

Přírodovědecká fakulta

**DISKRÉTNÍ MATEMATIKA**  
**pro učitele**

Eduard FUCHS

# OBSAH

<b>1</b>	<b>KOMBINATORIKA</b>	<b>3</b>
1	Co to je kombinatorika a kdy vznikla . . . . .	3
2	Základní kombinatorické funkce . . . . .	7
3	Základní kombinatorické pojmy . . . . .	14
4	Rozklady konečných množin . . . . .	24
5	Princip inkluze a exkluze . . . . .	31
6	Rozklady přirozených čísel na sčítance . . . . .	38
7	Rozdělování do přihrádek . . . . .	45
8	Řešení rekurentních formulí . . . . .	48
9	Vytvořující funkce . . . . .	59
10	Bloková schémata, latinské čtverce a konečné roviny . . . . .	69
<b>2</b>	<b>TEORIE GRAFŮ</b>	<b>86</b>
1	Co to je teorie grafů a kdy vznikla . . . . .	86
2	Základní pojmy . . . . .	90
3	Souvislé grafy . . . . .	97
4	Stromy . . . . .	100
5	Mosty, artikulace a některé grafové charakteristiky . . . . .	114
6	Eulerovské a hamiltonovské grafy . . . . .	119
7	Rovinné grafy . . . . .	126
8	Barvení grafů . . . . .	136
9	Zobecnění pojmu graf . . . . .	146
	<b>PŘÍLOHY</b>	<b>150</b>
	<b>LITERATURA</b>	<b>156</b>
	<b>REJSTRÍK</b>	<b>157</b>

# Kapitola 1

## KOMBINATORIKA

### 1 Co to je kombinatorika a kdy vznikla

Jak uvidíme, neexistuje na otázky v nadpise jednoduchá odpověď. Částečnou odpovědí na první část otázky je — v jistém smyslu — celá první kapitola.

Tak jak je obtížné sdělit, co to je vůbec matematika, je nesnadné charakterizovat i její jednotlivé části. Pokusme se alespoň stručně naznačit, co je předmětem kombinatoriky (nazývané též *kombinatorická analýza*, *kombinatorická teorie* apod.) a jakými metodami se v kombinatorice pracuje.

Často se podle autora jedné z prvních učebnic kombinatoriky E. Netta (kniha *Lehrbuch der Combinatorik* vyšla v roce 1901) říká, že „kombinatorika je část matematiky zabývající se rozdělováním, uspořádáváním, nebo výběrem prvků nějaké množiny“. Z modernějšího hlediska je centrálním pojmem kombinatoriky tzv. *konfigurace*, což je pojem, který bychom mohli charakterizovat jako „zobrazení nějaké množiny objektů do konečné abstraktní množiny se zadanou strukturou“ (viz Bergeovu knihu [1]). Uvedená formulace sice pěkně zní, čtenář z ní však patrně těžko pochopí, co to konfigurace vlastně je. Objasnění tohoto pojmu vyplyne z dalšího textu, neboť v něm budeme studovat řadu nejrozmanitějších konfigurací. Kromě těch nejelementárnějších, tj. *variací*, *permutací* a *kombinací* (čtenáři dobře známých již se střední školy), to budou např. *rozklady konečných množin*, *rozklady přirozených čísel na sčítance*, *rozdělování předmětů do přihrádek*, *latinské čtverce*, *bloková schémata*, *konečné afinní roviny* a další.

Jaký je hlavní okruh otázek s těmito konfiguracemi spojený? Konfigurace jsou nejčastěji studovány z následujících aspektů:

- (1) *Existuje jistá konfigurace nebo nikoliv?* (Budeme například řešit, zda existují ortogonální latinské čtverce daného řádu, zda existuje jistá afinní rovina a podobně.)

- (2) *Kolik existuje předepsaných konfigurací?* (Středoškolská kombinatorika v podstatě spočívá v určení počtu variací, permutací a kombinací daného typu. My se však budeme zabývat i podstatně komplikovanějšími problémy.)
- (3) *Lze najít metodu, jak vypsat všechny konfigurace daného typu?* (Je zřejmé, že jde o kvalitativně odlišnou úlohu než je popsána v bodě (2).)
- (4) *Jaké je „asymptotické“ chování počtu daných konfigurací?* (Vzhledem k tomu, že budeme téměř neustále pracovat s konečnými množinami, bude počet konfigurací daného typu téměř vždy konečný. Proto by se mohlo zdát, že nejjednodušší určení počtu všech konfigurací spočívá prostě ve vypsání všech možností. To je však ve většině případů prakticky vyloučeno, neboť počet daných konfigurací je tak obrovský, že vypočítat všechny možnosti nelze – stačí si například jen uvědomit, jak rychle roste funkce  $n!$ . I když často známe např. rekurentní formulí pro počet  $k(n)$  konfigurací daného typu (pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ ), roste funkce  $k(n)$  tak rychle, že již pro poměrně malá  $n$  nelze  $k(n)$  přesně vyčíslit ani pomocí počítačů. Pak se alespoň snažíme najít nějakou „jednoduchou“ funkci, která popisuje, „jak rychle“  $k(n)$  roste.)
- (5) *Jak najít z konfigurací daného typu tu, která optimálně vyhovuje zadaným předpokladům?* (Úlohy tohoto typu mají řadu konkrétních aplikací v matematice i mimo ni. Uvedeným problémem se zabývá intenzivně rozvíjená část kombinatoriky – tzv. teorie „kombinatorických algoritmů“.)

O většině uvedených aspektů se v dalším alespoň stručně zmíníme. Přesto zůstává řada závažných částí kombinatoriky, o nichž nemůžeme pojednat ani ve zkratce. Jmenujme za jiné alespoň *kombinatorickou teorii uspořádaných množin*, *Pólyovu teorii enumerace* či *teorii kódování*. K popsání uvedených teorií nemáme k dispozici dostatečný matematický aparát, ani nám to neumožňuje rozsah tohoto textu.

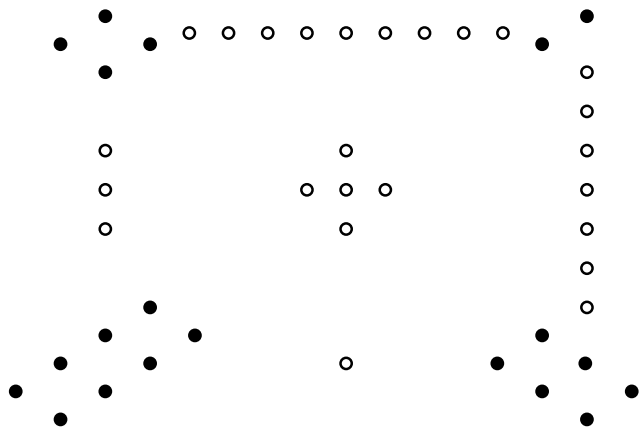
Metody v kombinatorice užívané můžeme rovněž popsat jen částečně. Jak alespoň naznačíme, užívá se v kombinatorice výrazně i těch nejkomplicovanějších metod algebry, reálné i komplexní analýzy i geometrie. Kromě toho si kombinatorika vytvořila i své specifické metody, z nichž se později zmíníme například o *metodě inkluze a exkluze* a o *teorii vytvořujících funkcí*.

Jak uvidíme, řadu kombinatorických problémů lze velmi snadno zformulovat, avšak jejich řešení je velmi často obtížné.

Prozatím jsme se pokusili alespoň naznačit, co to kombinatorika je. Nyní stručně k její historii.

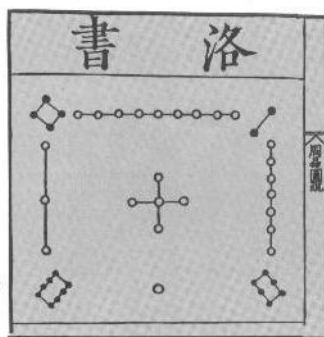
První „kombinatorické“ výsledky či alespoň náznaky jsou až překvapivě staré. Pravděpodobně nejstarší „konfiguraci“ lze nalézt v jednom z nejstarších dochovaných textů v historii

lidstva. V posvátné knize taoismu *I-t'ing*, (tj. *Knihy proměn*) z roku přibližně 2200 př. n. l. jsou dvě konfigurace, nazývané *Lo-šu* a *Říční mapa*. Na obrázku 1.1 je konfigurace *Lo-šu*.



Obr. 1.1: Konfigurace „Lo-šu“

Na následujícím obrázku 1.2 je tato konfigurace převzatá ze středověkého textu.



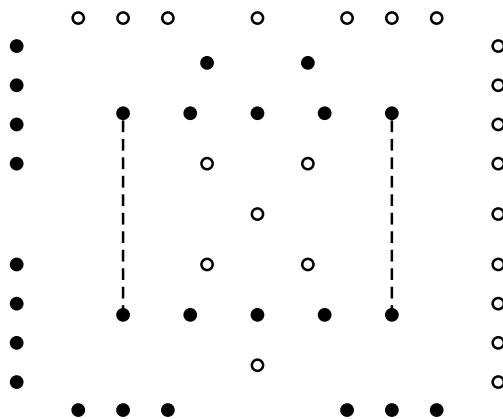
Obr. 1.2: Konfigurace „Lo-šu“ ve středověkém textu

Nahradíme-li znázorněné skupiny bodů čísly, obdržíme známý magický čtverec (nazývaný též *Saturn*):

4	9	2
3	5	7
8	1	6

V tomto čtverci je součet čísel v každém řádku, sloupci i úhlopříčce roven číslu 15.

Druhá konfigurace, kterou podle pověsti měla na svém krunýři znázorněnu posvátná želva vylézající z řeky *Ho*, je znázorněna na obr. 1.3.



Obr. 1.3: Konfigurace „Říční mapa“

Znázorníme-li toto schéma čísla, obdržíme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 7 & & \\
 & & & & 2 & & \\
 & & & 10 & & 10 & \\
 8 & 3 & & 5 & & 4 & 9 \\
 & & & 10 & & 10 & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & 6 & & & 
 \end{array}$$

Toto schéma je pozoruhodné svou „středovou symetrií“. Platí například

$$5 + 3 = 8, \quad 5 + 1 = 6 \text{ atd.}, \quad 3 + 10 + 2 = 8 + 7, \quad 3 + 10 + 1 = 8 + 6 \text{ atd.}$$

Řada kombinatorických pojmů je doložena například ve staré indické matematice.

Kombinatorika jakožto matematická disciplína se však začíná konstituovat až cca v 16. až 17. století, prakticky — vcelku evidentně — současně se vznikem teorie pravděpodobnosti. Kombinatorické úvahy lze vysledovat v díle B. Pascala, P. Fermata a dalších. První publikovanou prací z kombinatoriky je Leibnizovo dílo *Disertatio de Arte Combinatoria* z roku 1666. V 18. století k rozvoji kombinatoriky zvláště významně přispěl L. Euler. Opravdu bouřlivý rozvoj však kombinatorika prodělává až ve 20. století, zejména pak v posledních třiceti letech, kdy se v souvislosti s rozvojem výpočetní techniky rozvíjí celá tzv. **diskrétní** matematika, jejíž významnou součástí je právě kombinatorika.

## 2 Základní kombinatorické funkce

**2.1. Definice.** Funkci  $n!$  (čti  $n$  faktoriál) definujeme pro všechna  $n \in \mathbb{N}_0$  takto:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n & \text{pro } n > 0. \end{cases}$$

Pro všechna  $n \in \mathbb{N}_0$  tak platí:

$$(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$$

**2.2. Příklad.** Pro funkci  $n!$  lze dokázat řadu vztahů, od elementárních po velmi komplikované. Například v matematické analýze se dokazuje, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = e.$$

(Připomeňme, že součtem nekonečné řady  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  rozumíme následující limitu (pokud existuje):

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , kde  $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ .)

Odtud například plyne

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - (e-2) = (e-1) - (e-2) = 1.$$

**2.3. Poznámka.** Zobecněním funkce  $n!$  na všechna kladná reálná čísla je tzv. *Eulerova funkce gamma* definovaná takto:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

Lze dokázat, že pro každé přirozené číslo  $n$  platí:  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . Funkce  $\Gamma(x)$  je přitom spojitá v celém definičním oboru.

Hodnoty  $n!$  rostou s rostoucím  $n$  „velmi rychle“. Pro alespoň částečnou představu uvádíme v tabulce na straně 151 hodnoty  $n!$  pro  $n \in \{1, \dots, 25\}$ .

