Nejvzdálenější a nejzazší v kosmologii

Předpoklady:
pro homogenní a izotropní kosmologické modely je důležitým pojmem – udává jejich dynamiku – škálový faktor $R(t)$, uvažujme o modelech se singulárním počátkem v čase $t =$, pak

$$R \;\; t = \qquad =$$

V přítomnosti (my jako pozorovatelé) $t =$ budeme klást

$$R \;\; t = \qquad =$$

Metrika v radiální souřadnici je v kosmologických modelech vyjádřena jako (význam je obvyklý)

$$ds^2 = \qquad - \qquad .$$

Určeme rovnice pro pohyb světelného paprsku, který přináší pozorovateli informaci o vzdálených objektech ve vesmíru. Je pro něj

$ds^2 = \quad \Rightarrow - \qquad =$ - diferenciální rovnice pro pohyb (znaménko mínus volíme proto, že jde o „dostředivý“ paprsek).

Tedy

$$dx = \frac{}{R(t)} \Rightarrow -\int_x^0 \qquad \int_t^T \qquad , \qquad \text{odtud} \qquad x = \int_t^T \qquad .$$

Souřadnici x, (ta je pro vesmírný objekt nepohybující se vůči vesmíru konstantní) odpovídá v čase t „fyzická“ vzdálenost l

$$l =$$

Tedy vzdálenost pozorovaného objektu v čase t, kdy k nám vyslal světlo, od našeho místa ve vesmíru je

$$l = \qquad \int_t^T \qquad . \qquad\qquad *$$

Platí $l(t = \quad = \qquad = \quad =$, čehož plyne, že mezi časy $t =$ a $t =$ nabývá $l(t)$ někde maxima. Jeho polohu najdeme pomocí

$$\frac{dl}{dt} = \quad \text{čili} \quad c\left(\quad \int \qquad \right) \quad ,$$

takže

$$\frac{dR}{dt}\int_t^T \qquad .$$

Odtud vypočteme **čas** t_A, v němž pozorujeme nejvzdálenější objekt (tehdy k nám vyslal světlo). Jeho vzdálenost od místa pozorování (na němž jsme dnes, v čase T), je

** $$l_A = \int_{t_A}^{T}$$

To je tedy největší vzdálenost, do níž můžeme ve vesmíru v principu (je-li dokonale průhledný) vidět.

Nejzazší v principu pozorovaný objekt je ten, z něhož vyšel paprsek v čase $t =$.

Tehdy objekt měl (a pořád má, pokud se nepohybuje vůči vesmíru a nezanikl) souřadnici

$$x_0 = \int_{0}^{T}$$

Fyzická vzdálenost, v níž je tento objekt dnes (v čase T) je

$$l_B = \quad = \int_{0}^{T} \quad \int_{0}^{T}$$

…=1

*** $$l_B = \int_{0}^{T}$$

Příklad model č.1

Vesmír bez gravitace a kosmočlenu (dokonale prázdný) může být uvažován v rozpínající se vztažné soustavě, což je vlastně nejprostší kosmologický model. Je pro něj

$$R(t) = \frac{t}{T}$$

Minkowského „kosmologické“ souřadnice… vzájemně kolmé jsou Minkow. rozbíhající se čáry a hyperboly jsou kosmologické souřadnice

Rovnice $\frac{dl}{dt} =$, tedy $\frac{dR}{dt} \int_{t_A}^{T}$ dává

$$\frac{1}{T} \int_{t_A}^{T} \quad = \Rightarrow \frac{T}{t_A} =$$, z toho $t_A = \frac{T}{e}$

$t_A = \frac{T}{e}$ je čas, v němž pozorujeme nejvzdálenější objekt, tehdy k nám vyslal světlo, tento tehdy nejvzdálenější objekt byl od nás

$$l_A = \int_{t_A}^{T} \quad = \quad = \quad e$$

$$l_A = \quad e$$

Nejzazší objekt (od počátku Vesmíru *t*=o), tedy v principu přístupný našemu pozorování v čase $t =$ je ve vzdálenosti

$$l_B = \int_0^T$$ … diverguje … ☹

Používáme-li ovšem **Minkowského souřadnic**, jsou vzdálenosti určeny jinak – příklad ukazuje relativitu pojmu vzdálenosti

----

Komentář k tomuto modelu rovnoměrně se rozpínajícímu se vesmíru

Výsledek $l_B \to \infty$ se může zdát překvapivý – nejzazší objekt je v čase T nekonečně daleko?

Lze jej však snadno vysvětlit tím, že Minkowského souřadnice se liší od souřadnic kosmologických.

„Kosmologická" současnost je určena hodinami, které jsou v klidu v rozpínající se soustavě, takže vzhledem k Minkowského soustavě podléhají dilataci času. Objekt, jehož rychlost se blíží rychlosti světla *c*, se tedy v čase *T* vzdálí do vzdálenosti, která pro rychlosti blízké *c* roste nade všechny meze.

Vylepšení formulí, z rovnice

$$\frac{dl}{dt} = \quad \Rightarrow \quad dt \int_{t_A}^{T}$$ můžeme dosadit do vztahu pro l_A a dostaneme

$$l_A = \quad \left(\quad \right) \quad - \quad ,$$

$$H_A = \left(\quad \right) \quad R_A \quad ,$$

H_A je Hubbleova konstanta v čase t_A.

Příklad. Model 2

Aplikujeme předešlé formule na Einsteinův-de Sitterův vesmír, zde škálový faktor je dán

$$R\ \ t\ = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{T^{\frac{2}{3}}}$$

(tento model byl až do objevu zrychleného rozpínání vesmíru byl tento model považován za velmi blízký realitě).

Opět T je čas od počátku po dnešek.

Nejvzdálenější objekt (z hlediska pozorování jím vyslaného světla) splňuje

$$\frac{dR}{dt}\int_{t_A}^{T}$$

$$\frac{\frac{2}{3}t}{T^{\frac{2}{3}}}\int_{t_A} \qquad \cdot \qquad - \quad - \ = \ \frac{T^{\frac{1}{3}}}{t_A^{\frac{1}{3}}} -$$

odtud pro čas

$$t_A = \frac{8}{27} \ .$$

Nejvzdálenější objekt – největší pozorovaná vzdálenost pak je

$$l_A = \int_{t_A}^{T} \qquad \int_{t_A}^{T} \qquad c \qquad \int_{t_A}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$l_A = \frac{4}{9}$$

Nejzazší objekt je dnes ve vzdálenosti:

$$l_B = \int_{0}^{T} \qquad \int_{0}^{T}$$

$$l_B = \ .$$

Pro dnes přijímaný CDM model s nulovou prostorovou křivostí je

$$R\;t\;=\frac{\sinh^{\frac{2}{3}}\left[\quad\right]}{\sinh^{\frac{2}{3}}\left[\quad\right]}$$

Tento vztah neplatí pro příliš malé t, proto nemá smysl počítat dnešní vzdálenost nejzazšího objektu: Největší pozorovanou vzdálenost – nejvzdálenější objekt však počítat lze, potíž je jen s řešením integrálů, což lze řešit numericky.

$$\frac{dR}{dt}\int_{t}^{T}$$