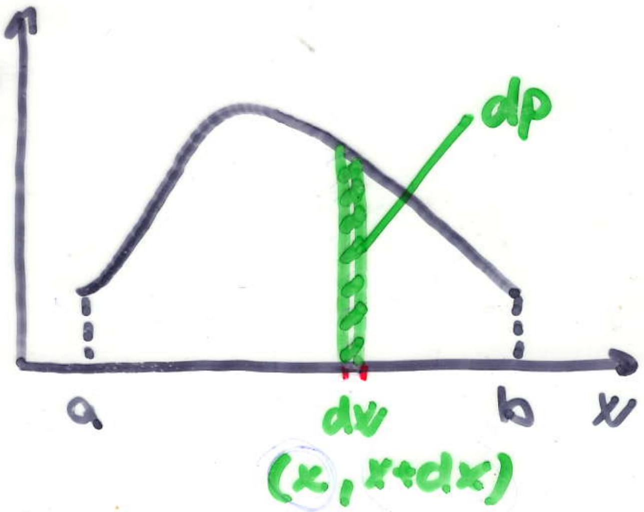
Jistota: $p = 1$

spojitá veličina

"rozdělení"

hustota pravděpodobnosti

$$p(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ 2\to 0}} \frac{p}{2} \qquad (5)$$



Pravděpodobnost dP, že hodnota náhodně vybraného měření leží v intervalu dx (x, x+dx)

$$dP = p(x)\cdot dx \qquad (6)$$

Normování

$$\sum_{i=1}^{N} p_{x_i} = 1 \qquad \int_a^b p(x)\,dx = 1 \qquad (7)$$

(a, b) – def. obor veličiny x.

Místo rozdělení často stačí tzv. popisné míry (empirické rozdělení ≙ teoretické rozdělení)

tj. míra umístění (poloha) souboru
míra rozptylu (disperze)

Umístění charakterizujeme nejlépe pomocí střední hodnoty $\mathcal{E}(x)$

(8) $$\mathcal{E}(x) = \sum_{i=1}^{N} p_{x_i} x_i \qquad \mathcal{E}(x) = \int_a^b p(x)\, x\, dx$$

Rozptyl (disperze) je definován

(9) $$\mathcal{D}(x) = \sum_{i=1}^{N} (\mathcal{E}(x) - x_i)^2 p_{x_i} \qquad \mathcal{D}(x) = \int_a^b (\mathcal{E}(x) - x)^2 p(x)\, dx$$

Lze ověřit, že $\mathcal{D}(x) = \mathcal{E}(x^2) - \mathcal{E}^2(x)$ (10)

Často polohu souboru určujeme pomocí aritmetického průměru

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{M} x_i}{M} \qquad (11a)$$

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{M} x_i}{M} = \sum_{i=1}^{M} \frac{x_i}{M} = \sum_{j=1}^{N} x_j \frac{m_j}{M} = \sum_{j=1}^{N} x_j P'_{x_j} \qquad (11b)$$

m_j – počet možných výsl.

P'_{x_j} – rel. četnost

z (9), (11)

Výběrový rozptyl okolo stř. hodnoty

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\mathcal{E}(x) - x_i)^2}{N} \qquad (12)$$

$E(x)$ - neznáme $\rightarrow D$?

odchylka ε_k hodnoty x_k od $E(x)$

$$\varepsilon_k = x_k - E(x) \qquad (13)$$

odchylka Δ_k od aritm. průměru $\hat{x}$

$$\Delta_k = x_k - \hat{x} \qquad (14)$$

z (13), (14)

$$\varepsilon_k - \Delta_k = \hat{x} - E(x) \qquad (15)$$

Pak

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \Delta_k}_{=0} = n\left(\hat{x} - E(x)\right) \qquad \Big/ \sum_{i=1}^{n} \qquad (16)$$

z (15)(16)

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = n\left(\varepsilon_k - \Delta_k\right) \qquad (17)$$

Tj.

$$\Delta_k = \varepsilon_k - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \qquad \Big/ ^2, \sum_k \qquad (18)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 + \underbrace{\frac{n}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_i\right)^2 - \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\right)}_{\text{malé - výsledky } +,- \text{ hodnot}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 + \underbrace{2\sum_{i}^{n}\sum_{k}^{n} (\varepsilon_i \varepsilon_k)_{k>i}}_{\text{lze zanedbat}}\right) \qquad (19)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2\right) \qquad (20)$$

tedy $\sum_{k=1}^{n} \Delta_k^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2$ $\qquad \sum \varepsilon_k^2 = \frac{n}{n-1} \sum \Delta_k^2$ (21)

a z (12) rozptyl $D = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{x} - x_i)^2}{n-1}$ (22)

Standartní (směrodatná) odchylka

$$s = \sqrt{D} \qquad (23a)$$

resp.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i (\hat{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

tj. stř. kv. chyba jednoho měření v rámci zákl. souboru.

2.3. Modelová rozdělení

Normální (Gaussovo) rozdělení

Hypotéza elementárních chyb:

1. Při každém měření – m nezávislých náhodných vlivů
2. Každý z vlivů dává vznik elem. chybě + nebo – d
3. Pravděpodobnost chyby +d je $\frac{1}{2}$, –d taky $\frac{1}{2}$

Dále předp. $\varepsilon_i = x_i - \vartheta$ (24)

m – celk. počet vlivů $\quad$ l – počet vlivů → k –d chybě

$$\varepsilon_l = (m-l)d - ld \qquad (25)$$

$$\varepsilon_\ell = (m - 2\ell)d \qquad (26)$$

m			celk. počet příp.
1	$+d$ $-d$	1 1	2
2	$++$ $+-$ $-+$ $--$	1 2 1	2^2
3			
⋮			
m		$\binom{m}{\ell}\cdot\varepsilon_\ell$	2^m

Počet výskytů chyby ε_ℓ podle (26)

kombinace

$$\binom{m}{\ell} = \frac{m(m-1)\ldots(m-\ell+1)}{\ell!} \qquad (27)$$

Rel. četnost

$$P_{\varepsilon_\ell} = \frac{\binom{m}{\ell}}{2^m} \qquad (28)$$

Protože $\binom{m}{\ell} = \binom{m}{m-\ell}$ je rozdělení symetrické

Vezmeme sudý počet vlivů . tj $m = 2k$, ozn. $s = k - \ell$

Pravděp. nulové chyby

$$P_0 = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \qquad (29)$$

resp

$$P_\varepsilon = \frac{\binom{2k}{k+s}}{2^{2k}} \qquad (30)$$

Dá se ukázat, že

$$\ln \frac{P_\varepsilon}{P_0} = -\frac{s^2}{k} \qquad (31)$$

tj

$$P_\varepsilon = P_0\, e^{-\frac{s^2}{k}} \qquad \text{protože} \quad \varepsilon = 2sd \qquad (32)$$

Pro hustotu četnosti

$$\frac{P_\varepsilon}{2d} = \frac{P_0}{2d}\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{4d^2k}} \qquad (33)$$

Podle (5) provedem $k \to \infty$, $d \to 0$

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ d\to 0}} 4kd^2 = \text{konst} = 2\sigma^2 \qquad (34)$$

σ – význam níže

Pak

$$p(\varepsilon) = p(0)\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} \qquad (35)$$

Musí platit

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1 \qquad (36)$$

(37) $$p(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}\, d\varepsilon = 1$$

subst.: $t = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\,\sigma}$

Laplaceův i.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

tj.

$$p(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \qquad (38)$$

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}} \qquad (39)$$

Podle je

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \qquad (40)$$

| subst. $x_1 = \frac{x-\mu}{\sigma}$

→ Laplac. i

$$\Rightarrow \quad E(x) = \mu \qquad (41)$$

Analog.

