

MA2BP_PGE, 14. ledna 2016

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích nějakého eukleidovského prostoru.

Každý úkol je hodnocen 6 body, maximální možný zisk je 84 bodů; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 42 bodů.

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [1, 1, 0], \quad B = [2, 1, 1], \quad C = [3, 0, 0], \quad D = [2, 0, -1], \quad E = [2, 4, 1], \quad F = [2, -4, -3].$$

- + Dokažte, že body A, B, C, D leží v jedné rovině a že body E, F v této rovině neleží.
- + Rozhodněte, zda jsou body E a F souměrné podle roviny $ABCD$.
- + Určete odchylku rovin $ABCD$ a ABE .
- + Určete souřadnice nějakého bodu, který leží uvnitř (tedy nikoli ve stěně nebo na hraně) mnohostěnu $ABCDE$.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{[1, 2, 4, 1] + t(1, 0, 0, 1) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{C} = \{[4, 0, 3, 3] + s_1(1, 0, 1, 0) + s_2(0, 0, 0, 1) \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R}\}.$$

- + Určete dimenze těchto podprostorů a jejich rovnicová vyjádření.
- + Určete vzdálenost \mathcal{B} a \mathcal{C} .
- + Určete vzájemnou polohu \mathcal{B} a \mathcal{C} .

3. Ve vhodném prostoru udejte příklad dvou mimoběžných podprostorů, které mají společný (nenulový) směr.

4. V trojrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 0, 0, 1).$$

- + Určete vektorový součin $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$.
- + Alespoň dvěma způsoby vyjádřete objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

5. Transformace v rovině je dána předpisem

$$[x, y] \mapsto [y, -x + 2].$$

- + Dokažte, že tato transformace je shodnost a určete všechny její samodružné body a směry.
- + Určete druh a určující prvky této transformace.

6. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad afinní transformace, která má právě dva různé samodružné směry.

7. Definujte, co je podobné zobrazení, a dokažte, že každé podobné zobrazení je injektivní (prosté).