

## MA2BP\_PGE, 10. února 2016

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích nějakého eukleidovského prostoru.

Každý úkol je hodnocen 6 body, maximální možný zisk je 84 bodů; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 42 bodů.

---

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [0, -1, 0], \quad B = [0, 3, 3], \quad C = [5, 3, 3], \quad D = [5, -1, 0], \quad E = [0, 0, 7].$$

- + Dokažte, že body  $A, B, C, D$  leží v jedné rovině a že bod  $E$  v této rovině neleží.
- + Rozhodněte, zda jsou body  $B$  a  $D$  souměrné podle přímky  $AC$ .
- + Určete vzdálenost bodu  $E$  od roviny  $ABCD$ .
- + Určete objem mnohostěnu  $ABCDE$ .

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid x_1 - 2x_4 = 3\},$$

$$\mathcal{C} = \{[1, 2, 0, -1] + t(1, 0, -1, 0) + s(0, 1, 1, -1) + r(0, 1, 1, 0) \mid t, r, s \in \mathbb{R}\}.$$

- + Určete dimenze  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ , parametrické vyjádření  $\mathcal{B}$  a rovnicové (neparametrické) vyjádření  $\mathcal{C}$ .
- + Určete společné body, resp. směry a vzájemnou polohu  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ .
- + Určete odchylku podprostorů  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ .

3. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad dvou dvourozměrných podprostorů, které mají netriviální průnik a vzdálenost 2.

4. V trojrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{u} = (5, 4, 3), \quad \mathbf{v} = (5, -4, -3).$$

- + Určete vektorový součin  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , odchylku  $\alpha = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  a ukažte, že platí

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha.$$

- + Dokažte, že předchozí rovnost platí obecně.

5. Projektivní transformace v rovině je dána obrazy bodů

$$[1, 1] \mapsto [0, 5], \quad [-1, 1] \mapsto [-4, 5], \quad [-1, -1] \mapsto [-4, 1], \quad [1, -1] \mapsto [0, 1].$$

- + Dokažte, že toto zobrazení je podobné, a určete obraz obecného bodu  $[x_1, x_2]$ .
- + Určete samodružné body, resp. směry transformace a rozhodněte, zda je tato transformace základní.

6. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad transformace, která má právě dva samodružné body, resp. směry.

7. Definujte, co je podobné zobrazení, a dokažte, že samodružné směry odpovídající různým charakteristickým číslům jsou navzájem kolmé.