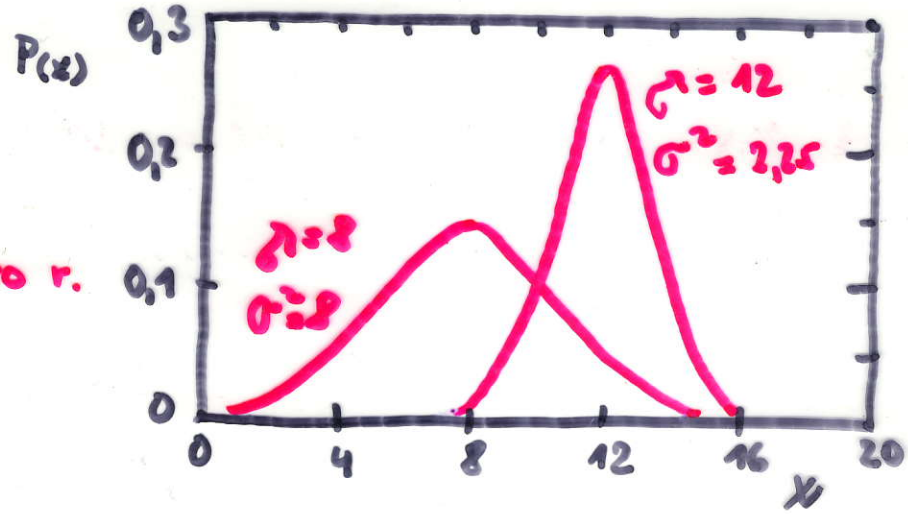
$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \qquad (42)$$

$$D(x) = \sigma^2 \qquad (43)$$

Vezmeme-li $\mu = 0$

$$P(x) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{k\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx \qquad (43)$$

Gaussovo r.



Poissonovo rozdělení

udává pravděpodobnost toho, že za daný časový interval proběhne r událostí

$$P_r = \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu} \qquad (44)$$

Dá se dodat, že

$$E(x) = D(x) = \mu \qquad (45)$$

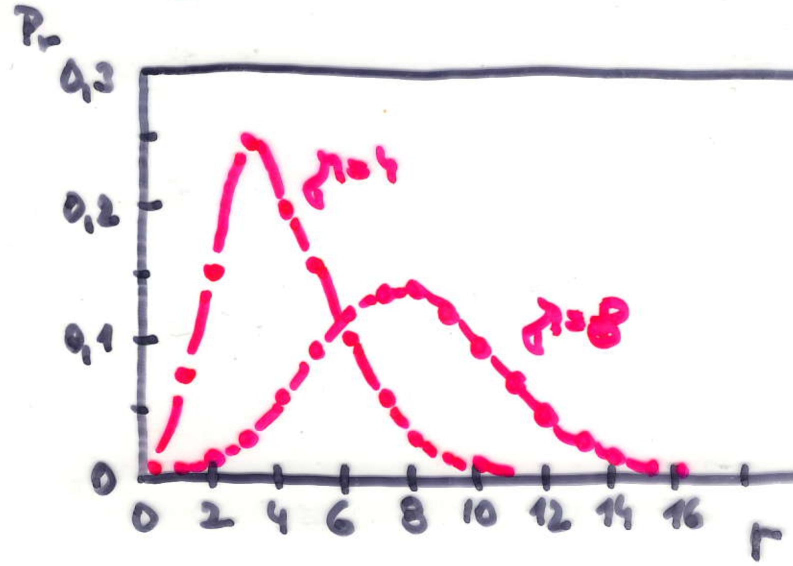
Předp.:

1. To zda událost proběhne nezáleží na předchozí historii

2. Pravděpodobnost výskytu jedn. události roste s délkou časového intervalu

3. Pravděp. dvou resp. více událostí ve stejném čas. okamžiku = 0

např. při detekci jaderného záření (G-M počítače)



Studentovo rozdělení

W. Gosset 1908

Pro Gaussovo rozdělení potřebujeme znát 2 parametry μ, σ z velkého počtu měření ($n \to \infty$)

Pro Studentovo rozdělení stačí 1 parametr

ν - tzv. počet stupňů volnosti

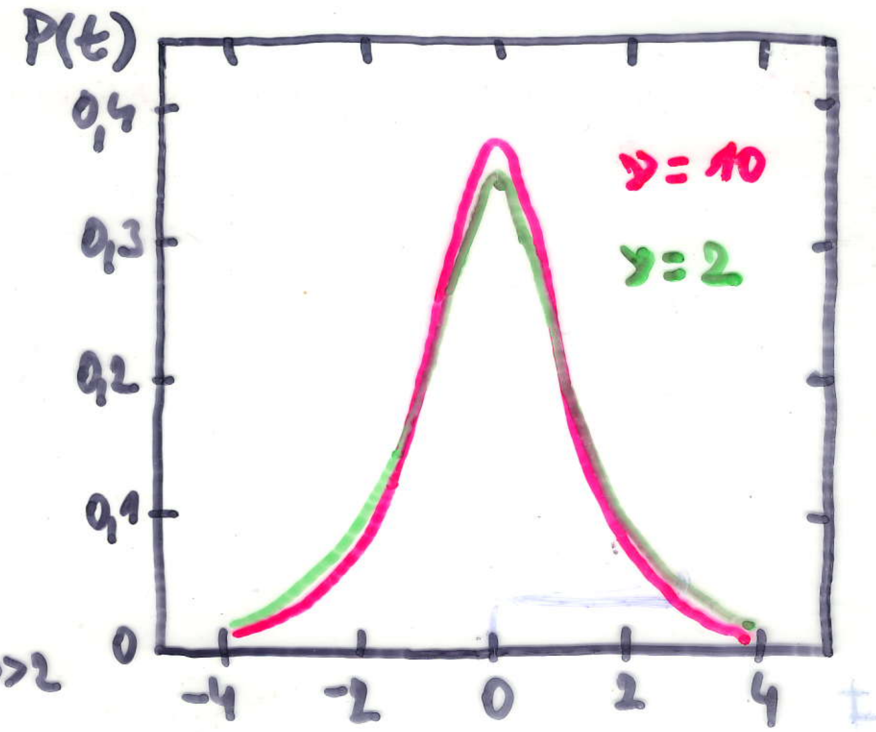
přičemž $\nu = n-1$ kde n je počet měření.

