KOMBINATORIKA: Domácí úkol (12. listopadu 2015)

1. Ve třídě je 13 chlapců a 15 dívek. Kolika způsoby z nich lze vytvořit šestičlenné družstvo takové, aby v něm bylo alespoň tolik dívek, jako chlapců?

2. Kolika způsoby si může 15 dětí ve výtvarném kroužku vybrat, které ze tří zvířátek budou malovat? (Každý bude malovat jedno zvířátko, mohou všichni malovat to stejné.)

3 Kolik existuje devítimístných telefonních čísel, v nichž se nevyskytuje nula a žádná cifra se neopakuje?

4 Kolik různých třítónových popěvků lze vytvořit z osmi tónů?

5. V rovině je dáno několik přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jediném bodě. Kolik je v rovině dáno přímek, pokud určují 55 různých průsečíků této roviny?

6 Kolika slov vznikne záměnou pořadí písmen slova ACONCAGUA?

7. Kolika způsoby lze darovat 5 různých knížek 3 různým lidem, máme-li alespoň 3 kusy každé knížky a dostane-li každý člověk jednu knihu?

8. Kolika způsoby můžeme 4 barvami obarvit 10 stejných kuliček?

9. Kolika způsoby lze v krabičce uspořádat 12 pastelek?

10. Na tenisovém turnaji, kde hrál každý hráč s každým právě jednou, se odehrálo 91 zápasů. Kolik se ho zúčastnilo hráčů?

11. Kolika různými způsoby lze z dvaceti 20 různých skladeb sestavit program koncertu o 7 skladbách?

12. Kolika způsoby lze ze sáčku, v němž je 5 kuliček zelených, 4 modré, 3 červené a 7 žlutých, vybrat trojici kuliček?

13. Dokažte, že pro přirozená čísla p a q, $p \geq q$, platí rovnost

$$\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q-1} + \binom{p-2}{q-1} + \cdots + \binom{q-1}{q-1}$$

14. Dokažte následující rovnosti:

   * $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$
   * $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}$
   * $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2$

15. Dokažte (nebo alespoň pro některá n, m a k ověřte, že platí) následující rovnosti:

   * $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$
   * $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \binom{m}{k}\binom{n}{m}$ pro $0 \leq k \leq m \leq n$,

   a to (a) opakovaným použitím vzorce; $\binom{p}{q} + \binom{p}{q+1} = \binom{p+1}{q+1}$; (b) kombinatorickou úvahou;(c) matematickou indukcí.

16. Dokažte, že součin k po sobě jdoucích celých čísel je vždy dělitelný $k!$

17. Užitím binomické věty vypočtěte: (a) 99^5 (b) 101^5