K přibližnému výpočtu hodnot  $n!$  pro velká  $n$  se nejčastěji užívá tzv. *Stirlingovy formule*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n,$$

kde symbol  $\sim$  značí, že podíl výrazů na obou stranách pro  $n \rightarrow \infty$  konverguje k 1.

**2.4. Definice.** Bud'  $k \in \mathbb{N}$  libovolné. Funkci  $(x)_k$  definujeme pro všechna reálná  $x$  takto:

$$(x)_k = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot \dots \cdot (x - k + 1).$$

Dále klademe

$$(x)_0 = 1.$$

**2.5. Definice.** Bud'  $k \in \mathbb{N}$  libovolné. Funkci  $(x)^{(k)}$  definujeme pro všechna reálná  $x$  takto:

$$(x)^{(k)} = x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot \dots \cdot (x + k - 1).$$

Dále klademe

$$(x)^{(0)} = 1.$$

**2.6. Definice.** Bud'  $k \in \mathbb{N}_0$  libovolné. Pro každé reálné číslo  $x$  definujeme

$$\binom{x}{k} = \frac{(x)_k}{k!} = \frac{x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot \dots \cdot (x - k + 1)}{k!}.$$

Pro celé záporné číslo  $k$  pokládáme

$$\binom{x}{k} = 0.$$

**2.7. Poznámka.** Symbol  $\binom{x}{k}$  (čti „ $x$  nad  $k$ “) se obvykle nazývá *binomický koeficient*. (Toto pojmenování je spojeno se jménem významného algebraika 16. století *Michaela Stifela*.) Pro  $n, k \in \mathbb{N}_0$  se  $\binom{n}{k}$  nazývá také *kombinační číslo*. O kombinatorickém významu funkcí  $n!$ ,  $(x)_k$ ,  $(x)^{(k)}$  a  $\binom{x}{k}$  budeme hovořit v následujících paragrafech.

**2.8. Příklad.** (a) Pro každé  $x \in \mathbb{R}$  platí  $\binom{x}{0} = 1$ , zejména  $\binom{0}{0} = 1$ .

(b)  $\binom{-4}{3} = \frac{(-4) \cdot (-5) \cdot (-6)}{6} = -20.$

(c)  $\binom{1}{4} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)}{24} = -\frac{5}{128}.$

(d) Pro  $n, k \in \mathbb{N}_0$ ,  $n < k$  platí  $\binom{n}{k} = 0$ , neboť  $(n)_k = 0$ .



(e) Pro  $n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$  platí  $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ .

(f) Pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$  platí

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \cdot \binom{2n-1}{n-1}.$$

Vskutku, pro  $n = 0$  je tvrzení evidentní. Nechť je tedy  $n > 0$ . Pak

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{1}{n!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2n-1}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \cdot 2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \cdot \binom{2n-1}{n-1}. \end{aligned}$$

(g) Pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$  platí

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^{2n-1}} \cdot \binom{2n-2}{n-1}.$$

Vskutku, podle definice platí

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-3}{2}\right).$$

Dosadíme-li za součin

$$\frac{1}{n!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-3}{2}\right)$$

výraz z příkladu (f), dostáváme

$$\begin{aligned} \binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} \cdot \binom{2n-1}{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \cdot \frac{1}{2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2} = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^{2n-1}} \cdot \binom{2n-2}{n-1}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do posledního vztahu  $n+1$  místo  $n$ , obdržíme „symetričtější“ vzorec (platný pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$ ):

$$\binom{\frac{1}{2}}{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot 2^{2n+1}} \cdot \binom{2n}{n}.$$

**2.9. Definice.** Podle definice je  $(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$  polynom  $n$ -tého stupně. Označíme-li koeficient u  $x^k$  symbolem  $s(n, k)$ , dostáváme

$$(x)_n = s(n, 0) + s(n, 1)x + s(n, 2)x^2 + \dots + s(n, n)x^n.$$

Koeficienty  $s(n, k)$  se nazývají *Stirlingova čísla 1. druhu*.

**2.10. Věta.** Pro Stirlingova čísla 1. druhu platí následující rekurentní formule:

$$\begin{aligned} s(n+1, k) &= s(n, k-1) - n \cdot s(n, k), \\ s(n, 0) &= s(n, n) = 1. \end{aligned}$$

**Důkaz.** Tvrzení  $s(n, 0) = s(n, n) = 1$  je zřejmé. Dokažme tedy první vztah. Podle definice platí

$$(x)_{n+1} = (x)_n \cdot (x-n),$$

takže, opět podle definice,

$$\dots + s(n+1, k)x^k + \dots = (\dots + s(n, k-1)x^{k-1} + s(n, k)x^k + \dots)(x-n).$$

Porovnáním koeficientů u  $x^k$  na levé a pravé straně poslední rovnosti obdržíme dokazovanou formuli. •

**2.11. Poznámka.** Rekurentní formule z věty 2.10 nám umožňují, jak se čtenář může snadno přesvědčit, postupně počítat čísla  $s(n, k)$ . Některé hodnoty uvádíme v tabulce na straně 153.

**2.12. Věta.** Pro každé celé číslo  $k$  a každé reálné číslo  $x$  platí:

$$\binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} = \binom{x+1}{k+1}.$$

**Důkaz.** Pro  $k \leq 0$  je tvrzení splněno triviálně. Necht' tedy je  $k \geq 1$ . Pak

$$\begin{aligned} \binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} &= \frac{(x)_k}{k!} + \frac{(x)_{k+1}}{(k+1)!} = \frac{(k+1)(x)_k + (x)_{k+1}}{(k+1)!} = \\ &= \frac{(k+1) \cdot x(x-1)\dots(x-k+1) + x(x-1)\dots(x-k)}{(k+1)!} = \\ &= \frac{x(x-1)\dots(x-k+1) \cdot (k+1+x-k)}{(k+1)!} = \\ &= \frac{(x+1)_{k+1}}{(k+1)!} = \binom{x+1}{k+1}. \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov. •

**2.13. Poznámka.** Z definice binomických koeficientů a z věty 2.12 plyne platnost následující rekurentní formule:

Pro  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq k$  platí

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}; \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Tato formule nám umožňuje postupně počítat hodnoty  $\binom{n}{k}$ . Tabulce hodnot  $\binom{n}{k}$  se obvykle říká *Pascalův trojúhelník*. (Viz tabulku v příloze na straně 152.) Jak si čtenář jistě již při nejrůznějších příležitostech uvědomil, je většina pojmů nazvaných po dřívějších osobnostech, po nich pojmenována neoprávněně. Nejinak tomu je i v tomto případě, byť jde o název v evropské tradici obvyklý. Blaise Pascal (1623–1662) toto schéma popsal ve své slavné knize *Traité du triangle arithmétique* (tj. *Pojednání o aritmetickém trojúhelníku*), avšak prokazatelně dříve je znali například arabský astronom al-Tusi (1265), čínský matematik Chu Ši-Chie (1303) či indický matematik Narajána Pandita (1365). Dokonce i v evropské literatuře se toto schéma vyskytlo před Pascalem – v knize Petra Apiana (1495–1552). To však nic nemění na skutečnosti, že je toto schéma mnohdy užitečné, jak si ostatně čtenář jistě uvědomil již na střední škole.

Pro kombinační čísla lze dokázat řadu rovností, tzv. *kombinatorických identit*, které se v matematice uplatňují v nejne očekávanějších souvislostech. Důkazy některých těchto identit vyžadují důmyslných metod — viz např. knihu [6]. V následující větě shrneme jen několik nejelementárnějších.

**2.14. Věta.** *Bud'  $n \geq k$  nezáporná celá čísla. Pak platí:*

(a)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ,

(b)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ,

(c)  $\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ ,

(d)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$  pro každé přirozené číslo  $n$ .

**Důkaz.** (a) Tvrzení plyne přímo z definice. (Řádky Pascalova trojúhelníka jsou tedy „symetrické“.)

(b) Inducí. Pro  $n = 0$  je tvrzení triviální. Necht' tedy formule platí pro dané  $n \geq 0$ . Pak

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] = 1 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} + \binom{n}{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

(c) Protože  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ , platí

$$k \cdot \binom{n}{k} + (n-k) \cdot \binom{n}{n-k} = n \cdot \binom{n}{k} = \frac{n}{2} \cdot \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{n-k} \right].$$

Odtud

$$\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} = \frac{n}{2} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \frac{n}{2} \cdot 2^n = n \cdot 2^{n-1}.$$

(d) Příímým výpočtem dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} &= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] = \\ &= \binom{n}{0} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} = \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} = 0. \end{aligned}$$

Často je užívána i následující formule. •

**2.15. Věta.** Pro každé reálné  $x$  a každé  $n \in \mathbb{N}_0$  platí:

$$\sum_{k=0}^n \binom{x+k}{k} = \binom{x}{0} + \binom{x+1}{1} + \binom{x+2}{2} + \cdots + \binom{x+n}{n} = \binom{x+n+1}{n}.$$

**Důkaz.** Indukcí. Pro  $n = 0$  je rovnice správná. Necht' tedy uvedený vztah platí pro  $n \geq 0$ . Pak

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{x+k}{k} &= \sum_{k=0}^n \binom{x+k}{k} + \binom{x+n+1}{n+1} = \\ &= \binom{x+n+1}{n} + \binom{x+n+1}{n+1} = \binom{x+n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li ve větě 2.15  $n-k$  místo  $k$  a  $x$  místo  $x+n$ , dostaneme okamžitě tvrzení následujícího důsledku. •

**2.16. Důsledek.**

$$\sum_{k=0}^n \binom{x-k}{n-k} = \binom{x}{n} + \binom{x-1}{n-1} + \binom{x-2}{n-2} + \cdots + \binom{x-n}{0} = \binom{x+1}{n}.$$

**Cvičení**

1. Dokažte, že

$$\sum_{k=1}^n (k \cdot k!) = (n+1)! - 1.$$

2. Dokažte, že pro Stirlingova čísla 1. druhu platí vztah

$$\sum_{k=1}^n s(n, k) = 0, \quad n > 1.$$

3. Dokažte identitu

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{x}{k} = \binom{n-x}{n} = (-1)^n \binom{x-1}{n} = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{k}\right).$$

4. Tzv. *Catalanovu posloupnost* 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1 430, 4 862, ... definovanou vztahem

$$c_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

studoval již Euler. Dokažte, že platí:

- a)  $c_2 = 2c_1$
- b)  $c_3 = 3c_2 - c_1$
- c)  $c_4 = 4c_3 - 3c_2$
- d)  $c_5 = 5c_4 - 6c_3 + c_2$
- e)  $c_6 = 6c_5 - 10c_4 + 4c_3$
- f)  $c_7 = 7c_6 - 15c_5 + 10c_4 - c_3$
- g)  $c_n = \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$
- h)  $c_{n+1} = \frac{(2n+2) \cdot (2n+1)}{(n+2) \cdot (n+1)} \cdot c_n$

### 3 Základní kombinatorické pojmy

Nejprve zavedeme označení, které budeme v celém dalším textu dodržovat.

**3.1. Označení.** Kardinální číslo konečné množiny  $X$  značíme  $|X|$ . Symbolem  $\mathcal{P}(X)$  označíme, jak je obvyklé, množinu všech podmnožin množiny  $X$ . Pro  $k \in \mathbb{N}_0$  označme

$$\mathcal{P}_k(X) = \{A; A \subseteq X, |A| = k\}.$$

Mnoho kombinatorických úvah je založeno na následujícím zřejmém faktu.

**3.2. Věta.** *Bud'  $A, B$  konečné množiny. Pak  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ .*

**3.3. Poznámka.** Jinými slovy je věta 3.2 často formulována jako tzv. *pravidlo součinu* následovně:

*Lze-li objekt  $X$  vybrat  $r$  způsoby a po každém takovém výběru lze objekt  $Y$  vybrat  $s$  způsoby, pak lze uspořádanou dvojici  $[X, Y]$  vybrat  $r \cdot s$  způsoby.*

Jako aplikaci věty 3.2 uvedme tvrzení, které v roce 1935 odvodili maďarští matematikové P. Erdős a G. Szekeres.