Proměnnou vystupující ve St. rozdělení

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s\sqrt{n}} \qquad (46)$$

Hustota pravděpodobnosti pak

$$P_\nu(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad (47)$$



Pro n > 30 se Studentovo rozdělení nahrazuje normálním rozdělením.

$$E(t) = 0$$

(48) $$D(t) = \frac{\nu}{\nu-2} \qquad \nu > 2$$

Γ- funkce

def. $$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1}\, dt$$

nebo $$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

zákl. vl. $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad n\text{- celé kl. číslo}$$

2.4. Posouzení přesnosti měření

chyba jednoho měření pro n provedených měření, tj. pro n hodnot základního souboru.

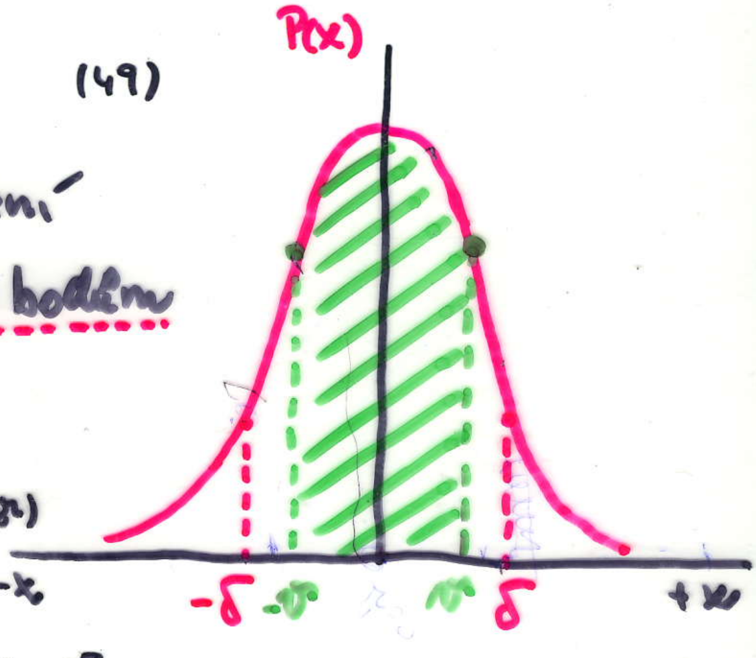
směrodatná odchylka ↔ střední kvadratické chyba δ

$$\delta^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2\right) \qquad (48)$$

Podle (21) $\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n} = \frac{\sum \Delta_k^2}{n-1}$

$$\text{tj } \delta^2 = \frac{\sum \Delta_k^2}{n-1} \qquad (49)$$

δ - pro Gaussovo rozdělení odpovídá inflexním bodům



$$\frac{dP(x)}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \cdot -\frac{1}{2\sigma^2} 2(x-\bar{x})$$

$$\frac{d^2P(x)}{dx^2} = \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \left[-\frac{x-\bar{x}}{2\sigma^2} 2(x-\bar{x}) + 1\right] = 0$$

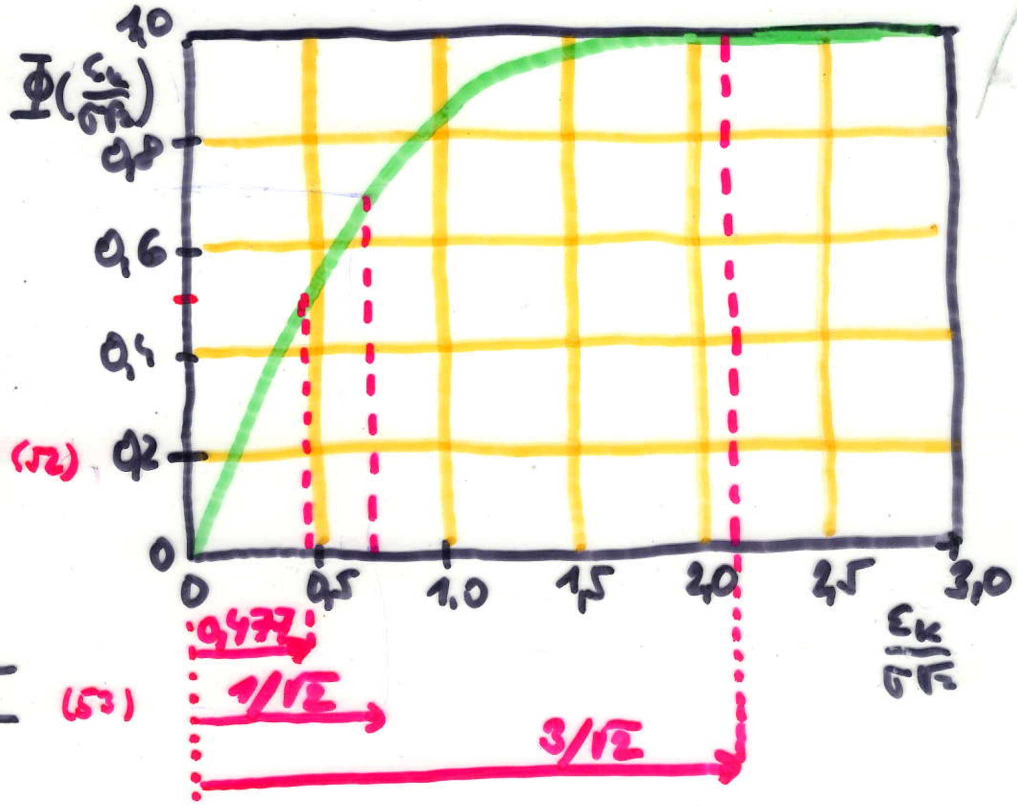
tj $(x-\bar{x})^2 = \sigma^2$

Pravděpodobná chyba ϑ - polovina měření má chybu větší a polovina menší chybu než je ϑ.

$$\int_{-\vartheta}^{\vartheta} p(x)\,dx = \frac{1}{2} \qquad (50)$$

Tento tzv. **integrál chyb** se dá vyjádřit řadou

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon_n}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} p(x)\,dx \qquad (51)$$



z grafu

$$\frac{\delta}{\vartheta} = 1{,}4827 \doteq \frac{3}{2} \qquad (52)$$

Pak

$$\vartheta = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\sum \Delta_n^2}{n-1}} \qquad (53)$$

Průměrná chyba λ je def:

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i| \qquad (54)$$

$$\lambda = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_n|\,dn = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_n|\,p(x)\,dx = \dots = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \doteq 0{,}8\,\delta \qquad (55)$$

Krajní chyba $\varkappa$ je definována

$$\boxed{\varkappa = 3\delta} \qquad (56)$$

Název a význam vyplývá z grafu "integrálu chyb"

$$\Phi\left(\frac{\varkappa}{\delta\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{3\delta}{\delta\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}9973 \qquad (57)$$

tj. méně než 0,3% chyb jednotlivého měření může tuto chybu překročit.

