3.4.1 Fyzikální význam operátoru rotace

Pojem **operátor** vyjadřuje soubor matematických operací (úkonů), které je třeba provést s argumentem operátoru, abychom dostali požadovaný výsledek. Tento pojem zavádíme tehdy, potřebujeme-li zjednodušit vyjádření složitých nebo rozsáhlých matematických operací. V Maxwellových rovnicích se setkáváme s operátorem ∇ (nabla), který, jak jsme si již vysvětlili v kapitole „základy vektorového počtu“, souhrnně vyjadřuje parciální derivování podle souřadných os. Připomeňme, že v kartézském souřadném systému, platí

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

Ze zápisu je zřejmé, že se po formální stránce jedná o vektor. V souladu s pravidly násobení vektorů, ho tedy lze aplikovat na vektorovou veličinu dvojím způsobem, skalárně a vektorově.

Uvažujme nyní magnetické pole popsané spojitou funkcí vektoru magnetické indukce, kterou můžeme rozložit ve směru souřadných os na tři složky B_x, B_y, B_z. Pro každou z nich vypočítáme křivkový integrál po elementárních obdélníkových drahách v rovinách kolmých k jednotlivým souřadným osám. V rovině xy bude příslušná obdélníková dráha $dx \cdot dy$. Plošku orientovanou v kladném směru osy z, kterou tato dráha obepíná, pojmenujeme $\vec{K}$. Na straně bližší k ose x označíme hodnotu x-složky vektoru magnetické indukce B_x na vzdálenější straně bude $B_x + dB_x$. Křivkový integrál B_x po integrační dráze obrysu plošky $\vec{K}$ vypočítáme jako skalární součin dráhových elementů a magnetické indukce, tj. $dxB_x - dx\left(B_x + dB_x\right) = -dB_x$ (součiny B_x s dy jsou nulové, dy je na B_x kolmé), pak ho vydělíme velikostí plošky. Bude-li uvažovaná ploška konvergovat k nule a přiřadíme-li výsledku směr plošky $\vec{K}$, lze ho chápat jako z-složku určitého vektoru (rovnou záporně vzaté parciální derivací B_x podle y)

$$-\frac{dxdB_x}{dxdy}\vec{k} = -\frac{\partial B_x}{\partial y}\vec{k}$$

Obdobně můžeme postupovat pro plošku $dz \cdot dx$, kterou pojmenujeme $\vec{J}$. Na straně bližší ose x bude opět x-složka vektoru magnetické indukce B_x na vzdálenější straně bude $B_x + dB_x$. Křivkový integrál B_x po integrační dráze obrysu plošky $\vec{J}$ vypočítáme opět jako součin dráhového elementu a magnetické indukce, znaménka u jednotlivých členů ale budou opačná, tj. $-dxB_x + dx\left(B_x + dB_x\right) = dB_x$. Po vydělení velikostí plošky, při konvergenci $dz \cdot dx$ k nule a přiřazení směru plošky $\vec{J}$, dostaneme y-složku vektoru (rovnou parciální derivací B_x dle z)

$$\frac{dxdB_x}{dzdx}\vec{j} = \frac{\partial B_x}{\partial z}\vec{j}$$

Stejným způsobem můžeme postupovat i pro složky B_y a B_z, takže nakonec získáme šest dílčích vektorů ve třech souřadných osách. Protože všechny jsme vytvořili stejným způsobem ze stejných fyzikálních veličin, můžeme je na základě principu superpozice sečíst a vypočítat tak vektor, který je vlastně vektorovým součinem operátoru nabla a vektoru magnetické indukce a nazývá se **rotace**.

Fyzikální význam tohoto vektoru si můžeme lépe uvědomit následujícím způsobem: Zvolíme nekonečně malou plochu, která obsahuje bod, v němž chceme rotaci $\vec{B}$ určit. Rotace $\vec{B}$ je pak vektor udávající maximální hodnotu podílu křivkového integrálu skalárního součinu $\vec{B}$ s dráhovými elementy pravotočivé křivky obepínající tuto plochu a velikosti příslušné plochy. Směr je dán normálou plochy s maximální hodnotou výše definovaného podílu.