**3.4. Věta.** *Každá posloupnost  $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$   $mn + 1$  navzájem různých celých čísel nutně obsahuje klesající vybranou podposloupnost o více než  $m$  prvcích nebo rostoucí vybranou podposloupnost o více než  $n$  prvcích.*

**Důkaz.** Pro každé  $i = 1, 2, \dots, mn + 1$  označme  $k_i$  počet čísel v nejdelší klesající podposloupnosti s prvním prvkem  $a_i$  a analogicky necht'  $r_i$  je počet prvků v nejdelší rostoucí podposloupnosti začínající prvkem  $a_i$ .

Předpokládejme, že tvrzení věty neplatí. Pak pro každé  $i$  platí  $1 \leq k_i \leq m, 1 \leq r_i \leq n$ , takže zobrazení  $a_i \rightarrow [k_i, r_i]$  je zobrazením množiny  $\{a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}\}$  do kartézského součinu  $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ . Ukážeme, že toto zobrazení je prosté.

Necht' je  $i < j$ . Pak platí  $a_i < a_j$  nebo  $a_i > a_j$  (neboť čísla  $a_i, a_j$  jsou podle předpokladu různá). Je-li  $a_i < a_j$ , pak platí zřejmě  $r_i > r_j$ , je-li  $a_i > a_j$ , platí zase  $k_i > k_j$ . V obou případech je  $[k_i, r_i] \neq [k_j, r_j]$ . To je však spor, neboť nemůže existovat injekce množiny o  $mn + 1$  prvcích do množiny o  $mn$  prvcích. •

**3.5. Definice.** Bud'  $n \in \mathbb{N}, |X| = n$ . Pro  $k \in \mathbb{N}, k \leq n$  nazveme *variací  $k$ -té třídy v  $X$*  každý řetězec  $(A, \leq)$ , kde  $A \in \mathcal{P}_k(X)$ .

**3.6. Věta.** *Bud'  $k \leq n$  přirozená čísla. Necht'  $|X| = n$ . Počet variací  $k$ -té třídy v  $X$  je roven číslu*

$$(n)_k = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1).$$

**Důkaz.** Tvrzení plyne z pravidla součinu. První prvek lze vybrat  $n$  způsoby, druhý  $n - 1$  způsoby atd. •

**3.7. Poznámka.** Počet uspořádaných  $k$ -tic bez opakování z  $n$  prvků je tedy roven číslu  $(n)_k$  pro libovolná  $n, k \in \mathbb{N}$  (neboť pro  $k > n$  je  $(n)_k = 0$  podle definice).

**3.8. Důsledek.** *Budte  $X, Y$  konečné množiny,  $|X| = k, |Y| = n$ . Pak pro množinu  $\text{inj}(X^Y)$  všech injekcí  $X$  do  $Y$  platí*

$$|\text{inj}(X^Y)| = (n)_k.$$

**3.9. Definice.** Variace  $n$ -té třídy z  $n$  prvkové množiny se nazývají *permutace* této množiny.

Z věty 3.6 okamžitě plyne.

**3.10. Věta.** *Počet permutací  $n$  prvkové množiny je roven číslu  $(n)_n = n!$ .*

**3.11. Poznámka.** Je-li  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , je podle definice permutací množiny  $X$  každý řetězec  $\{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$ , kde  $a_i \in X$  pro každé  $i$ . Zapišeme-li tento řetězec jako uspořádanou  $n$ -tici  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ , můžeme danou permutaci ztotožnit se zobrazením  $i \rightarrow a_i$ . Toto zobrazení je obvyklé zapisovat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Jinými slovy, za permutace množiny  $X$  můžeme považovat bijekce množiny  $X$  na sebe.

Odtud a z věty 3.10 okamžitě plyne

**3.12. Důsledek.** *Budte  $X, Y$  konečné množiny. Pak pro množinu  $\text{bij}(Y^X)$  všech bijekcí  $X$  na  $Y$  platí*

$$|\text{bij}(Y^X)| = \begin{cases} 0 & \text{je-li } |X| \neq |Y|, \\ |Y|! & \text{je-li } |X| = |Y|. \end{cases}$$

**3.13. Definice.** Bud'  $X$  konečná množina,  $k \in \mathbb{N}_0$  buď libovolné. *Kombinací  $k$ -té třídy z  $X$  rozumíme každou  $k$  prvkovou podmnožinu množiny  $X$ . (Množina  $\mathcal{P}_k(X)$  je tedy množinou všech kombinací  $k$ -té třídy z  $X$ .)*

Z vět 3.6 a 3.10 bezprostředně plyne

**3.14. Věta.** *Bud'  $X$  konečná množina,  $|X| = n$ . Pak pro každé  $k \in \mathbb{N}_0$  platí*

$$|\mathcal{P}_k(X)| = \frac{(n)_k}{k!} = \binom{n}{k}.$$

**3.15. Příklad.** *Kolika způsoby můžeme na šachovnici (o 64 polích) rozestavit 8 věží tak, aby se žádné dvě z nich vzájemně neohrožovaly?*

Tomu, kdo ví, jak v šachu tahá věž, je zřejmé, že hledáme právě všechna taková rozestavení věží, kdy v každé řadě a v každém sloupci stojí právě jedna věž. Očíslujeme-li pevně řady a sloupce čísly  $1, \dots, 8$ , je poloha každé figury na šachovnici jednoznačně určena dvojicí  $[i, j]$ , kde  $i$  je číslo řady a  $j$  číslo sloupce. Odtud je zřejmé, že hledaných rozestavení je  $8! = 40\,320$ .

**3.16. Příklad.** (a) *Kolika způsoby můžeme rozestavit 6 dětí do kruhu?*

Do řady lze rozestavit 6 dětí  $6! = 720$  způsoby. Protože z každé řady vytvoříme evidentním způsobem kruh, je počet takto vzniklých kruhů rovněž 720. Vzhledem k tomu, že však nerozlišíme dva kruhy lišící se jen pootočením, je hledaný počet  $\frac{720}{6} = 120$ .

(b) *Kolik náhrdelníků lze vytvořit ze 6 korálek 6 různých barev?*

Mohlo by se zdát, že podle (a) je správná odpověď 120. Protože však nerozlišíme dva náhrdelníky, z nichž jeden vznikl „převrácením“ druhého, je hledaný počet  $\frac{120}{2} = 60$ .

**3.17. Příklad.** *Bud'  $A$  množina všech možných pořadí 16 oddílů v 1. fotbalové lize. Pro  $x, y \in A$  položme  $x \sim y \iff$  v  $x, y$  je stejné pořadí na prvních třech místech a stejné dva oddíly sestupují. Určete  $|A/\sim|$ .*

Ze zadání plyne, že  $|A| = 16!$ . Relace  $\sim$  je zřejmě ekvivalence na  $A$ , takže má smysl se ptát po počtu prvků faktormnožiny  $A/\sim$ .

Protože pořadí mužstev na prvních třech místech je možno určit  $(16)_3$  způsoby a ze zbývajících mužstev můžeme dvě sestupující určit  $\binom{13}{2}$  způsoby, platí

$$|A/\sim| = (16)_3 \cdot \binom{13}{2} = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot \frac{13 \cdot 12}{2} = 262\,080.$$

Prozatím jsme hovořili o variacích, permutacích a kombinacích *bez opakování*. Nyní budeme uvažovat případy, kdy se prvky dané množiny mohou v uvedených výběrech opakovat.

**3.18. Definice.** *Bud'  $X$  konečná množina,  $|X| = n$ . Pro libovolné  $k \in \mathbb{N}_0$  označme  $V(n, k)$  počet všech uspořádaných  $k$ -tic prvků z  $X$ , v nichž se tyto prvky mohou opakovat. Tyto  $k$ -tice nazýváme *k-variace s opakováním* z prvků množiny  $X$ .*

**3.19. Věta.** *Pro každé  $n, k \in \mathbb{N}_0$  platí  $V(n, k) = n^k$ .*



**Důkaz.** Indukcí vzhledem k číslu  $k$ . Tvrzení  $V(n, 0) = n^0 = 1$  je zřejmé. Necht' tedy  $V(n, k) = n^k$ . Buď  $[a_1, \dots, a_k]$  libovolná  $k$ -variace s opakováním. Je zřejmé, že počet  $(k+1)$ -variací tvaru  $[a_1, \dots, a_k, x]$  je roven číslu  $n$ . Odtud plyne, že  $V(n, k+1) = n \cdot V(n, k) = n \cdot n^k = n^{k+1}$ .

•

**3.20. Příklad.** Buďte  $X, Y$  konečné množiny. Necht'  $X = \{a_1, \dots, a_k\}$ . Přiřadíme-li každému zobrazení  $f: X \rightarrow Y$  uspořádanou  $k$ -tici  $[f(a_1), \dots, f(a_k)]$ , vidíme okamžitě, že

$$|Y^X| = V(|X|, |Y|) = |Y|^{|X|}.$$

**3.21. Definice.** Buď  $k \in \mathbb{N}$  libovolné. Buď dáno  $n$  předmětů  $k$  druhů. Necht'  $n_i$  značí počet předmětů  $i$ -tého druhu,  $i = 1, \dots, k$ . (Tj.  $n_1 + \dots + n_k = n$ .) Symbolem  $P(n_1, \dots, n_k)$  označme počet prvků množiny všech uspořádaných  $n$ -tic těchto předmětů. Tyto  $n$ -tice nazýváme *permutace s opakováním*.

Z věty 3.10 okamžitě plyne

**3.22. Věta.** Pro každá čísla  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0$  platí

$$P(n_1, \dots, n_k) = \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

**3.23. Příklad.** (a) Kolik různých čísel lze utvořit z čísla 3 855 835 přeskupením cifer?

Protože dané číslo obsahuje dvě cifry 3, tři cifry 5 a dvě cifry 8, je hledaný počet

$$P(2, 3, 2) = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 210.$$

(b) Když Christian Huygens objevil Saturnův prstenec, zašifroval svůj objev, jak bylo v té době časté, do následujícího tzv. *anagramu*:

aaaaaaa ccccc d eeeee g h iiiiii lll mm nnnnnnnn  
oooo pp q rr s tttt uuuu

Náležitým uspořádáním písmen dostaneme zprávu *Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato*. Česky *Obklopen prstencem tenkým, plochým, nikde nezavěšeným, nakloněným k ekliptice*.

Určíme, za jak dlouho by počítač, který by vypsál milión permutací Huygensova anagramu za sekundu, vypsál všechny permutace.

Spočtěme, kolik je všech permutací daného anagramu. Z počtu jednotlivých písmen v anagramu plyne, že všech permutací je

$$P(7, 5, 1, 5, 1, 1, 7, 4, 2, 9, 4, 2, 1, 2, 1, 5, 5) = \frac{62!}{9! \cdot (7!)^2 \cdot (5!)^4 \cdot (4!)^2 \cdot (2!)^3}.$$

Toto číslo je přibližně rovno číslu  $3,573 \cdot 10^{60}$ . Počítač by tedy potřeboval více než  $10^{54}$  sekund. O velikosti tohoto čísla si uděláme představu, když si uvědomíme, že trvání našeho vesmíru — tj. přibližně 15 miliard roků — je méně než  $10^{17}$  sekund.

**3.24. Poznámka.** Zajímavé aplikace čísel  $P(n_1, \dots, n_k)$  lze najít například v úvahách o tzv. *svazu  $k$ -tic*.

Bud'  $k$  přirozené číslo. Symbolem  $\mathbb{N}_0^k$  označme množinu všech uspořádaných  $k$ -tic  $[a_1, \dots, a_k]$  nezáporných celých čísel. Definujme-li na  $\mathbb{N}_0^k$  relaci  $\leq$  takto:

$$[a_1, \dots, a_k] \leq [b_1, \dots, b_k] \iff a_i \leq b_i \text{ pro všechna } i = 1, \dots, k,$$

je zřejmé, že relace  $\leq$  je uspořádání na množině  $\mathbb{N}_0^k$ . Přitom je evidentní, že  $(\mathbb{N}_0^k, \leq)$  je svaz, v němž

$$\begin{aligned} \sup \{a, b\} &= [\max(a_1, b_1), \dots, \max(a_k, b_k)], \\ \inf \{a, b\} &= [\min(a_1, b_1), \dots, \min(a_k, b_k)]. \end{aligned}$$

Svaz  $\mathbb{N}_0^k$  můžeme reprezentovat následujícím způsobem. Bod  $[a_1, \dots, a_k] \in \mathbb{N}_0^k$  znázorníme jako bod eukleidovského prostoru  $\mathbb{E}_k$  a dva body  $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_k]$ ,  $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_k]$  spojíme šipkou směřující z  $\mathbf{a}$  do  $\mathbf{b}$  právě tehdy, když existuje index  $i$  takový, že

$$a_j = \begin{cases} b_j & \text{pro } j \neq i, \\ b_j + 1 & \text{pro } j = i. \end{cases}$$

(Tzn., že z  $\mathbf{a}$  do  $\mathbf{b}$  vede šipka právě tehdy, když  $\mathbf{a}$  pokrývá  $\mathbf{b}$  ve svazu  $(\mathbb{N}_0^k, \leq)$ .)