Celkem tedy

$$\vartheta : \lambda : \delta : \varkappa = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} : 1 : 3$$

Praktický výpočet

z (54) $$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_i| \overset{(31)}{=} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\frac{\sum|\Delta x|}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}|\Delta x_k|}{\sqrt{n(n-1)}} \qquad (58)$$

$$\sqrt{n(n-1)} \doteq n - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lambda \doteq \frac{2\sum_k \Delta_k^{+}}{n-\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\delta \doteq \frac{5}{4}\lambda = \frac{5}{2}\,\frac{\sum|\Delta|}{2n-1}}$$

$$\boxed{\vartheta \doteq \frac{2}{3}\delta = \frac{5}{3}\,\frac{\sum|\Delta|}{2n-1}}$$

$$\boxed{\varkappa = 3\delta = \frac{15}{2}\,\frac{\sum|\Delta|}{2n-1}}$$

(59) chyba jednoho měření z n provedených měření

2.4. Zákon šíření chyb

Mějme aritmetické průměry $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_\ell$ přímo měřených veličin. Hodnotu nepřímo měřené veličiny $\hat{y}$ spočteme jako

$$\hat{y} = f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_\ell) \tag{60}$$

změna hodnoty y při malých změnách hodnot $x_1, \dots, x_\ell$ se dá vyjádřit jako

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_\ell} \cdot dx_\ell \tag{61}$$

Tento vztah platí i pro malé odchylky, tj:

$$\hat{y} - y_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\hat{x}_1 - x_{1i}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\hat{x}_\ell - x_{\ell i}) \Bigg/ \frac{{}^2 \sum_{i=1}^{n}}{n-1} \tag{62}$$

$$\frac{\sum^n (\hat{y} - y_i)^2}{n-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\sum^n (\hat{x}_1 - x_{1i})^2}{n-1} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_\ell}\right)^2 \frac{\sum^n (\hat{x}_\ell - x_{\ell i})^2}{n-1} \tag{63}$$

Porovnání s (23b):

$$\Delta_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \Delta_{x_1}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_\ell}\right)^2 \Delta_{x_\ell}^2} \tag{64}$$

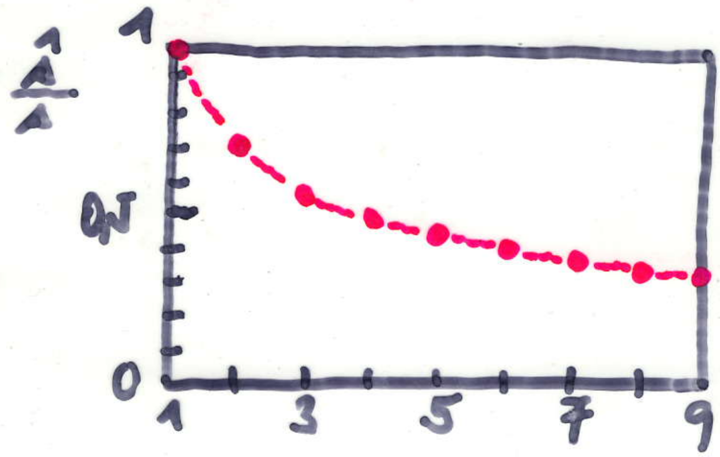
Pro aritmetický průměr odtud

$$\hat{\Delta}_x = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \Delta_x^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \Delta_x^2} = \frac{\Delta_x}{\sqrt{n}} \tag{65}$$

Provedeme přechod

$\hat{\Delta} \rightarrow \Delta$

střední chyba aritm. průměru $\sqrt{n}$ krát menší než chyba jednotlivého měření



Potom z (58), (59) a (65)

$$\left[\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \frac{\sum |\Delta_i|}{n\sqrt{n-1}} = \frac{2\sum \Delta^+}{n\sqrt{n-1}} \\ \hat{\delta} &= \frac{5}{2}\,\frac{\sum \Delta^+}{n\sqrt{n-1}} \\ \hat{\vartheta} &= \frac{5}{3}\,\frac{\sum \Delta^+}{n\sqrt{n-1}} \\ \hat{\varkappa} &= \frac{8\sum \Delta^+}{n\sqrt{n-1}} \end{aligned}\right. \qquad (66)$$

ze zákona šíření chyb (64) pro jednoduché případy měřených veličin dostáváme

1. $y = k\,x$ $\qquad \Delta y = k \cdot \Delta x$ $\qquad$ (67)
2. $y = x_1 \pm x_2$ $\qquad \Delta y \doteq \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2} \doteq \Delta x_1 + \Delta x_2$
3. $y = x^n$ $\qquad \Delta y = n \cdot \Delta x$

4. $y = x_1 \cdot x_2$

$y = \dfrac{x_1}{x_2}$

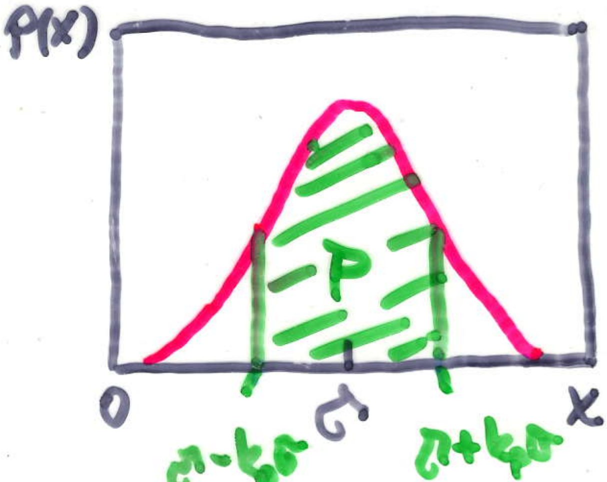
$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}$$

tj rel chyba výsl. vel. je dána součtem rel. chyb

2.5. Interval spolehlivosti

Na základě 1 měření chceme odhadnout polohu zákl. souboru μ. Aritmetický průměr $\hat{x} \to \mu$ pro $n \to \infty$. Určujeme interval v praxi – při malém počtu měření – ve kterém bude s velkou pravděpodobností (předem stanovenou) P ležet správná hodnota μ.

P – tzv. hladina spolehlivosti



Norm. rozdělení

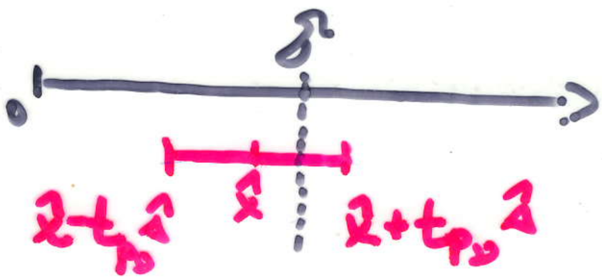
P	k_p
0,500	0,674
0,682	1,000
0,950	1,960
0,990	2,576

Pro menší počet měření (<30) používáme Studentovo rozdělení, interval spolehlivosti pak

$$\hat{x} - t_{P\nu}\,\hat{s} \le \delta \le \hat{x} + t_{P\nu}\,\hat{s}$$

kde t je dáno vztahem (46)

ν	$P = 0{,}500$ t	$P = 0{,}95$ t
1	1,000	12,7
2	0,816	4,303
3	0,765	3,182
4	0,741	2,776
5	0,727	2,571
6	0,718	2,447
7	0,711	2,365
8	0,706	2,306
9	0,703	2,262
10	0,700	2,228
15	0,691	2,131
20	0,687	2,086
25	0,684	2,060
30	0,683	2,042
∞		1,960