3.4.2 Zobecněný Ampèrův zákon

Pro pochopení Maxwellových rovnic je klíčové uvědomit si souvislosti mezi elektrickým proudem a jeho magnetickými účinky. Mějme nekonečný proudovodič směřující kolmo k nákresně a vypočítejme křivkový integrál magnetické indukce (skalárního součinu vektoru $\vec{B}$ a elementu dráhy $d\vec{l}$) po některé z indukčních čar znázorněné na obrázku. V tomto případě jsou vektory, jejichž skalární součin počítáme, rovnoběžné, hledaný křivkový integrál tedy můžeme spočítat velmi jednoduše

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B\cdot dl = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot r d\alpha = \mu_0 I$$

Bude-li integrační dráha obecná, skalární součin v integrálu nemůžeme nahradit pouhým součinem velikostí vektorů, přibude v něm člen cos β

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B\cdot dl\cdot\cos\beta = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot r d\alpha = \mu_0 I\ ,$$

kde úhel β je úhel mezi vektorem $\vec{B}$ a dráhovým elementem $d\vec{l}$. Protože $\vec{B}$ je vždy tečný k indukčním čarám, je $dl\cdot\cos\beta$ rovno elementu dráhy dr na indukční čáře, takže výsledek integrace je stejný jako v předchozím případě. Nahradíme-li magnetickou indukci intenzitou magnetického pole $H = \dfrac{B}{\mu}$, získáme rovnici

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$$

Bez důkazu dále přijmeme skutečnost, že uvedený výsledek platí pro libovolnou integrační dráhu, která vodič obepíná, je-li vodič vně uzavřené křivky integrál je nulový.

Tento výsledek platí pro stacionární elektrostatické pole a byl znám již v počátcích zkoumání magnetického pole. Při snaze vytvořit jednotný matematicky ucelený popis obou typů polí Maxwell vyslovil předpoklad, že časová změna elektrostatického pole bude mít stejné účinky jako proud. Matematicky to reprezentuje rozšíření předchozí rovnice na tvar

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + \frac{d\Psi}{dt},\ \text{kde}\ \Psi = \iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$$

je **tok vektoru elektrické indukce** plochou obepnutou integrační drahou, po které počítáme integrál magnetické intenzity. Jeho časovou derivaci nazveme v souladu s Maxwellovou teorií **posuvný proud**. Tato integrální podoba Ampérova **zákona celkového proudu** nám popisuje souvislost mezi magnetickým polem a elektrickými proudy protékajícími určitou plochou. Chceme-li tutéž souvislost vyjádřit v jediném bodě, vydělíme rovnici velikostí plochy, přičemž plochu necháme konvergovat k nule. Získáme tak diferenciální tvar téže rovnice

$$\text{rot}\,\vec{H} = \nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

kde $\vec{j}$ je vektor **hustoty proudu**. Tento vektor získáme, vydělíme-li proud, který protéká určitou plochou kolmou ke směru proudu, velikostí této plochy za předpokladu, že tuto plochu necháme konvergovat k nule. Směr hustoty proudu je dán normálou uvažované plochy, takže vlastně platí $I = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$. Hustota proudu je velmi užitečná veličina umožňující charakterizovat lokálně pohyb nábojů. Vystupuje např. v tzv. **diferenciálním tvaru Ohmova zákona**

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}$$

3.4.3 Faradayův indukční zákon

V r. 1831 Michael Faraday při svých pokusech zjistil, že mění-li se v uzavřeném elektrickém obvodu magnetický indukční tok, dochází ke vzniku elektrického napětí. Tento jev označujeme jako **elektromagnetická indukce**. Protože elektrické napětí je vlastně práce vykonaná vnějšími elektromotorickými silami po určité uzavřené integrační křivce, můžeme zákon elektromagnetické indukce matematicky zapsat

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ kde } \Phi = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

je magnetický indukční tok plochou, jejíž hranici tvoří integrační křivka. Diferenciální tvar rovnice můžeme na základě analogie odvodit z předchozí kapitolky

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \nabla\times\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Znaménko mínus vyjadřuje dobře známé Lenzovo pravidlo: *indukovaný proud má vždy takový směr, aby jeho účinky působily proti změně, která jej vyvolala*.

Elektromagnetická indukce je fyzikální jev, který je rozsáhle využíván v mnoha oblastech lidské činnosti, především při výrobě elektrické energie nebo naopak při přeměně elektrické energie na mechanickou v elektromotorech.

3.4.4 Gaussův zákon

Gaussova věta elektrostatiky, s níž jsme se setkali v kapitole o elektrostatickém poli, může být formulována také pro elektrickou indukci. Tím se ještě dále zjednoduší, takže má tvar

$$\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_e \, dV$$

což lze slovně vyjádřit: *Tok elektrické indukce uzavřenou plochou je roven celkovému náboji, který se nachází v prostoru uzavřeném uvažovanou plochou*.