Nyní se pokusme určit počet „cest“ z bodu  $\mathbf{a}$  do bodu  $\mathbf{b}$  pro každé dva prvky  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}_0^k$ ,  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ . (Cestou rozumějme posloupnost na sebe napojených šipek.)

Tak například v  $\mathbb{N}_0^3$  existuje 10 cest z bodu 032 do bodu 000 znázorněných v tabulce 1.1.

Bud' nyní  $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_k]$ ,  $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_k]$  libovolné dva prvky v  $\mathbb{N}_0^k$ , takové, že  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ . Označme  $a_i - b_i = n_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Definujme pro  $i = 1, \dots, k$  zobrazení  $\alpha_i: \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0^k$  takto:

$$\alpha_i[x_1, \dots, x_k] = [x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - 1, x_{i+1}, \dots, x_k].$$

Nyní přiřadíme každé cestě z  $\mathbf{a}$  do  $\mathbf{b}$  odpovídající posloupnost zobrazení  $\alpha_i$ . (Tak např. cestě z bodu 032 do bodu 000 uvedené na prvním řádku v tabulce 1.1 odpovídá posloupnost

032	→	022	→	012	→	002	→	001	→	000
032	→	022	→	012	→	011	→	001	→	000
032	→	022	→	012	→	011	→	010	→	000
032	→	022	→	021	→	011	→	001	→	000
032	→	022	→	021	→	011	→	010	→	000
032	→	022	→	021	→	020	→	010	→	000
032	→	031	→	021	→	011	→	001	→	000
032	→	031	→	021	→	011	→	010	→	000
032	→	031	→	021	→	020	→	010	→	000
032	→	031	→	030	→	020	→	010	→	000

Tabulka 1.1: Cesty z bodu 032 do bodu 000

$\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3$ , poslední cestě pak posloupnost  $\alpha_3, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2$ .) Je zřejmé, že popsané přiřazení je bijekcí množiny cest z  $\mathbf{a}$  do  $\mathbf{b}$  na množinu všech posloupností utvořených z  $\alpha_i$ ; tak, že se v nich  $\alpha_i$  vyskytuje  $n_i$ -krát. Odtud plyne, že hledaných cest je

$$P(n_1, \dots, n_k) = \frac{\left(\sum_{i=1}^k (a_i - b_i)\right)!}{(a_1 - b_1)! \cdot \dots \cdot (a_k - b_k)!}.$$

**3.25. Definice.** Mějme dostatečný počet prvků  $n$  druhů. Symbolem  $C(n, k)$  označme počet všech možností, jak z těchto předmětů vybrat skupinu vytvořenou z  $k$  objektů (bez ohledu na pořadí). Těmto skupinám říkáme  $k$ -kombinace s opakováním.

**3.26. Věta.** Pro každé  $n, k \in \mathbb{N}_0$  platí  $C(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$ .

**Důkaz.** Pro  $n = 0$  nebo  $k = 0$  je tvrzení triviální. Nechť tedy  $n \neq 0 \neq k$ . Každou  $k$ -kombinaci s opakováním lze velmi jednoduše (a jednoznačně) popsat pomocí posloupnosti nul a jedniček takto: nechť je dána posloupnost  $a_1, a_2, \dots, a_{k+n-1}$ , v níž je  $k$  jedniček a  $n - 1$  nul. Přiřaďme této posloupnosti  $k$ -kombinaci s opakováním, v níž je tolik předmětů 1. druhu, kolik je v dané posloupnosti jedniček před první nulou, tolik předmětů druhého druhu, kolik je v dané posloupnosti jedniček mezi první a druhou nulou atd. Zřejmě nyní platí:

$$C(n, k) = P(k, n - 1) = \frac{(n + k - 1)!}{k!(n - 1)!} = \binom{n + k - 1}{k} = \binom{n + k - 1}{n - 1}.$$

•

**3.27. Příklad.** Budte  $X, Y$  konečné řetězce. Zjistíme, kolik existuje izotonních zobrazení  $X$  do  $Y$ .

Nechť  $X = \{x_1 < x_2 < \dots < x_k\}$ ,  $Y = \{y_1 < y_2 < \dots < y_n\}$ . Buď  $f: X \rightarrow Y$  izotonní zobrazení. Pak platí  $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_k)$ , takže izotonních zobrazení  $X$  do  $Y$  je tolik jako všech neklesajících  $k$ -tic prvků z  $Y$ . To, že  $k$ -ticím (v nichž se prvky mohou opakovat) předepíšeme pevně pořadí, je totéž, jako když pořadí prvků v  $k$ -ticích nerozlišujeme. Podle věty 3.26 je tedy izotonních zobrazení  $X$  do  $Y$

$$C(|Y|, |X|) = \binom{|X| + |Y| - 1}{|X|}.$$

**3.28. Příklad.** (a) Kolika způsoby můžeme mezi 4 chlapce rozdělit 50 stejných kuliček?

Postupujeme jako v důkazu věty 3.26. Přidejme k 50 kuličkám 3 kamínky. Poskládáme-li kuličky s kamínky do řady, rozdělí 3 kamínky posloupnost na 4 úseky. Označíme-li chlapce  $A, B, C, D$  a chlapci  $A$  dáme všechny kuličky z prvního úseku, chlapci  $B$  všechny kuličky z druhého úseku atd., je ihned zřejmé, že všech rozdělení je

$$P(50, 3) = \binom{53}{3} = \frac{53 \cdot 52 \cdot 51}{3 \cdot 2} = 23\,426.$$

(b) Pozměňme příklad (a) tak, že budeme požadovat, aby každý chlapec dostal alespoň jednu kuličku.

Podle (a) tedy chceme zjistit, v kolika posloupnostech 50 kuliček a 3 kamínků nejsou žádné dva kamínky vedle sebe a rovněž není kamínek ani na prvním ani na posledním místě posloupnosti. Tento počet zjistíme jednoduchým obratem. Dáme-li každému chlapci předem jednu kuličku, zůstane jich 46, které pak již můžeme rozdělit libovolně. Hledaných rozdělení je tak

$$P(46, 3) = \binom{49}{3} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47}{3 \cdot 2} = 18\,424.$$

Následující úloha je velmi jednoduchá, v dalším se však na ni budeme několikrát odvolávat.

**3.29. Příklad.** Mějme  $p$  prvků 1. druhu a  $q$  prvků 2. druhu. Kolik existuje permutací s opakováním těchto prvků takových, že žádné dva prvky 1. druhu nestojí vedle sebe?

Hledaných permutací je zřejmě tolik, kolika způsoby lze rozmístit  $p$  prvků 1. druhu do  $q - 1$  mezer mezi prvky 2. druhu a před první a za poslední z nich, tj. celkem na  $q + 1$  míst. Tzn., že hledaný počet je  $\binom{q+1}{p}$  pokud je  $p \leq q + 1$  a je roven 0, pokud  $p > q + 1$ .

**3.30. Příklad.** Bud' dán  $(c + m)$ -úhelník  $A_1, A_2, \dots, A_{c+m}$ , kde  $c, m \in \mathbb{N}$ ,  $c + m \geq 3$ . Kolika způsoby lze obarvit jeho vrcholy tak, aby jich bylo  $c$  červených,  $m$  modrých a žádné dva sousední vrcholy nebyly červené?

Označme hledaný počet obarvení  $t(c, m)$ . Je zřejmé, že pro  $c > m$  je  $t(c, m) = 0$ . Necht' tedy  $c \leq m$ . Úlohu lehce vyřešíme pomocí úlohy 3.29. Označíme-li výsledek příkladu 3.29 symbolem  $r(p, q)$ , je zřejmé takových „přípustných“ obarvení vrcholů, při nichž je vrchol  $A_1$  červený, celkem  $r(c - 1, m - 2)$ . Přípustných obarvení, při nichž je  $A_1$  modrý, je  $r(c, m - 1)$ . Odtud

$$t(c, m) = r(c - 1, m - 2) + r(c, m - 1) = \binom{m - 1}{c - 1} + \binom{m}{c} = \frac{c + m}{m} \binom{m}{c}.$$

**3.31. Příklad.** Muž prodávající Večerník (za 5 korun) u sebe nemá na začátku prodeje žádné peníze. Ihned se před ním utvořila fronta  $m + k$  lidí, přičemž  $m$  lidí má u sebe pouze desetikorunovou minci a  $k$  lidí pouze pětikorunu. Kolika způsoby se tito lidé mohou postavit do fronty tak, aby měl prodávající vždy nazpět na desetikorunu? (Rozlišujeme rozestavení „pětikorun“ a „desetikorun“ a nikoliv jednotlivé lidi se stejnou mincí.)

Počet všech možných rozestavení „pětikorun“ a „desetikorun“ do fronty je počet příslušných permutací s opakováním, tj.

$$P(m, k) = \frac{(m + k)!}{m! \cdot k!} = \binom{m + k}{k}.$$

Dále je zřejmé, že úloha má alespoň jedno řešení právě tehdy, když  $m \leq k$ ; jinak se totiž prodej nutně zastaví. V dalším tedy předpokládáme, že platí  $0 \leq m \leq k$ .

Každé rozestavení lidí ve frontě můžeme evidentně zapsat jako posloupnost  $m$  jedniček (označujících lidi s desetikorunou) a  $k$  pětěk (označujících lidi s pětikorunou). Podle zadání hledáme počet „příznivých“ permutací, tj. takových permutací  $(a_1, \dots, a_{k+m})$   $m$  jedniček a  $k$  pětěk, které mají následující vlastnost: pro každé  $d$  takové, že  $1 \leq d \leq m + k$  je mezi prvky  $a_1, \dots, a_d$  alespoň tolik pětěk jako jedniček.

Nejprve dokážeme, že počet *nepříznivých* případů je roven číslu

$$P(m - 1, k + 1) = \binom{m + k}{k + 1}.$$

Necht' tedy  $a_1, \dots, a_{k+m}$  je nějaká nepříznivá permutace. Necht'  $d_0$  je nejmenší index takový, že mezi prvky  $a_1, \dots, a_{d_0}$  je více jedniček než pětěk. Pak zřejmě  $d_0 = 2s + 1$ , přičemž mezi prvky  $a_1, \dots, a_{2s}$  je  $s$  jedniček a  $s$  pětěk. Připíšeme-li před zadanou permutaci jednu pětku, dostaneme tak permutaci  $m$  jedniček a  $k + 1$  pětěk. V této permutaci stojí na prvním místě pětka a mezi prvními  $2s + 2$  členy je nyní  $s + 1$  jedniček a  $s + 1$  pětěk.

Nyní v permutaci  $5, a_1, \dots, a_{k+m}$  zaměňme na prvních  $2s + 2$  místech vzájemně pětky a jedničky. Původní nepříznivé permutaci  $a_1, \dots, a_{k+m}$  tak popsaným způsobem přiřadíme permutaci  $m$  jedniček a  $k + 1$  pětek, v níž na prvním místě stojí cifra 1. Přitom je zřejmé, že různým nepříznivým permutacím jsou přiřazeny různé permutace uvedeného typu.

Nyní ukážeme, že každá posloupnost  $m$  jedniček a  $k + 1$  pětek s jedničkou na začátku je přiřazena některé nepříznivé permutaci.

Buď tedy  $b_0, b_1, \dots, b_{k+m}$  libovolná permutace  $m$  jedniček a  $k + 1$  pětek,  $b_0 = 1$ . Protože platí  $m \leq k$  (podle předpokladu), existuje nejmenší index  $d_0$  takový, že mezi členy  $b_0, b_1, \dots, b_{d_0}$  je stejný počet jedniček jako pětek. Zaměníme-li v posloupnosti  $b_0, b_1, \dots, b_{d_0}$  vzájemně jedničky a pětky a pak vynecháme první cifru (tj. pětku), dostaneme zřejmě onu nepříznivou permutaci, již je přiřazena daná permutace  $b_0, b_1, \dots, b_{k+m}$ .