Test významnosti
(správnosti aritm. průměru)

Platí $t = \dfrac{\hat{x}-\delta}{\hat{s}}$ (46)

známe-li: $\hat{s}, t$ → vypočt. odchylku $\hat{x}$ od správné hodnoty. Při porovnání s tab. hodnotou lze zjistit zda v měření nejsou syst. či hrubé chyby

Mezní chyba měření $\hat{v}$

(68) $\hat{v} = t_{P\nu} \cdot \hat{s} + \Delta\vec{u}$

chyba přístroje

4. Fyzikální metody měření

(způsob, kterým je možno fyz. v. měřit)

přímé (z definice) $\rho = \frac{m}{V}$ ← změřím ← změřím

nepřímé (z jiného vztahu) např. z Archim. zákona

kap vzduch

$$\rho = \frac{\Delta z_1 - \sigma z_2}{z_1 - z_2}$$

vzduch kap.

absolutní (v def. jednotkách)

relativní (poměr hodnot dvou veličin)

rel. vlhkost $\frac{m_{H_2O}}{m_{H_2O\,nasyc.}}$

statické (veličiny časově neproměnné)

moment setrv. $J = \frac{1}{2} m r^2$ válec

dynamické (měřicí systém je v pohybu)

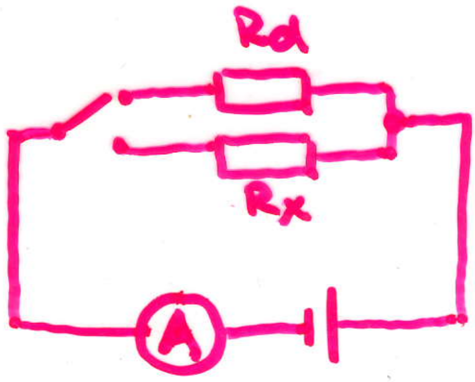
$$J = \left(\frac{\tau_0}{\pi}\right)^2 \cdot m g a$$

τ_0 - doba kyvu

a - vzdál. T. od osy otáč.

Dále se často i další spec. metody

a) substituční (měřená veličina se nahrazuje stejnorodými veličinami různé velikosti tak, aby se stav měřících přístrojů co nejméně lišil od stavu zjištěného pro měřenou veličinu.



sady etalonů (závaží, ladiček, odporů-dekády,...) takové, aby se daly sestavit celistvé násobky

1 ; 1, 1, 2, 5 ; 10, 10, 20, 50 ; 100, ...

1, 2, 2, 5 ; 10, 20, 20, 50 ; 100, ...

1, 2, 3, 4, 5 ; 10, 20, ...

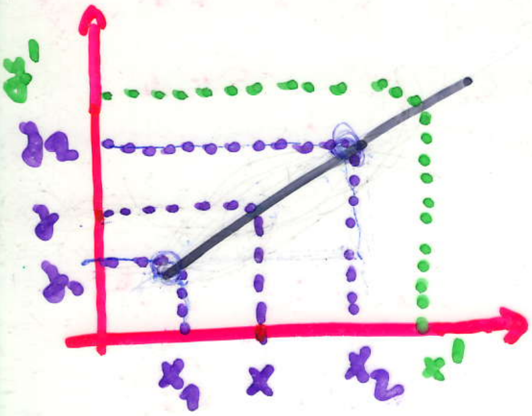
b) Kompenzační (Měřenou veličinu vyrovnáváme veličinou stejného druhu opačného znaménka)

např. vážení - jeden moment síly vyrovnáváme stejně velkým opačného znaménka

Podle výchylky přístrojů – m. nulová

– m. výchylková (částeč. komp.)

c) interpolační – (v metodách a), b) nemusíme dosáhnout výchylky přístrojů přesně. Provedeme 2 měření – jedno pro hodnotu nejbližší nižší, jedno pro nejvyšší.



$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\cdot(x_2 - x_1) \qquad (70)$$

(lin. interp.)

! Nemusí být vždy lin. (reverzní kyv.)

d) extrapolační (viz c), ale bod x' leží vně intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$) je méně přesné než c)

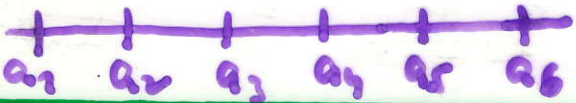
e) postupná m. (při měřeních, které na sebe navazují – koncová hodnota je výchozí hodnotou pro další měření) – pro ekvidistantní měření

$a_2 - a_1$
$a_3 - a_2$
$a_4 - a_3$
$a_5 - a_4$
$a_6 - a_5$

$(a_6 - a_1)\frac{1}{5}$

$a_6 - a_3$
$a_5 - a_2$
$a_4 - a_1$

$(a_6 + a_5 + a_4 - a_3 - a_2 - a_1)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$



f) obmezovací (zjednodušení měření a zpřesnění při možnosti dostatečného počtu opakování periodického děje)

Př. doba kyvu kyvadla

stopky ± 0,3 s $\qquad 10T = 11,8\ s$

$(11,8 - 0,3) < 10T < (11,8 + 0,3)\ s$

Pro 20 kyvů $\qquad 23 < 20T < 24,2\ s$

Bez počítání 1. dokončený kyv po 23 s je 20. zastavíme stopky např. 23,4 s

$23,1 < 20T < 23,7$

Pro ~~100.~~ 70 kyvů $\qquad 115,5 < 100T < 118,5$

$< T$

int. musí být $< T$

g) Další m. se používají pro specifická měření

5. Zpracování výsledků měření

a) grafické

Vyšetřujeme závislost jedné fyz. veličiny na druhé. T.j. hledáme funkci $y = f(x)$

Požadavky na graf:

a) dostatečná přesnost

b) využití celé plochy

Je-li $y = F(x_1, x_2)$, pak zakreslujeme soustavu křivek $F(x_2)_{x_{1_i} = konst}$

c) výrazné odlišení jednotlivých křivek

d) přesný popis grafu

Po vynesení experimentálních bodů jimi prokládáme hladkou křivku bez zbytečných zlomů, přibližně tak, aby stejný počet bodů ležel nad a pod křivkou.

e) stupnici volíme tak, aby závislost byla pokud možno lineární

(snadná interpolace, extrapolace)

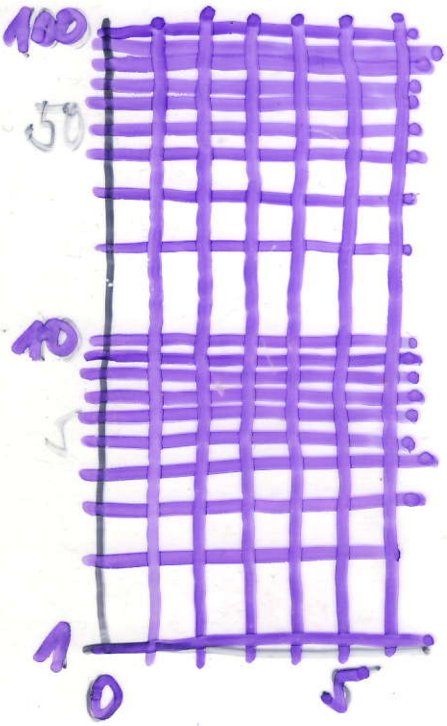
⇒ semilogaritmický, bilogaritmický papír