Je zřejmé, že v této podobě jsme získali popis elektrického pole pomocí veličiny nezávislé na prostředí. Tato rovnice nám zároveň charakterizuje skutečnost, že elektrické pole je **zřídlové**. Jeho siločáry vycházejí z kladného náboje (*zřídlo*) a vstupují do kladného náboje (*propad*).

V diferenciálním tvaru má Gaussova věta podobu

$$\operatorname{div}\vec{D} = \nabla\cdot\vec{D} = \rho_e$$

3.4.5 Zobecněný indukční zákon

Skutečnost, že na rozdíl od elektrického pole, magnetické pole je pole **vírové**, jeho indukční čáry jsou uzavřené křivky a **neexistují magnetické monopóly** (u magnetického pole od sebe nemůžeme oddělit severní a jižní pól) matematicky vyjadřuje věta: *tok vektoru magnetické indukce libovolnou uzavřenou orientovanou plochou je roven nule*, jejíž matematický zápis je poslední z integrálních Maxwellových rovnic

$$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

Diferenciální tvar rovnice je dán skutečností, že divergence vektoru vyjadřuje v uvažovaném místě pole tok příslušného vektoru nekonečně malou plochou

$$\operatorname{div}\vec{B} = \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

Zápis operátorů divergence a rotace pomocí operátoru nabla připomenutého v úvodní kapitole využívá vektorového charakteru tohoto operátoru, znak „$\times$“ tedy označuje vektorový součin, znak „$\cdot$“ součin skalární.

3.4.6 Význam Maxwellových rovnic

Maxwellovy rovnice jsou základní zákony v teorii elektromagnetického pole. Popisují vzájemnou provázanost veličin elektrického a magnetického pole, vyjadřují skutečnost, že elektrické a magnetické pole tvoří jediný fyzikální celek, který nazýváme **elektromagnetické pole**. Lze je zapsat buď v integrálním nebo diferenciálním tvaru. V integrálním tvaru popisují elektromagnetické pole v jisté oblasti, kdežto v diferenciálním tvaru v určitém bodu této oblasti.

V rovnicích vystupují čtyři základní veličiny:

- **intenzita elektrického pole** $\vec{E}$ (síla, jíž pole působí na jednotkový kladný náboj)
- **elektrická indukce** $\vec{D}$
- **magnetická indukce** $\vec{B}$
- **intenzita magnetického pole** $\vec{H}$

Tyto veličiny spolu úzce souvisí, proto bývají Maxwellovy rovnice doplňovány tzv. **materiálovými vztahy**, které vyjadřují právě tuto souvislost mezi dvojicemi veličin příslušných polí. Pro izotropní prostředí mají materiálové rovnice tvar

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, kde ε je permitivita prostředí

$\vec{B} = \mu\vec{H}$, kde μ je permeabilita prostředí

Nesmírný význam, krásu a eleganci Maxwellových rovnic můžeme shrnout do několika základních bodů

- Velké množství poznatků z elektřiny a magnetismu je zobecněno do čtyř formálně jednoduchých přehledných rovnic.
- Nejdůležitější vlastností rovnic je jejich značná symetrie (především pro dielektrikum bez volných nábojů, tj. pro $\rho_e = 0$ a $\vec{j} = 0$).
- Tato symetrie dokazuje naprostou rovnocennost (provázanost, souvislost) elektrického a magnetického pole - žádné z obou polí není prvotní, ani nějakým způsobem „privilegované" a časová změna kteréhokoliv z nich vyvolá pole druhé.
- Maxwellovy rovnice v sobě „obsahují" (je možno z nich odvodit) další důležité vztahy zákon zachování energie, vztahy mezi elektrickými a magnetickými vektory, …

Z Maxwellových rovnic byly předpovězeny nové, dosud neznámé jevy a vlastnosti elektromagnetického pole, jsou např. východiskem pro odvození rovnic elektromagnetického vlnění a tedy i optiky a teorie optických přístrojů, ať už jde o složité teleskopy nebo obyčejné brýle. Jsou teoretickým základem pro vysvětlení funkce elektromagnetických zařízení, jako jsou například elektromotory, cyklotrony, televizní vysílače a přijímače, telefony, faxy, radary nebo mikrovlnné trouby.

Maxwellovy rovnice jsou vynikajícím, možná největším úspěchem klasické fyziky, který připravil pole pro Einsteinovu teorii relativity (a ta na něm nic nezměnila).

Zároveň byly ale i „labutí písní" klasické fyziky, jejím posledním úspěchem – po nich začíná rozvoj moderní fyziky, jejíž dva hlavní zdroje tvoří teorie relativity a kvantová mechanika.