Zjistili jsme tak, že počet všech nepříznivých rozestavení fronty kupujících je roven počtu všech permutací, v nichž je  $m$  jedniček a  $k + 1$  pětek a v nichž na prvním místě stojí jednička. Vynecháme-li tuto první jedničku, dostaneme právě všechny permutace  $m - 1$  jedniček a  $k + 1$  pětek, jichž je  $P(m - 1, k + 1) = \binom{m+k}{k+1}$ . Protože všech permutací je, jak jsme již uvedli,

$P(m, k) = \binom{m+k}{k} = \binom{m+k}{m}$ , je počet všech příznivých permutací  $\binom{m+k}{m} - \binom{m+k}{m-1} = \frac{k - m + 1}{k + 1} \binom{m+k}{m}$ .

Je-li zejména  $m = k$ , tj. ve frontě je stejný počet lidí s desetikorunou jako s pětikorunou, může stát fronta bez zdržování celkem

$$\frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$$

způsoby.

### Cvičení

#### 1. Kolika způsoby můžeme na šachovnici vybrat

- (a) dvě pole (2016)
- (b) dvě pole různých barev (1024)
- (c) dvě pole neležící ve stejné řadě ani ve stejném sloupci (1568)
- (d) dvě pole různé barvy splňující podmínku (c) (768)

#### 2. Necht' $p_1, \dots, p_n$ jsou navzájem různá prvočísla, $k_1, \dots, k_n$ buďte libovolná přirozená čísla. Určete součet všech dělitelů čísla

$$q = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}.$$

(Mezi dělitele počítáme i čísla 1 a  $q$ .)

$$\left( \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_n^{k_n+1} - 1}{p_n - 1} \right)$$

3. Kolik existuje šesticiferných čísel, v nichž se vyskytují tři liché a tři sudé cifry?  
(281 250)
4. Stěny každé ze tří hracích kostek jsou očíslovány čísly 1, 4, 13, 40, 121 a 364. Kolik různých součtů lze získat při hodu těmito kostkami?  
(56)
5. Máme čtyři bílé koule, čtyři černé koule a čtyři červené koule. Kolika způsoby je můžeme rozdělit do 6 rozlišitelných přihrádek?  
(2 000 376)
6. Havajská abeceda má 12 písmen: samohlásky  $a, e, i, o, u$ , souhlásky  $h, k, l, m, n, p, w$ .
- Dokažte, kolik lze vytvořit slov o čtyřech písmenech.
  - Kolik z uvedených slov má na druhém a čtvrtém místě samohlásku a na zbývajících místech souhlásku?
  - Kolik slov má na druhém a čtvrtém místě samohlásku?
7. Každý člověk má dva (biologické) rodiče, 4 prarodiče atd. Kolik předků má každý z nás ve 20 předešlých generacích (cca v posledním půl tisíciletí)?
8. *Palindrom* je posloupnost symbolů, která je stejná, čteme-li je zepředu i zezadu (například „tabat“). Určete počet sedmiciferných a osmiciferných palindromů (v dekadickém zápisu), nesmí-li se žádná číslice užít více než dvakrát.
9. Dokažte, že každé palindromické číslo sudé délky je dělitelné číslem 11.
10. Určete celkový počet přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se neopakuje žádná cifra.
11. V městské radě je 10 zástupců levice a 11 zástupců pravice. Levici zastupují 4 ženy, pravici 3 ženy. Určete, kolika způsoby lze sestavit osmičlenný výbor, v němž má být stejný počet zástupců levice i pravice a stejný počet mužů i žen.

## 4 Rozklady konečných množin

Víme, že *rozkladem na množině*  $A$  rozumíme systém  $\overline{A}$  neprázdných po dvou disjunktních množin, jejichž sjednocením je množina  $A$ . Prvky systému  $\overline{A}$  nazýváme *třídy rozkladu*  $\overline{A}$ . Systém  $\mathcal{K}(A)$  všech rozkladů na množině  $A$  uspořádáme relací  $\leq$  definovanou pomocí *zjemnění*, tj. pro  $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathcal{K}(A)$  platí

$$\overline{X} \leq \overline{Y} \iff (U \in \overline{X}, V \in \overline{Y}, U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow U \subseteq V).$$

Snadno lze dokázat, že  $(\mathcal{K}(A), \leq)$  je úplný svaz izomorfní s úplným svazem  $(\mathcal{E}(A), \subseteq)$  všech ekvivalencí na množině  $A$ .

V tomto paragrafu určíme  $|\mathcal{K}(A)|$  pro konečnou množinu  $A$  a určíme počet rozkladů na třídy o jistých předepsaných vlastnostech.

**4.1. Definice.** Označme  $B_n$  počet všech rozkladů na  $n$  prvkové množině,  $n \in \mathbb{N}$ . Čísla  $B_n$  se nazývají *Bellova čísla*.

Bellova čísla se často vyskytují v řadě aplikací. Nejprve odvodíme rekurentní formuli pro jejich výpočet.

### 4.2. Věta.

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k, \quad B_0 = 1.$$

**Důkaz.** Předpokládejme, že známe čísla  $B_1, \dots, B_n$  a chceme určit číslo  $B_{n+1}$ . Buď  $X$  libovolná množina o  $n$  prvcích. Buď  $a \notin X$  libovolný prvek. Položíme-li  $X_1 = X \cup \{a\}$ , je  $|X_1| = n + 1$ .

Buď  $\overline{X}_1$  libovolný rozklad množiny  $X_1$ . Prvek  $a$  leží v některé třídě rozkladu  $\overline{X}_1$ . Tato třída může mít  $1, 2, \dots, n + 1$  prvků.

Spočtemě, kolik je na  $\overline{X}_1$  rozkladů takových, že prvek  $a$  leží ve třídě o  $k$  prvcích. Zbývajících  $k - 1$  prvků v této třídě můžeme z množiny  $X_1$  vybrat  $\binom{n}{k-1}$  způsoby. Máme-li utvořenu třídu obsahující prvek  $a$ , můžeme na zbývajících  $n - k + 1$  prvcích zvolit libovolný rozklad. Podle předpokladu je těchto rozkladů  $B_{n-k+1}$ . Podle pravidla součinu odtud plyne, že prvek  $a$  leží v  $k$ -prvkové třídě ( $k = 1, \dots, n + 1$ ) v

$$\binom{n}{k-1} B_{n-k+1} = \binom{n}{n-k+1} B_{n-k+1}$$

rozkladech.  $B_0$  přitom značí počet rozkladů, kdy  $a$  leží ve třídě o mohutnosti  $n + 1$ , tj.  $B_0 = 1$ .

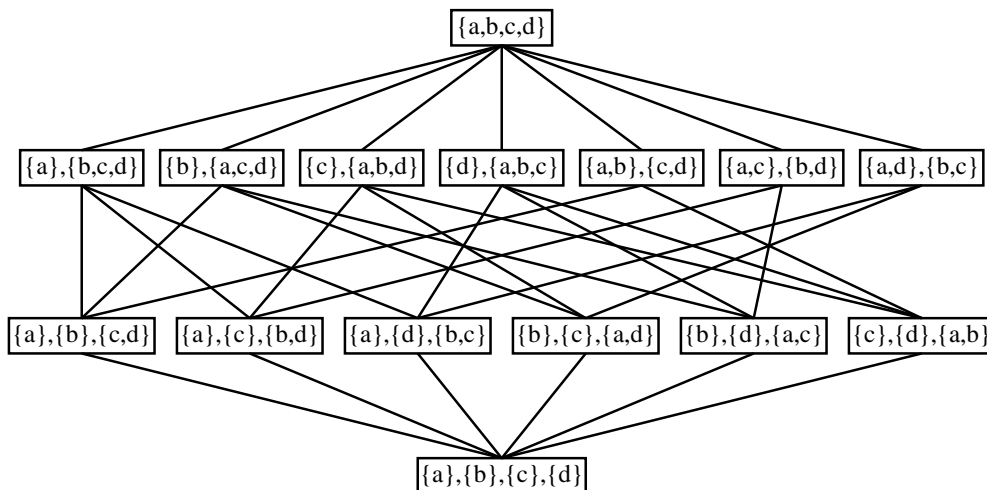
Počet všech rozkladů na  $X_1$  je roven součtu všech výše uvedených možností. To je však právě dokazovaná formule. •



**4.3. Příklad.** Z rekurentní formule 4.2 okamžitě plyne:

$$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 15, B_5 = 52, B_6 = 203, \dots$$

**4.4. Poznámka.** Podle příkladu 4.3 existuje na 4-prvkové množině  $\{a, b, c, d\}$  celkem 15 rozkladů. S uspořádáním popsaným v úvodu paragrafu tvoří tyto rozklady úplný svaz, jehož hasseovský diagram je na obr. 4.4.



Obr. 4.4: Svaz rozkladů čtyřprvkové množiny

Podle počtu prvků v jednotlivých třídách výše uvedeného rozkladu je největší prvek prvkem „typu“ 4, nejmenší prvek je prvkem typu  $1+1+1+1$ , pod největším prvkem leží rozklady typu  $1+3$ , respektive  $2+2$  a konečně nejmenší prvek pokrývají prvky typu  $1+1+2$ .

Tento intuitivně zcela zřejmý popis nyní precizujeme.

**4.5. Definice.** Buď  $A$  konečná množina. Nechť rozklad  $\bar{A}$  obsahuje  $\lambda_i$  tříd mohutnosti  $i$ , ( $i = 1, \dots, k$ ) a neobsahuje třídu o mohutnosti větší než  $k$ . Pak říkáme, že  $\bar{A}$  je *rozklad typu*

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\lambda_1} + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{\lambda_2} + \dots + \underbrace{k + k + \dots + k}_{\lambda_k}.$$

nebo též typu

$$1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots k^{\lambda_k}.$$

**4.6. Příklad.** Rozklad množiny  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  na třídy  $\{1\}$ ,  $\{2, 4\}$ ,  $\{3, 6\}$ , a  $\{5\}$  je rozklad typu  $1+1+2+2$  nebo též typu  $1^2 2^2$ .

**4.7. Věta.** Počet rozkladů typu  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots k^{\lambda_k}$  na  $n$ -prvkové množině je roven číslu

$$\frac{n!}{(1!)^{\lambda_1} \cdot (2!)^{\lambda_2} \dots (k!)^{\lambda_k} \cdot \lambda_1! \cdot \lambda_2! \dots \lambda_k!}$$

pokud  $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + k\lambda_k = n$ . Je-li  $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + k\lambda_k \neq n$ , je počet rozkladů uvedeného typu roven nule.

**Důkaz.** Je zřejmé, že rozklad typu  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots k^{\lambda_k}$  na  $n$ -prvkové množině existuje právě tehdy, když  $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + k\lambda_k = n$ , neboť počet prvků jednotlivých tříd je roven počtu prvků celé množiny (neboť třídy rozkladu jsou po dvou disjunktní). Určíme tedy počet rozkladů daného typu za předpokladu  $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + k\lambda_k = n$ .

Každý rozklad typu  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots k^{\lambda_k}$  vznikne tak, že v následujícím schématu

$$\underbrace{\{x\}, \dots, \{x\}}_{\lambda_1}, \underbrace{\{x, x\}, \dots, \{x, x\}}_{\lambda_2}, \dots, \underbrace{\{x, x, \dots, x\}}_k, \dots, \underbrace{\{x, x, \dots, x\}}_k$$

místo  $x$  vepíšeme postupně nějakou permutaci prvků dané  $n$ -prvkové množiny. Těchto permutací je  $n!$ . Různé permutace však neudávají nutně různé rozklady. Především udávají též rozklad permutace, lišící se jen pořadím tříd o stejné mohutnosti. Protože tříd o mohutnosti  $i$  je  $\lambda_i$ , můžeme z těchto tříd utvořit  $\lambda_i!$  různých permutací. Celkový počet  $n!$  všech permutací je proto nutno vydělit číslem  $\lambda_1! \cdot \lambda_2! \dots \lambda_k!$ . Pořadí prvků v každé třídě rozkladu, která má  $i$  prvků, lze zapsat  $i!$  možnostmi. Protože těchto tříd je  $\lambda_i$ , můžeme pořadí prvků ve všech těchto třídách zapsat celkem  $\underbrace{i! \cdot i! \dots i!}_{\lambda_i} = (i!)^{\lambda_i}$  způsoby, aniž se změní množiny, tvořící jednotlivé

třídy. Celkový počet permutací je tak nutno vydělit ještě číslem  $(1!)^{\lambda_1} \cdot (2!)^{\lambda_2} \dots (k!)^{\lambda_k}$ . Odtud již plyne dokazované tvrzení. •

**4.8. Příklad.** Na čtyřprvkové množině má podle věty 4.7 existovat

$$\frac{4!}{(1!)^2 \cdot (2!)^1 \cdot 2! \cdot 1!} = 6$$

rozkladů typu  $1^2 2^1$ . Na obrázku 4.4 vidíme, že tomu tak opravdu je.