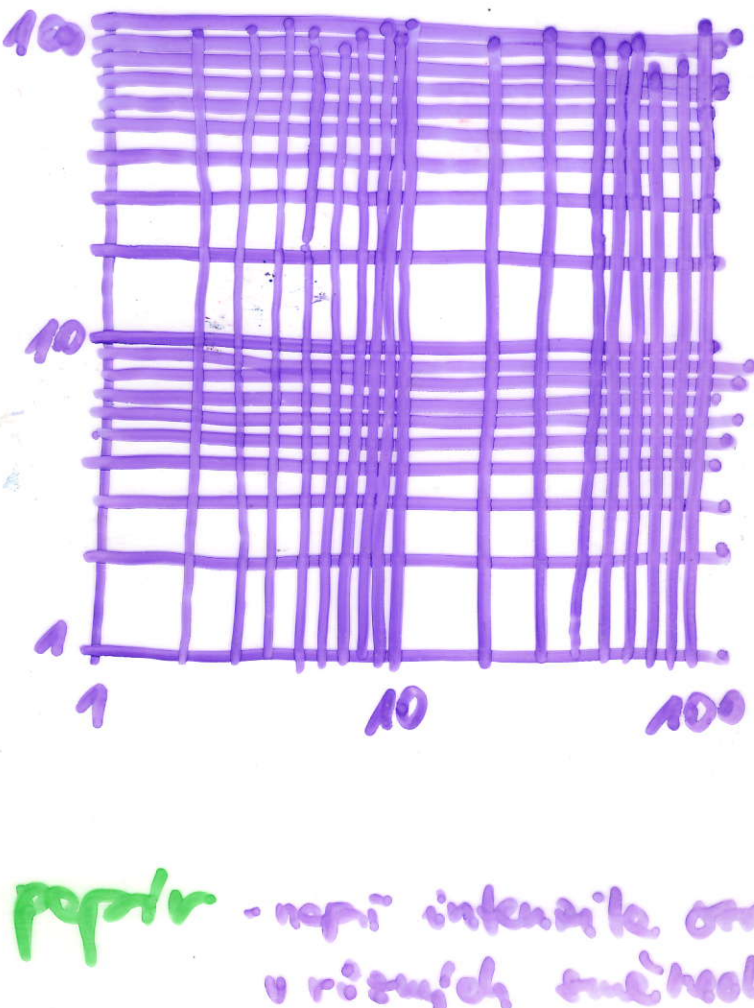
a) $y = a e^{kx}$ ⇒ $\log y = \log a + k \cdot \log e \cdot x$

$= \log y = \log a + k' \cdot x$

b) $y = a \cdot x^n$ ⇒ $\log y = \log a + n \cdot \log x$

$y = q + kx$



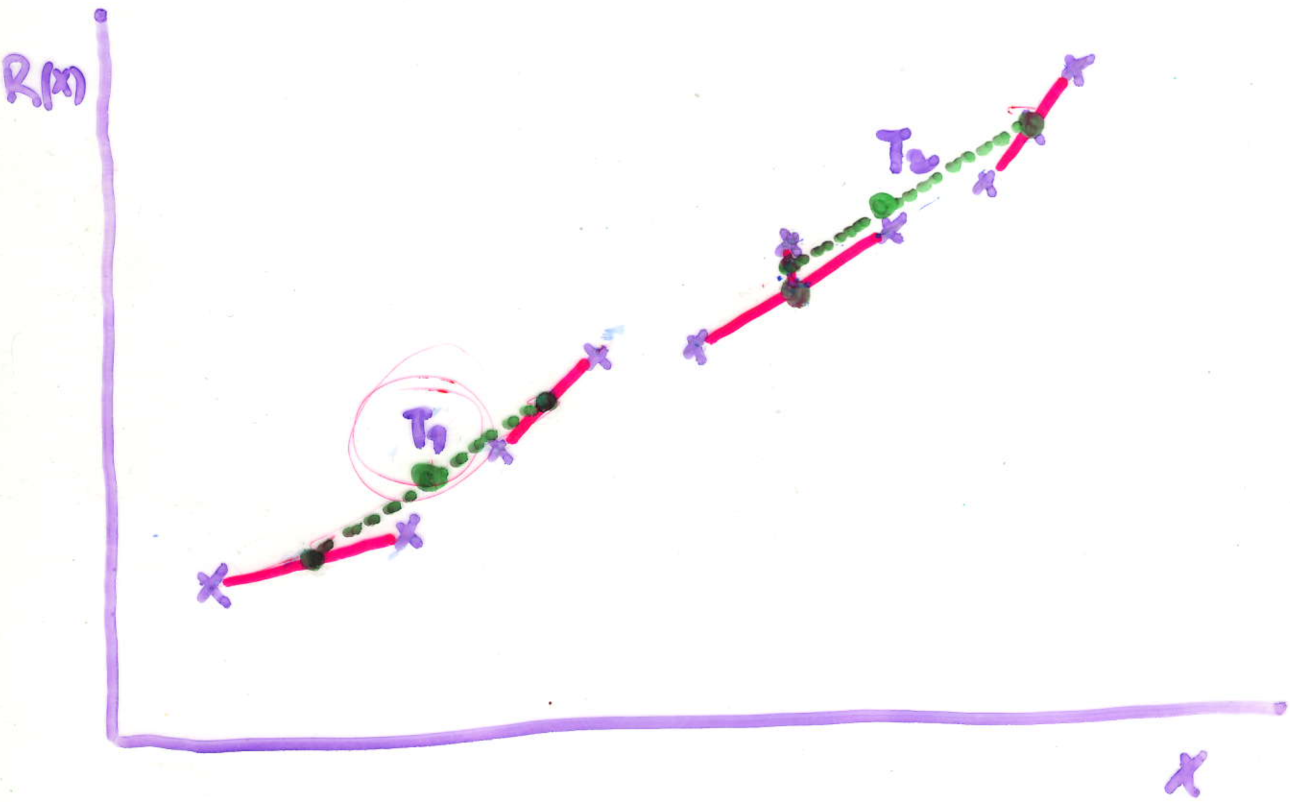


c) polární papír - např. intenzita zář. v různých směrech.

f) někdy zaznamenáváme i přesnost - úsečkami reprezent. chybu měření!

