MA2BP_PGE, 26. ledna 2016

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích nějakého eukleidovského prostoru.

Každý úkol je hodnocen 6 body, maximální možný zisk je 84 bodů; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 42 bodů.

---

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [-1, 0, 1], \quad B = [-1, 3, 7], \quad C = [1, 2, 9], \quad D = [-3, 4, 5].$$

+ Dokažte, že body A, C, D jsou v obecné poloze, avšak body A, B, C, D nikoli.
+ Rozhodněte, zda jsou body C a D souměrné podle přímky AB.
+ Určete poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD.
+ Určete souřadnice těžiště trojúhelníku ACD.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid x_1 - x_2 = 2,\ x_1 + x_2 - x_3 = 1,\ x_4 = 4\},$$
$$\mathcal{C} = \{[0, 0, -1, 2] + r(1, 1, 0, 0) + s(1, 0, 0, 1) \mid r, s \in \mathbb{R}\}.$$

+ Určete dimenze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, parametrické vyjádření $\mathcal{B}$ a rovnicové (neparametrické) vyjádření $\mathcal{C}$.
+ Určete společné body, resp. směry a vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
+ Určete odchylku $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

3. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad dvou podprostorů, které jsou kolmé a mají společný směr.

4. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{v}_1 = (3, 1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 0, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0, 2).$$

+ Určete vektorový součin $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$.
+ Dokažte, že obecně platí:
  Vektorový součin je nulový právě tehdy, když určující vektory jsou lineárně závislé.

5. Projektivní transformace v rovině je dána obrazy bodů

$$[1, 0] \mapsto [0, 1], \quad [1, -1] \mapsto [-1, 1], \quad [0, -1] \mapsto [-1, 2], \quad [0, 0] \mapsto [0, 2].$$

+ Dokažte, že tato transformace je afinní, a určete obraz obecného bodu $[x_1, x_2]$.
+ Určete samodružné body, resp. směry transformace a rozhodněte, zda je tato transformace základní.

6. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad neidentické transformace, která má aspoň tři různé samodružné body.

7. Dokažte, že obecně platí:

Pokud má afinní transformace nějaké vlastní samodružné body, potom všechny tyto body tvoří afinní podprostor.