**4.9. Definice.** Buďte  $n \geq m$  přirozená čísla. Označme  $S(n, m)$  počet rozkladů  $n$ -prvkové množiny na  $m$  tříd. Čísla  $S(n, m)$  se nazývají *Stirlingova čísla 2. druhu*. Dále definitoricky klademe  $S(0, 0) = 1$ ,  $S(0, n) = 0$  pro  $n \in \mathbb{N}$ .

**4.10. Příklad.** Z obrázku 4.4 je vidět, že například  $S(4, 2) = 7$ .

**4.11. Věta.** *Budte  $X, Y$  neprázdné konečné množiny,  $|X| = n$ ,  $|Y| = k$ ,  $n \geq k$ . Pak pro množinu  $\text{surj}(Y^X)$  všech surjekcí  $X$  na  $Y$  platí*

$$|\text{surj}(Y^X)| = k! \cdot S(n, k).$$

**Důkaz.** Bud'  $f: X \rightarrow Y$  surjekce. Tato surjekce určuje rozklad množiny  $X$  na  $k$  tříd; jednotlivé třídy jsou úplné vzory prvků množiny  $Y$ . Každý rozklad množiny  $X$  na  $k$  tříd přitom určuje  $k!$  surjekcí  $X$  na  $Y$ . Odtud plyne tvrzení. •

**4.12. Věta.**

$$\begin{aligned} S(n+1, k) &= S(n, k-1) + k \cdot S(n, k) \quad \text{pro } 1 < k < n, \\ S(n, n) &= S(n, 1) = 1. \end{aligned}$$

**Důkaz.** Představme si všechny rozklady  $(n+1)$ -prvkové množiny  $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$  na  $k$  tříd. V některých rozkladech tvoří prvek  $a_{n+1}$  jednoprvkovou třídu. Těchto rozkladů je  $S(n, k-1)$ . Ve všech ostatních rozkladech je prvek  $a_{n+1}$  prvkem některé třídy o více prvcích. Prvek  $a_{n+1}$  je tedy v těchto rozkladech přidán k některé třídě rozkladu množiny  $\{a_1, \dots, a_n\}$  na  $k$  tříd. Těchto rozkladů je  $S(n, k)$  a prvek  $a_{n+1}$  můžeme přidat ke kterékoli z uvedených  $k$  tříd. Odtud plyne dokazovaná formule. •

**4.13. Poznámka.** Rekurentní formule z věty 4.12 nám umožňuje postupně počítat hodnoty čísel  $S(n, k)$ . V tabulce na straně 154 uvádíme některé hodnoty Stirlingových čísel druhého druhu. Této tabulce se také říká *Stirlingův trojúhelník*.

Z Pascalova a Stirlingova trojúhelníka lze snadno odvodit tabulku 1.2, shrnující výsledky tvrzení 3.8, 3.12 a 4.11 o zobrazeních  $n$ -prvkové množiny do množiny  $k$ -prvkové.

Pro  $n < k$  je počet injekcí zřejmě  $(k)_n = n! \binom{n}{k}$  a pro  $n = k$  je počet bijekcí  $n!$ .

**4.14. Věta.** *Pro všechna reálná  $x$  a každé přirozené  $n$  platí*

$$x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)(x)_k.$$

**Důkaz.** Necht'  $|A| = m \leq |X| = n$ . Počet zobrazení  $X$  do  $A$  je podle příkladu 3.20 roven číslu  $m^n$ . Bud' nyní  $f: X \rightarrow A$  libovolné zobrazení. Pak je  $f$  surjekce  $X$  na množinu  $f(X) = A_1$ . Je-li  $|f(X)| = k$ , existuje podle věty 4.11 celkem  $k! \cdot S(n, k)$  surjekcí množiny  $X$  na množinu

	$k = 1$	2	3	4	5	6	...
$n = 1$	<b>1</b>	2	3	4	5	6	...
2	1	<b>2</b>	6	12	20	30	...
3	1	6	<b>6</b>	24	60	120	...
4	1	14	36	<b>24</b>	120	360	...
5	1	30	150	240	<b>120</b>	720	...
6	1	62	540	1560	1800	<b>720</b>	...
⋮							

Tabulka 1.2: Pro  $n > k$  je počet surjekcí  $k!S(n, k)$ 

$A_1$ . Avšak  $k$ -prvkových podmnožin v  $A$  je  $\binom{m}{k}$ . Odtud plyne, že existuje  $\binom{m}{k} \cdot k! \cdot S(n, k)$  surjekcí  $X$  na  $k$ -prvkovou podmnožinu v  $A$ . Dokázali jsme tak, že

$$m^n = \sum_{k=1}^n \binom{m}{k} \cdot k! \cdot S(n, k) = \sum_{k=1}^n (m)_k \cdot S(n, k).$$

Polynomy  $n$ -tého stupně  $x^n$  a  $\sum_{k=1}^n S(n, k)(x)_k$  se tedy shodují v  $n + 1$  hodnotách  $0, 1, \dots, n$ . Jak z matematické analýzy víme, plyne odtud rovnost těchto polynomů. •

#### 4.15. Věta.

$$S(n + 1, k) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} S(i, k - 1).$$

**Důkaz.** Představme si rozklady  $(n+1)$ -prvkové množiny  $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$  na  $k$  tříd. Když v každém z těchto rozkladů vyškrtneme třídu obsahující prvek  $a_{n+1}$ , zůstanou nám právě všechny rozklady všech množin  $K \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$  na  $k - 1$  tříd. Odtud plyne dokazovaná formule. •

**4.16. Poznámka.** Z definice je zřejmá souvislost Bellových čísel se Stirlingovými čísly 2. druhu; platí

$$B_n = S(n, 1) + S(n, 2) + \dots + S(n, n) = \sum_{k=1}^n S(n, k).$$

Odtud a z věty 4.15 lze snadno odvodit rekurentní formuli z věty 4.2. Když pro jednoduchost

položíme  $S(n, k) = 0$  pro  $k > n$  (jak je to ostatně vyznačeno již v tabulce na straně 154), platí

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=1}^{\infty} S(n+1, k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot S(i, k-1) = \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left( \sum_{k=1}^{\infty} S(i, k-1) \right) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B_i. \end{aligned}$$

Pro Bellova čísla je známa řada důležitých vztahů. Na ukázkou si odvodíme alespoň dva z nejběžnějších.

**4.17. Věta.** Pro každé reálné číslo  $t$  platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = e^{(e^t-1)}.$$

**Důkaz.** Uvedený vztah odvodil již E. T. Bell v roce 1934. My však uvedeme elegantní důkaz, který v roce 1964 uveřejnil americký matematik G. C. Rota.

Označme  $F$  množinu všech reálných funkcí  $\varphi(x)$  definovaných vztahem

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot (x)_n, \quad \text{kde } \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < \infty.$$

Definujeme-li sčítání funkcí z  $F$  a násobení těchto funkcí reálnými čísly obvyklým způsobem, utvoříme zřejmě z  $F$  vektorový prostor.

Připomeňme si, že když  $V$  je nějaký vektorový prostor a  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  je zobrazení (takovým zobrazením se říká *funkcionál*), nazývá se  $f$  *lineární funkcionál*, jestliže pro každé vektory  $\underline{u}, \underline{v}$  a každá reálná čísla  $\alpha, \beta$  platí

$$f(\alpha \underline{u} + \beta \underline{v}) = \alpha f(\underline{u}) + \beta f(\underline{v}).$$

Nyní ukážeme, že zobrazení  $L: F \rightarrow \mathbb{R}$  definované vztahem  $L(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$  je lineární funkcionál. Skutečně:

$$L(\beta\varphi + \gamma\varphi') = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta\alpha_n + \gamma\alpha'_n) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \alpha'_n = \beta L(\varphi) + \gamma L(\varphi').$$

Z věty 4.14 dále plyne (vzhledem k tomu, že zřejmě  $x^n \in F$ ):

$$L(x^n) = L\left(\sum_{k=1}^n S(n, k)(x)_k\right) = \sum_{k=1}^n S(n, k) = B_n.$$

Z matematické analýzy víme, že pro každé reálné číslo  $x$  platí  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Odtud plyne, že  $e^x \in F$ , neboť řada  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  konverguje. Nyní můžeme snadno spočítat hodnotu  $L(e^{tx})$ . Platí

$$L(e^{tx}) = L\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L\left(\frac{t^n x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n.$$

Položíme-li nyní  $e^t = 1 + u$ , obdržíme

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n &= L[(1+u)^x] = L\left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} u^n\right) = L\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)_n}{n!} u^n\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = e^u = e^{(e^t-1)}. \end{aligned}$$

**4.18. Poznámka.** V uvedeném důkazu jsme využili zobecněné binomické věty. Podrobněji o ní budeme, současně s dalšími podrobnostmi o mocninných řadách, hovořit v paragrafu 9.

V následující větě ukážeme rozvoj Bellových čísel v nekonečnou řadu.

**4.19. Věta.** (G. Dobinski)

$$B_{n+1} = \frac{1}{e} \left(1^n + \frac{2^n}{1!} + \frac{3^n}{2!} + \frac{4^n}{3!} + \dots\right) = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{(k-1)!}.$$

**Důkaz.** Platí

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k-n)!} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k)_n}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k)_n}{k!},$$

(neboť pro  $k = 0, \dots, n-1$  je  $(k)_n = 0$ ). Pro funkcionál  $L$  definovaný v důkazu věty 4.17 platí:

$$L[(x)_n] = 1 = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k)_n}{k!}.$$

Pro funkci  $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x)_n$  odtud plyne

$$L[\varphi(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e} \frac{(k)_n}{n!} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x)_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k!}.$$

Položíme-li  $\varphi(x) = x^{n+1}$ , obdržíme dokazovanou formuli. •

### Cvičení

1. Povšimněme si zajímavé skutečnosti: čísla

$$\begin{aligned} 2 + 1 &= 3 \\ 2 \times 3 + 1 &= 7 \\ 2 \times 3 \times 5 + 1 &= 31 \\ 2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 &= 211 \\ 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1 &= 2311 \end{aligned}$$

jsou prvočísla, avšak

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30\,031 = 59 \times 509$$

prvočíslo není. Uvedená faktorizace čísla 30 031 je však **jediná**, jeho předchůdce 30 030 však má 31 faktorizací. Popište, jak tento počet souhlasí s tím, že  $31 = S(6, 2)$ .

2. Dokažte, že

- $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$
- $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$
- $S(n+1, m) = S(n, m-1) + m \cdot S(n, m)$
- $S(n, m) = \sum_k \binom{n-1}{k} S(k, m-1)$

## 5 Princip inkluze a exkluze

Účinným prostředkem při řešení řady kombinatorických úloh je tzv. *princip inkluze a exkluze* (česky bychom mohli říci *principo vylučování a zapojování prvků*). Před jeho formulací si ukážeme, v čem spočívá jeho podstata.

Buďte  $M_1, M_2$  libovolné konečné množiny. Pak zřejmě platí

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|.$$

Pro tři množiny je zřejmé, že mohutnost jejich sjednocení obecně neobdržíme, když od součtu jejich mohutností odečteme mohutnosti průniků všech dvojic těchto množin. Některé prvky bychom totiž mohli odečíst dvakrát — a sice ty prvky, které leží v průniku všech tří těchto množin. Zřejmě tak platí

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|.$$

Zobecněním popsaného procesu obdržíme následující princip inkluze a exkluze.