Grafická m. vyrovnání lin. závislosti (m. vážení)

- předp. že získ. závislost je přímková
- rozdělíme body na poloviny, atd. až hledáme těžiště - má k-násobnou váhu, pak hmotný střed dvou bodů rovné váhy dělí jejich vzdálenost v obráceném poměru jejich vah.



spojnice $T_1 - T_2$ určuje přímkovou závislost.

b) Numerické zpracování

1. Skupinová m.

a) Prokládání přímky

změřeno $[x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]$ přičemž

$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

Rozdělíme na 2 ~~půlky~~ zhruba tj. $n \doteq 2p$

Hledáme parametry přímky $y = kx + q$

Sestavíme rovnice:

$$\text{I. sk.} \begin{cases} y_1 = kx_1 + q + \Delta_1 \\ \vdots \\ y_p = kx_p + q + \Delta_p \end{cases}$$

odchylky měř. bodů od předp. přímkové záv.

$$\text{II. sk.} \begin{cases} y_{p+1} = kx_{p+1} + q + \Delta_{p+1} \\ \vdots \\ y_n = kx_n + q + \Delta_n \end{cases}$$

předp., že v obou skupinách je součet těchto odchylek nulový

$$\text{I.} \quad \sum_{i=1}^{p} y_i = \hat{k} \sum_{i=1}^{p} x_i + \hat{q} \cdot p \qquad (71)$$

$$\text{II.} \quad \sum_{i=p+1}^{n} y_i = \hat{k} \sum_{i=p+1}^{n} x_i + \hat{q}(n-p) \qquad (72)$$

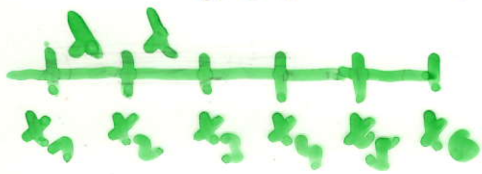
Řešením rovnic (71), (72) získáme $\hat{k}, \hat{q}$.

b) prokládání paraboly

→ určujme parametry pro $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ze 3 skupin rovnic

c) Postupná m.

měříme veličinu λ z rozdílu po sobě jdoucích a na sebe navazujících ekvidistantních hodnot $x_1, \dots, x_n$



$(n = 2k$ sudé$)$

pak
$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_{i+k} - x_i)}{k^2} \qquad (73)$$

2. Metoda nejmenších čtverců

Mějme n bodů o souřadnicích $[x_1, y_1], \dots$ $\dots [x_n, y_n]$, kde $x_1, \dots, x_n$ jsou přesně dané hodnoty (resp. měřené se zanedb. chybou), $y_1, \dots, y_n$ jsou hodnoty získané měřením. Předp. že mezi x a y platí funkční závislost $y = F(x)$. Ve skutečnosti však

$$y_i = F(x_i) - \Delta_i \qquad (74)$$

Funkce $F(x)$ obsahuje obecně $p < n$ neznámých konstant $b_1, \dots, b_p$ – tj. $y = F(x_i; b_1, \dots, b_p)$

(tzv. teoretická regresní funkce)

Za Nejpřesnější empirickou regresní funkci považujeme $F(x, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_p)$ takovou, pro kterou platí, že součet čtverců odchylek je nejmenší.

tj
$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - F(x_i; \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_p) \right]^2 = \sum \Delta_i^2 = \min \qquad (75)$$

(tzv. reziduální součet čtverců)

tedy podmínky pro minimum jsou dány

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{b}_j} = 0 \qquad j = 1, \dots, p \qquad (76)$$

odtud získáme pro odhady $\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_p$ soustavu tzv. normálních rovnic.

vyrovnání lineární závislosti $y = kx + q$

$$\begin{aligned} y_1 - (q + kx_1) &= \Delta_1 \\ &\vdots \\ y_n - (q + kx_n) &= \Delta_n \end{aligned} \qquad / \cdot^2 \Sigma \qquad (77)$$

$$S = \sum \left[y_i - (q + kx_i) \right]^2 = \sum \Delta_i^2$$

Podmínky (76) mají tvar

$$\frac{\partial}{\partial \hat{q}}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{q}-\hat{k}x_i)^2\right)=0 \qquad (78)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{q}-\hat{k}x_i)^2\right)=0 \qquad (79)$$

Odtud

(80) $$0=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{q}-\hat{k}x_i)=-2\left[\sum_{i=1}^{n}y_i-n\hat{q}-\hat{k}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i\right]$$

(81) $$0=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{q}-\hat{k}x_i)\cdot x_i=-2\left[\sum x_iy_i-\hat{q}\sum_{i=1}^{n}x_i-\hat{k}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]$$

Po úpravě z (80), (81)

$$\hat{q}=\frac{\sum x_i\sum x_iy_i-\sum x_i^2\sum y_i}{(\sum x_i)^2-n\sum x_i^2} \qquad (82)$$

$$\hat{k}=\frac{\sum x_i\sum y_i-n\sum x_iy_i}{(\sum x_i)^2-n\sum x_i^2} \qquad (83)$$

MNČ lze použít i pro prokládání závislosti ve tvaru polynomu

$$F(x;a_0,\dots,a_p)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_px^p$$

Z podmínky pro minimum (76) dostaneme normální rce tvaru:

(84)
$$n a_0 + \sum x_i a_1 + \dots \sum x_i^p a_p = \sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$\sum x_i a_0 + \sum x_i^2 a_1 + \dots + \sum x_i^{p+1} a_p = \sum x_i y_i$$
$$\sum x_i^2 a_0 + \sum x_i^3 a_1 + \dots + \sum x_i^{p+2} a_p = \sum x_i^2 y_i$$
$$\vdots$$
$$\sum x_i^p a_0 + \dots + \sum x_i^{2p} a_p = \sum x_i^p y_i$$

Ocenění přesnosti se provádí tzv. korelací. Označíme-li $\hat{y}_i$ hodnoty vypočtené na základě vypočtených parametrů $\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_p$. Pak tzv. index korelace

(85)
$$I_{yx} = \sqrt{\frac{\sum \hat{y}_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum \hat{y}_i\right)^2}{\sum y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y_i\right)^2}}$$

Čím víc se index korelace (pro lin. koef. kor.) $\to 1$, tím je regresní funkce vhodnější.

Stanovení stupně polynomu

a) Ekvidistantní měření

$$\begin{array}{lll} y_1 & & \\ & > \Delta_1^{(1)} & \\ y_2 & & > \Delta_1^{(2)} \\ & > \Delta_2^{(1)} & \\ y_3 & & \\ y_4 & & \\ \vdots & & \end{array}$$

Řád polynomu = řád diference, která zůstává ≐ konst

b) Neekvidist. m.

$$\begin{array}{lllll} x_1 & y_1 & & & \\ & & > \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \delta_1^{(1)} & & \\ x_2 & y_2 & & > \dfrac{\delta_2^{(1)} - \delta_1^{(1)}}{x_3 - x_1} = \delta_2^{(2)} & \\ & & > \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \delta_2^{(1)} & & \\ x_3 & y_3 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

Newtonův interpolační polynom (ekvid.)

ozn. $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = d$; $p = \dfrac{x_0 - x_i}{d}$

hledáme y_0 pro $x_0 \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$

(86) $$y_0 = y_i + \frac{p \cdot \Delta_i^{(1)}}{1!} + \frac{p(p-1)}{2!} \Delta_i^{(2)} + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} \Delta_i^{(3)} + \ldots$$

