MA2BP_PGE, 20. ledna 2016

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích nějakého eukleidovského prostoru.

Každý úkol je hodnocen 6 body, maximální možný zisk je 84 bodů; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 42 bodů.

---

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [0, 1, 0], \quad B = [0, 5, 3], \quad E = [0, -2, 4], \quad G = [5, 2, 7].$$

+ Určete souřadnice bodů C, D, F, H tak, aby všechny tyto body tvořily vrcholy rovnoběžnostěnu s podstavami $ABCD$ a $EFGH$.
+ Dokažte, že tento rovnoběžnostěn je krychle.
+ Určete vzdálenost bodu E od roviny ABG.
+ Určete objem čtyřstěnu $ABEG$.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{[1, 3, 0, 0] + r(2, 0, 0, 1) + s(2, 0, 1, 6) \mid r, s \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{C} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid x_1 - 3x_2 = 4,\ 5x_3 - x_4 = 2\}.$$

+ Určete dimenze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, parametrické vyjádření $\mathcal{C}$ a rovnicové (neparametrické) vyjádření $\mathcal{B}$.
+ Určete společné body, resp. směry a vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
+ Rozhodněte, zda jsou podprostory $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ kolmé.

3. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad dvou netriviálních podprostorů, které mají vzdálenost 20.

4. V trojrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{v}_1 = (0, 4, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 1, 7).$$

+ Určete vektorový součin $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ a ukažte, že platí
$$\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2.$$
+ Dokažte, že předchozí rovnost platí obecně.

5. Transformace v rovině je dána předpisem

$$[x, y] \mapsto [-x + 2y + 2,\ 2x - y - 2].$$

+ Rozhodněte, zda je tato transformace projektivní/afinní/ekviafinní/podobné/shodné.
+ Určete samodružné body, resp. směry transformace a rozhodněte, zda je tato transformace základní.

6. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad neidentické afinní transformace, která má modul roven 1.

7. Dokažte, že pro podprostory $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ v obecném afinním prostoru platí:

Průnik $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ je neprázdný právě tehdy, když pro libovolné body $B \in \mathcal{B}$ a $C \in \mathcal{C}$ je vektor $\overrightarrow{BC}$ obsažen v součtu zaměření $\overrightarrow{\mathcal{B}} + \overrightarrow{\mathcal{C}}$.