MA2BP_PGE, 1. února 2016

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích nějakého eukleidovského prostoru.

Každý úkol je hodnocen 6 body, maximální možný zisk je 84 bodů; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 42 bodů.

---

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [-1, 1, 1], \quad B = [-1, 5, 4], \quad C = [4, 5, 4], \quad H = [4, -2, 5].$$

+ Určete souřadnice bodů D, E, F, G tak, aby všechny tyto body tvořily vrcholy rovnoběžnostěnu s podstavami $ABCD$ a $EFGH$.
+ Určete souřadnice bodu K, který je souměrný s bodem H podle přímky AB.
+ Určete odchylku přímky HB od roviny ABC.
+ Rozhodněte, zda počátek souřadné soustavy leží uvnitř mnohostěnu $ABCH$.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{[-2, 1, 0, 3] + r(0, 1, 1, 0) + s(2, 0, 0, -1) \mid r, s \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{C} = \{[3, 1, 0, 6] + t(1, 1, -1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

+ Určete dimenze těchto podprostorů a jejich rovnicová vyjádření.
+ Určete vzdálenost $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
+ Určete parametrické vyjádření nějakého podprostoru $\mathcal{D}$, který je kolmý jak k $\mathcal{B}$, tak $\mathcal{C}$.

3. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad dvou podprostorů, které mají netriviální průnik a odchylku 45°.

4. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 0, 0, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 1, 1, 0).$$

+ Určete vektorový součin $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$ a ukažte, že tento vektor je kolmý ke každému z daných vektorů.
+ Dokažte, že předchozí vlastnost platí obecně.

5. Transformace v rovině je dána předpisem

$$[x, y] \mapsto [2x - 2,\ 3 + 2y].$$

+ Rozhodněte, zda je tato transformace projektivní/afinní/ekviafinní/podobné/shodné.
+ Určete samodružné body, resp. směry transformace a rozhodněte, zda je tato transformace základní.

6. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad afinní transformace, která má aspoň 2 různé samodružné body a modul roven 2.

7. Definujte, co je podobné zobrazení, a dokažte, že každá podobná transformace, která není shodností, má právě jeden vlastní samodružný bod.