6. Základní měřicí přístroje, měření zákl. fyz. veličiny

Přístroje: $x^* \rightarrow A[\alpha(x^*)] = x$

- analogové / digitální

- citlivost $c = \frac{\Delta x}{\Delta x^*}$

- reversibilita $x = \frac{x\uparrow + x\downarrow}{2}$

- konstanta přístroje $x = K \cdot \varphi(x^*)$ ← cejchování

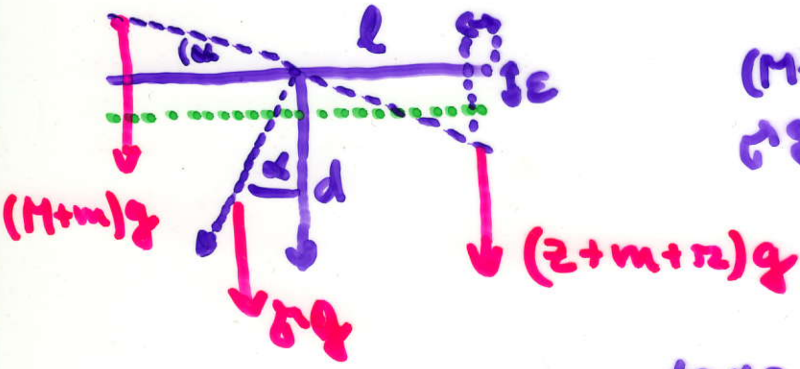
- stálost

- mezní chyba přístroje Δ_m

  třída přesnosti přístroje $\frac{\Delta_m}{\text{rozsah}}$

- zatížitelnost přístroje

Stručná teorie rovnoramenných vah



$$(M+m)g(l\cos\alpha + \varepsilon\sin\alpha) + \rho g d\sin\alpha = (Z+m+r)g(l\cos\alpha - \varepsilon\sin\alpha)$$

ozn. $R = M+Z+r+2m$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{r\,l}{\rho d + R\varepsilon}$$

malý úhel ⇒ $\mathrm{tg}\,\alpha \doteq \alpha$

$$\frac{\alpha}{r} = \frac{1}{\rho d + R\varepsilon} = c$$ citlivost

ε - závisí i na průhybu → c s rostoucím M, Z klesá

Oprava vážení na vztlak

- Archimédův zákon

$$Mg - \frac{M}{\rho_M}\cdot\rho_v\cdot g = Zg - \frac{Z}{\rho_Z}\rho_v g$$

$$M = Z + \rho_v\left(\frac{M}{\rho_M} - \frac{Z}{\rho_Z}\right)$$

protože $M \approx Z$

$$M = Z + Z\rho_v\left(\frac{1}{\rho_M} - \frac{1}{\rho_Z}\right)$$

korekce $\xi = M - Z = Z\rho_v\left(\frac{1}{\rho_M} - \frac{1}{\rho_Z}\right) = kZ$ ← bývá tabel.

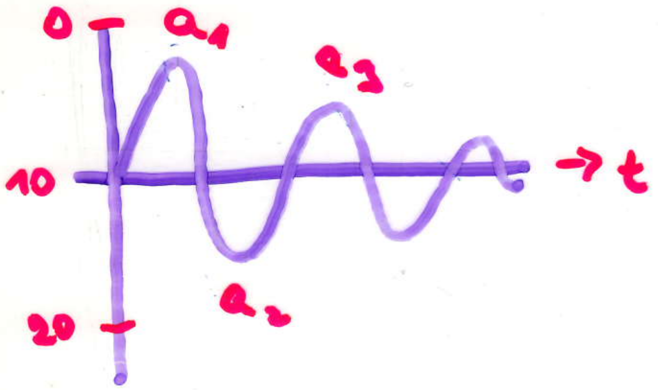
Oprava na nerovnoramennost

$M_e = z_1 l'$

$M_e' = z_2 l$

$M = \sqrt{z_1 z_2} \doteq \frac{z_1+z_2}{2}$

Netlumené analyt. váhy



3 (4) po sobě jdoucí krajní výchylky => pak rovnovážná poloha:

$$r_{(3)} = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{a_1+a_3}{2}\right)$$

$$r_{(4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{a_1+a_3}{2} + a_2 + \frac{a_2+a_4}{2} + a_3\right)$$

Postup:

1. n_0' – nulová poloha před
2. $r_1 \rightarrow z$
3. $r_2 \rightarrow z \pm \Delta z$ přívažek
4. n_0'' – nulová poloha po

5. $n_0 = \frac{n_0' + n_0''}{2}$

6. $c = \frac{r_2 - r_1}{\Delta z}$

7. $z = z_1 + \frac{n_0 - r_1}{c} = z_2 + \frac{n_0 + r_2}{c}$

Chyba při vážení :

$$\Delta m = \frac{|\Delta n_0| + \frac{1}{2} v}{c}$$

$n_0' - n_0''$

c z dílku

Měření teploty

a) teploměry dilatační (délk., obj. roztažnost

Hg, líh, bimetal

b) teploměry tlakové

c) teploměry odporové (Pt)

d) teploměry termoelektrické (Cu-Ko, NiFe)

e) radiační - pyrometry

chyba ~ 0,02 K ; 0,05 K ; 0,1 K

Měření barometrického tlaku

Jednotky (i starší)

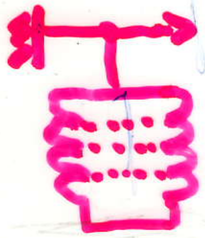
1 bar = 10^5 Pa (1 mbar = 10^2 Pa)

1 torr = 133,32 Pa

1 atm = 760 torr = $1{,}01325 \cdot 10^5$ Pa

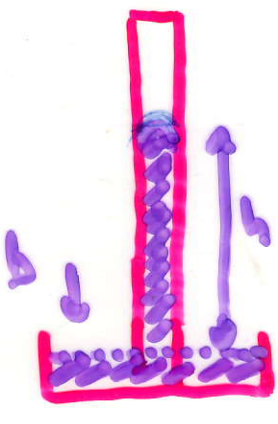
1 at (tech. atm) = 1 kp cm^{-2} = $9{,}81 \cdot 10^4$ Pa

tlakoměry (manometry) - deformační
- kapalinové



vidiho krabičky

$p = h\rho g + b$



Opravy - kapil. deprese
- na teplotu
- na tíhové zrychlení (zeměpis. polohu)

Měření vlhkosti vzduchu

Absolutní vlhkost

$$\varphi = \frac{m}{V}$$

hmotnost vodní páry v objemu vzduchu

Relativní vlhkost

$$\varphi_r = \frac{m}{M}$$

hmotnost nasycené vodní páry

tedy $\varphi_r = \frac{e}{E}$ napětí vodních par

vlhkoměry – vlasový
– psychrometry – využívají rosného bodu

Elektrické měřicí přístroje - pokr.

Principy:

a) magnetoelektrické s otáčivou cívkou

deprézské

=

b) elektromagnetický systém

Jádro vtahováno do mg. pole cívky
(nelineární stupnice)

c) Elektrodynamický systém

otočná "napěťová" cívka je v mg. poli
tvořeném "proudovou" cívkou (wattmetry)

! značka druhu proudu

$=$ $\approx$ $\simeq$

zkušební napětí – zapisováno v hvězdičce v kV
→ izolační schopnost

Pracovní poloha

$\sqcap$	$\perp$	$\angle$
vodorovná	svislá	šikmá

Třída přesnosti přístroje