**5.1. Věta.** *Bud' dána konečná množina  $M$ . Necht' prvky množiny  $M$  mohou mít vlastnosti  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Symbolem  $M(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}, \alpha'_{j_1}, \alpha'_{j_2}, \dots, \alpha'_{j_p})$  označme počet všech prvků množiny  $M$ , které mají vlastnosti  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$  a nemají žádnou z vlastností  $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_p}$  (bez ohledu na to, mají-li nebo nemají vlastnosti, které ve výčtu  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}, \alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_p}$  nejsou uvedeny). Pak platí*

$$M(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) = |M| - \sum_{i=1}^n M(\alpha_i) + \sum_{i<j} M(\alpha_i, \alpha_j) - \sum_{i<j<k} M(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) + \dots + (-1)^n M(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

**Důkaz.** Indukcí vzhledem k počtu vlastností.

(a) Pro jednu vlastnost je formule evidentně správná, neboť jistě platí

$$M(\alpha'_1) = |M| - M(\alpha_1).$$

(b) Necht' dokazovaná formule platí pro  $n - 1$  vlastností, tj. platí

$$M(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1}) = |M| - \sum_{i=1}^{n-1} M(\alpha_i) + \sum_{i<j} M(\alpha_i, \alpha_j) - \dots + (-1)^{n-1} M(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}). \quad (5.1.)$$

Odtud však plyne, že pro prvky, které mají vlastnost  $\alpha_n$ , platí

$$M(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1}, \alpha_n) = M(\alpha_n) - \sum_{i=1}^{n-1} M(\alpha_i, \alpha_n) + \dots + (-1)^{n-1} M(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n). \quad (5.2.)$$

Když nyní od 5.1. odečteme rovnost 5.2., dostaneme na pravé straně pravou stranu dokazované formule. Na levé straně obdržíme rozdíl

$$M(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1}) - M(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1}, \alpha_n),$$

což je ovšem právě  $M(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1}, \alpha'_n)$ . •



**5.2. Příklad.** V jistém závodě zhotovili následující přehled o svých zaměstnancích:

*V závodě pracuje celkem 250 mužů a 200 žen. Předepsanou kvalifikaci má 160 mužů a 140 žen. Do práce dojíždí 180 mužů a 100 žen. Kvalifikovaných mužů dojíždí 150, kvalifikovaných žen 20.*

Dokážeme, že uvedené hlášení je nepravdivé.

V závodě pracuje celkem 450 zaměstnanců. Označme nyní možné vlastnosti zaměstnanců následovně:  $\alpha_1$  značí příslušnost k mužskému pohlaví,  $\alpha_2$  dosažení předepsané kvalifikace,  $\alpha_3$  dojíždění. Z hlášení plyne, že  $M(\alpha_1) = 250$ ,  $M(\alpha_2) = 300$ ,  $M(\alpha_3) = 280$ ,  $M(\alpha_1, \alpha_2) = 160$ ,  $M(\alpha_1, \alpha_3) = 180$ ,  $M(\alpha_2, \alpha_3) = 170$  a konečně  $M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 150$ . Spočtíme  $M(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ , tj. počet nekvalifikovaných nedojíždějících žen. Podle principu inkluze a exkluze platí:

$$M(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3) = 450 - 250 - 300 - 280 + 160 + 180 + 170 - 150 = -20,$$

což není možné. Proto musí být alespoň jeden údaj v hlášení nepravdivý.

**5.3. Věta.** (Speciální případ principu inkluze a exkluze) *Necht' ve větě 5.1 pro každé  $k = 1, \dots, n$  a pro každou kombinaci vlastností  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$  závisí číslo  $M(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}) = M(k)$  pouze na počtu těchto vlastností. Pak platí*

$$M(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = |M| - \binom{n}{1}M(1) + \binom{n}{2}M(2) - \binom{n}{3}M(3) + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}M(n).$$

**Důkaz.** Důkaz je zcela zřejmý. •

**5.4. Příklad.** Zabývejme se následujícím problémem, v matematické literatuře známým pod názvem „Problème des Rencontres“.

Označme  $S_n$  množinu všech permutací množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ , tj. množinu všech bijekcí  $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . (Víme, že  $|S_n| = n!$ .) Naším úkolem je zjistit, kolik z těchto permutací nemá ani jeden pevný bod. (Připomeňme si, že  $x$  je pevný bod zobrazení  $f$ , když  $f(x) = x$ .)

Bud'  $f \in S_n$ . Řekneme, že  $f$  má vlastnost  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), jestliže  $f(i) = i$ . Naším úkolem je tedy určení čísla  $M(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ . Přitom je zřejmé, že můžeme aplikovat větu 5.3 a platí

$$M(1) = (n-1)!, \quad M(2) = (n-2)!, \quad \dots, \quad M(k) = (n-k)! \quad \text{atd.}$$

Proto

$$\begin{aligned}
 M(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \\
 &\quad + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)! = \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} (n-k)! = \\
 &= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).
 \end{aligned}$$

**5.5. Příklad.** Pomocí příkladu 5.4 snadno vyřešíme následující tzv. *problém šatnářky*.

*Představme si, že do šatny odevzdalo  $n$  osob svůj klobouk. Jaká je pravděpodobnost  $q_n$  toho, že když všichni ztratili lístek od šatny a šatnářka jim klobouky při odchodu vydávala zcela nahodile, dostal alespoň jeden člověk svůj klobouk?*

K šatně mohlo  $n$  osob přicházet celkem v  $n!$  pořadích. (Přitom samozřejmě předpokládáme, že všechna pořadí jsou stejně pravděpodobná.) Z příkladu 5.4 okamžitě plyne, že pravděpodobnost toho, že nikdo nedostane svůj klobouk, je rovna číslu

$$p_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Pravděpodobnost toho, že alespoň jeden člověk svůj klobouk dostane, je proto

$$q_n = 1 - p_n = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}.$$

**5.6. Poznámka.** Jak jsme uvedli již v důkazu věty 4.17, platí pro každé reálné číslo  $x$  vztah  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Zejména tedy platí

$$e^{-1} = \frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n.$$

Odtud plyne, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1 - \frac{1}{e}$  ( $\doteq 0,632\ 121\ \dots$ ). Navíc posloupnost  $(q_n)_{n=1}^{\infty}$  konverguje „velmi rychle“, neboť například

$$q_1 = 1; q_2 = 0,5; q_3 = 0,6\bar{6}; q_4 = 0,625; q_5 = 0,6\bar{3}; \dots; q_8 = 0,632\ 11\ \dots$$

Odtud plyne překvapující zjištění, že *pravděpodobnost  $q_n$  se s rostoucím  $n$  prakticky nemění*.

**5.7. Příklad.** Metodou inkluze a exkluze lze vyřešit i jiný známý kombinatorický problém, tzv. *úlohu o hostech* (v literatuře běžně nazývanou *Problème des Ménages*).

Formulace tohoto problému je jednoduchá: *Kolika způsoby můžeme rozsadit kolem kulatého stolu  $n$  manželských párů tak, aby se muži a ženy pravidelně střídali a žádní dva manželé přitom neseděli vedle sebe?*

Nejprve se dohodněme, která rozesazení budeme považovat za různá. Úlohu vyřešíme nejprve tak, že dvě rozesazení budeme považovat za různá, existuje-li alespoň jedna židle, která je v těchto rozesazeních obsazena různými osobami. Když tento výsledek vydělíme číslem  $2n$ , nerozlišujeme rozesazení, z nichž jedno vzniklo „pootočením“ druhého.

Všechna rozesazení rozdělme do  $2 \cdot n!$  disjunktních skupin podle toho, jak se rozesadí ženy. Nyní určíme počet rozesazení v těchto skupinách.

Nechť jsou tedy ženy již jistým způsobem rozesazeny. Hledáme počet  $r(n)$  všech rozesazení mužů, při nichž žádný muž nesedí vedle své ženy.

Všech možných rozesazení mužů je  $n!$ . Označme  $\alpha_i$  následující vlastnost těchto rozesazení:  $i$ -tý muž sedí vedle své ženy. Pak platí:

$$r(n) = n! - \sum_{i=1}^n M(\alpha_i) + \sum_{i<j} M(\alpha_i, \alpha_j) - \sum_{i<j<k} M(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) + \dots + (-1)^n M(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Uvědomme si, že v tomto případě nemůžeme užít speciálního případu principu inkluze a exkluze. Pro různé  $k$ -tice vlastností  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$  jsou totiž čísla  $M(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$  obecně značně odlišná. Je totiž zřejmé, že sedí-li příslušné ženy „pohromadě“, mají jejich muži podstatně méně možností k rozesazení, než když jsou jejich ženy rozptýleny. Formální popis těchto závislostí je značně komplikovaný a tak výpočet jednotlivých hodnot  $M(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$  je prakticky vyloučený. Naštěstí je snadné spočítat součet  $\sum_{i_1 < \dots < i_k} M(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$ . Tato suma udává počet všech rozesazení, kdy každá  $k$ -tice mužů sedí vedle svých žen (bez ohledu na to, jak jsou rozmístěni další muži).

Kolem stolu je rozmístěno  $2n$  židlí a mezi nimi je  $2n$  mezer. Představme si, že některá  $k$ -tice mužů sedí vedle svých žen a označme  $k$  mezer mezi těmi židlemi, na nichž sedí příslušné manželské páry. Žádné dvě z těchto mezer nyní nemohou být vedle sebe, protože v tom případě by některý muž musel mít z obou stran svou ženu nebo by některá žena měla z obou stran svého muže.

Z uvedeného plyne, že počet všech rozesazení, kdy některá  $k$ -tice mužů sedí vedle svých žen, je roven počtu způsobů, jak z  $2n$  mezer vybrat  $k$ -tici tak, aby žádné dvě vybrané mezery nebyly vedle sebe. Toto číslo však umíme jednoduše spočítat podle příkladu 3.30; číslo

$$t(k, 2n - k) = \frac{2n}{2n - k} \binom{2n - k}{k}$$

udává počet rozesazení, kdy právě  $k$  mužů sedí vedle svých žen. Při určování čísel  $M(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$  však zbývajících  $n - k$  mužů může být rozesazeno jakkoliv, tj.

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} M(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}) = (n - k)! \frac{2n}{2n - k} \binom{2n - k}{k},$$

takže

$$\begin{aligned} r(n) &= n! - (n - 1)! \frac{2n}{2n - 1} \binom{2n - 1}{1} + (n - 2)! \frac{2n}{2n - 2} \binom{2n - 2}{2} - \dots + \\ &+ (-1)^n (n - n)! \frac{2n}{n} \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k (n - k)! \frac{2n}{2n - k} \binom{2n - k}{k}. \end{aligned}$$

Číslo  $r(n)$  udává počet řešení při zadaném rozesazení žen. Řešením úlohy o hostech je tedy číslo

$$2 \cdot n! \sum_{k=0}^n (-1)^k (n - k)! \frac{2n}{2n - k} \binom{2n - k}{k}.$$

Že nemá naději na úspěch snaha najít všechna řešení jejich výčtem, plyne z toho, že již například pro  $n = 6$  je těchto možností 115 200.

Metodou inkluze a exkluze lze snadno řešit i některé problémy z teorie čísel. Na ukázkou odvodíme tzv. *Eulerovu funkci*  $\varphi(n)$ .

**5.8. Příklad.** Pro každé přirozené číslo  $n > 1$  označme  $\varphi(n)$  počet těch přirozených čísel menších než  $n$ , která jsou s číslem  $n$  nesoudělná.

Odvodíme formuli pro výpočet hodnot funkce  $\varphi(n)$ .

Víme, že každé přirozené číslo  $n$  lze jednoznačně rozložit na součin prvočinitelů. Necht' tedy

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}$$

je tento rozklad (tj.  $p_1, \dots, p_k$  jsou všechna navzájem různá prvočísla dělicí číslo  $n$ ).

Pro každé  $i = 1, \dots, k$  označme  $\alpha_i$  vlastnost: přirozené číslo je dělitelné prvočíslem  $p_i$ . Je zřejmé, že mezi čísly  $1, \dots, n$  je čísel s vlastností  $\alpha_i$  právě  $\frac{n}{p_i}$ .

