MA2BP_PGE, 8. ledna 2016

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích nějakého eukleidovského prostoru.

Každý úkol je hodnocen 6 body, maximální možný zisk je 84 bodů; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 42 bodů.

---

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [6, 7, 0], \quad B = [-2, 7, 6], \quad C = [-2, -3, 6], \quad D = [6, -3, 0], \quad E = [-4, 2, -5].$$

+ Dokažte, že body A, B, C jsou v obecné poloze, avšak body A, B, C, D nikoli.
+ Určete souřadnice bodu F, který je souměrný s bodem E podle roviny $ABCD$.
+ Určete vzdálenost bodu E od roviny $ABCD$.
+ Určete objem jehlanu $ABCDE$.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid x_1 - x_2 - x_4 = 1,\ x_3 = 1\},$$
$$\mathcal{C} = \{[3, 1, 3, 4] + t(1, 1, 2, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

+ Určete dimenze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, parametrické vyjádření $\mathcal{B}$ a rovnicové (neparametrické) vyjádření $\mathcal{C}$.
+ Určete vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
+ Určete odchylku $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

3. Ve vhodném prostoru udejte příklad dvou podprostorů, které jsou kolmé a mají vzdálenost 8.

4. V trojrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (2, 0, 1, 0).$$

+ Určete vektorový součin $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$ a ukažte, že tento vektor je kolmý ke každému z daných vektorů.
+ Dokažte, že předchozí vlastnost platí obecně.

5. Transformace v rovině je dána předpisem

$$[x, y] \mapsto [y - 3,\ x + 3].$$

+ Rozhodněte, zda je tota transformace projektivní/afinní/ekviafinní/podobné/shodné.
+ Rozhodněte, zda je tato transformace základní, příp. popište její určující prvky.

6. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad afinní transformace, která má samodružné všechny směry a modul různý od 1.

7. Dokažte, že pro přímku p a podprostor $\mathcal{B}$ v obecném eukleidovském prostoru platí:

Pokud p není kolmá k $\mathcal{B}$, potom odchylka přímky p od $\mathcal{B}$ je rovna odchylce vektoru $\mathbf{u} \in \overrightarrow{p}$ od jeho kolmého průmětu do $\overrightarrow{\mathcal{B}}$.