Podle principu inkluze a exkluze platí

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - \sum_i M(\alpha_i) + \sum_{i < j} M(\alpha_i, \alpha_j) - \dots + (-1)^k M(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \\ &= n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{n}{p_i p_j} - \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 \dots p_k}, \end{aligned}$$

neboť mezi čísla  $i = 1, \dots, n$  je zřejmě  $\frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_s}}$  dělitelných čísla  $p_{i_1} \dots p_{i_s}$ . Dále je však zřejmé, že platí

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = 1 - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{n}{p_i p_j} - \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 \dots p_k}.$$

Dokázali jsme tak, že

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = n \cdot \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Známe-li tedy rozklad čísla  $n$  na součin prvočinitelů, lze hodnotu  $\varphi(n)$  snadno spočítat. Například  $1\,000\,000 = 10^6 = 2^6 \cdot 5^6$ , takže

$$\varphi(1\,000\,000) = 1\,000\,000 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 400\,000.$$

**5.9. Příklad.** Pomocí principu inkluze a exkluze odvodíme formuli pro  $|\text{surj}(Y^X)|$ .

Nechť tedy jsou  $X, Y$  konečné množiny,  $|X| = n$ ,  $|Y| = k$ . Nechť  $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ . Podle příkladu 3.20 víme, že  $|Y^X| = k^n$ .

Řekneme, že prvek  $f \in Y^X$  má vlastnost  $\alpha_i$ , jestliže  $y_i \notin f(X)$ . Pak

$$\begin{aligned} |\text{surj}(Y^X)| &= k^n - \binom{k}{1} M(1) + \binom{k}{2} M(2) - \dots + (-1)^k M(k) = \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n. \end{aligned}$$

Ve větě 4.11 jsme však odvodili, že

$$|\text{surj}(Y^X)| = k! \cdot S(n, k).$$

Porovnáním uvedených dvou formulí pro výpočet počtu surjekcí jedné konečné množiny na druhou obdržíme následující formuli pro Stirlingova čísla 2. druhu:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

### Cvičení

1. Funkce  $f$  definovaná na podmnožině množiny  $\mathbb{N}$  se nazývá *multiplikativní*, když její definiční obor je uzavřený vzhledem k násobení a pro každá dvě nesoudělná čísla  $x, y$  platí  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ . Dokažte, že Eulerova funkce  $\varphi(n)$  (viz 5.8) je multiplikativní.
2. *Möbiova funkce*  $\mu(n)$  je pro  $n \in \mathbb{N}$  definována následovně:  $\mu(n)$  nabývá hodnoty 1, pokud je  $n$  součinem sudého počtu navzájem různých prvočísel, hodnoty  $-1$ , pokud je  $n$  součinem lichého počtu navzájem různých prvočísel a konečně je rovno 0 v ostatních případech.

Dokažte, že

$$\varphi(n) = n \cdot \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d},$$

kde se sčítá přes všechny dělitele čísla  $n$  (včetně 1 a  $n$ ).

3. Dokažte, že Möbiova funkce je multiplikativní
3. V počítačové učebně je 30 počítačů, z nichž 20 běží pod operačním systémem Windows, osm má 21" monitor, 25 má instalován CD-ROM, 20 má alespoň dva z těchto atributů a 6 má všechny tři.
  - a) Kolik počítačů má alespoň jednu z uvedených vlastností?
  - b) Kolik počítačů nemá žádnou z nich?
  - c) Kolik počítačů má právě jednu z vlastností?

## 6 Rozklady přirozených čísel na sčítance

V tomto paragrafu se budeme zabývat následujícím problémem: *budte  $n, k$  přirozená čísla. Kolika způsoby lze číslo  $n$  rozložit na  $k$  přirozených sčítanců?*

Je zřejmé, že pro  $k > n$  je tento počet roven nule, pro  $k = 1$  nebo  $k = n$  je pak roven jedné. Pro  $2 \leq k \leq n - 1$  je těchto možností více. Musíme se však dohodnout, která rozložení čísla  $n$  budeme považovat za různá. Konkrétně jde o to, zda nám záleží nebo nezáleží na pořadí sčítanců.

Nejprve vyřešíme jednodušší případ, kdy pořadí sčítanců rozlišujeme.

**6.1. Definice.** Kompozicí čísla  $n$  na  $k$  sčítanců rozumíme každou uspořádanou  $k$ -tici  $[x_1, \dots, x_k]$  přirozených čísel takovou, že

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n.$$

Počet všech kompozicí čísla  $n$  na  $k$  sčítanců označme  $K(n, k)$ .

(Termín *kompozice* zavedl Percy A. MacMahon.)

**6.2. Věta.** Pro každá přirozená čísla  $n, k$  platí

$$K(n, k) = \binom{n-1}{k-1}.$$

**Důkaz.** Postupujeme analogicky jako v příkladu 3.28. Mějme  $n$  jedniček a přidejme k nim  $k-1$  nul. Všechny permutací těchto jedniček a nul je  $P(n, k-1) = \binom{n+k-1}{k-1}$ . Je-li  $a_1, \dots, a_{n+k-1}$  některá z těchto permutací, rozdělí ji  $k-1$  nul na  $k$  úseků. Označme  $x_i$  počet jedniček v  $i$ -tém úseku. Dostaneme tak  $k$ -tici  $[x_1, \dots, x_k]$  takovou, že  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ . Tato  $k$ -tice však obecně není kompozicí čísla  $n$ , neboť některá  $x_i$  mohou být rovna nule. Abychom zajistili, že všechna  $x_i$  jsou nenulová, umístíme do každého úseku jednu jedničku předem a zbývajících  $n-k$  jedniček pak můžeme rozdělit libovolně, tj.  $P(n-k, k-1)$  způsoby.

Dokázali jsme tak, že

$$K(n, k) = P(n-k, k-1) = \frac{(n-k+k-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

•

**6.3. Poznámka.** V průběhu důkazu věty 6.2 jsme ukázali, že kompozicí čísla  $n$  na nejvýše  $k$  sčítanců je  $P(n-k, k-1) = \binom{n+k-1}{k-1}$ .

**6.4. Příklad.** Podle věty 6.2 lze číslo  $n = 7$  rozložit na tři sčítance celkem  $K(7, 3) = \binom{6}{2} = 15$  způsoby.

Příslušné kompozice jsou následující:

$$\begin{array}{cccc} 5 + 1 + 1 & 4 + 2 + 1 & 3 + 2 + 2 & 3 + 3 + 1 \\ 1 + 5 + 1 & 2 + 1 + 4 & 2 + 3 + 2 & 3 + 1 + 3 \\ 1 + 1 + 5 & 1 + 2 + 4 & 2 + 2 + 3 & 1 + 3 + 3 \\ & 4 + 1 + 2 & & \\ & 2 + 4 + 1 & & \\ & 1 + 4 + 2 & & \end{array}$$

Pokud bychom však pořadí sčítanců nebrali v úvahu, lze číslo 7 rozložit na tři sčítance čtyřmi způsoby (sloupce v hořejším rozpisu).

Jak uvidíme, je situace s určením počtu rozkladů čísla  $n$  na  $k$  sčítanců bez ohledu na jejich pořadí podstatně komplikovanější.

**6.5. Definice.** Budte  $n, k$  přirozená čísla. *Rozkladem* čísla  $n$  na  $k$  sčítanců rozumíme každou (neuspořádanou)  $k$ -tici přirozených čísel  $x_1, \dots, x_k$  takovou, že

$$x_1 + \dots + x_k = n.$$

Počet všech rozkladů čísla  $n$  na  $k$  sčítanců označme  $p(n, k)$ .

**6.6. Poznámka.** To, že v rozkladu  $x_1 + \dots + x_k$  čísla  $n$  na  $k$  sčítanců na pořadí těchto sčítanců nezáleží je totéž, jako když se dohodneme na jistém přesně stanoveném pořadí, v jakém budeme tyto rozklady zapisovat. Nadále budeme proto rozklady psát tak, že  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k$ .

Předpokládejme nyní, že

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

je rozklad čísla  $n$  na  $k$  sčítanců. Pak

$$n - k = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1)$$

je rozklad čísla  $n - k$  na  $k$  nebo méně sčítanců (neboť některá  $x_i$  se mohla rovnat jedné). Přitom uvedené přiřazení  $(x_1, \dots, x_k) \rightarrow (x_1 - 1, \dots, x_k - 1)$  je evidentně bijekcí množiny všech rozkladů čísla  $n$  na  $k$  sčítanců na množinu všech rozkladů čísla  $n - k$  na nejvýše  $k$  sčítanců.

Dokázali jsme tak, že platí následující věta.

**6.7. Věta.**

$$p(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n - k, i); \quad p(n, 1) = p(n, n) = 1.$$

**6.8. Poznámka.** Uvedená rekurentní formule nám umožňuje postupně počítat všechny hodnoty  $p(n, k)$ . Tyto hodnoty pro čísla  $n, k = 1, \dots, 10$  uvádíme v tabulce na straně 152.

**6.9. Poznámka.** Číslo  $q(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n, i)$  udává počet rozkladů čísla  $n$  na nejvýše  $k$  sčítanců. Přitom lze číslo  $q(n, k)$  najít přímo mezi čísly  $p(x, y)$ . Podle věty 6.7 totiž zřejmě platí

$$q(n, k) = p(n + k, k),$$



takže například  $q(6, 3) = p(9, 3) = 7$ .

V roce 1942 dokázal F. C. Auluck, že pro velká  $n$  je  $q(n, k)$  přibližně rovno číslu  $\frac{1}{k!} \binom{n-1}{k-1}$ . To potvrzuje vcelku očekávanou skutečnost, že počet kompozicí čísla  $n$  na  $k$  sčítanců je přibližně  $k!$  krát větší než počet rozkladů čísla  $n$  na nejvýše  $k$  sčítanců.

Číslo  $p(n) := q(n, n) \left( = \sum_{k=1}^n p(n, k) \right)$  udává počet **všech** rozkladů čísla  $n$ . Podle výše uvedeného platí

$$p(n) = p(2n, n),$$

takže i čísla  $p(n)$  lze zjistit z tabulky čísel  $p(n, k)$ . (Kromě toho je  $p(n)$  samozřejmě rovno součtu všech čísel v  $n$ -tém sloupci této tabulky.)

Tabulka čísel  $p(n)$  je uvedena v příloze na straně 153.

Z tabulky čísel  $p(n)$  je zřejmé, že již pro poměrně malé hodnoty  $n$  je výpočet hodnot  $p(n)$  pomocí rekurentní formule pro  $p(n, k)$  zdlouhavý a komplikovaný. (O výhodnějším způsobu výpočtu hodnot  $p(n)$  se zmíníme v paragrafu 9 – viz větu 9.6.)

Vzhledem k tomu, že není znám jednoduchý explicitní vzorec pro pro přímý výpočet čísel  $p(n, k)$ , respektive  $p(n)$ , byly odvozeny alespoň vztahy popisující asymptotické chování těchto čísel. Tak například Hardy a Ramanujan odvodili, že

$$\lg p(n) \sim \pi \sqrt{\frac{2n}{3}} - \lg \frac{4n}{\sqrt{3}}.$$

V roce 1937 odvodil H. Rademacher, že  $p(n)$  lze vyjádřit jakou součet jisté konvergentní nekonečné řady. Pro ukázkou jeho výsledek uvedme:

$$p(n) = \sum_{q=1}^{\infty} L_q(n) \cdot \psi_q(n),$$

kde

$$\psi_q(n) = \pi \sqrt{\frac{q}{2}} \cdot \frac{d}{dn} \frac{\sinh \left[ \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{n - \frac{1}{24}}}{q} \right]}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}}$$

a

$$L_q(n) = \sum_p w_{p,q} \cdot e^{-\frac{2np\pi i}{q}},$$

kde  $w_{p,q}$  je 24. odmocnina z jedné a  $p$  probíhá všechna celá čísla nesoudělná s  $q$  menší nebo rovna číslu  $q$ .

**6.10. Poznámka.** V řadě úvah o rozkladech přirozených čísel na sčítance jsou velmi užitečné tzv. *Ferrersovy diagramy*, v nichž každému sčítanci odpovídá řádek bodů v rovině. I bez přesné definice je jistě vše zřejmé z následujícího příkladu:

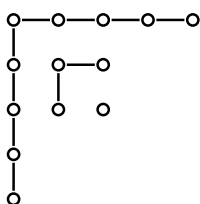
$$5 + 4 + 1 + 1 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & & \\ \circ & & & & & \\ \circ & & & & & \end{array}$$

Je-li  $\alpha$  rozklad čísla  $n$ , pak tzv. *adjungovaný rozklad*  $\alpha^*$  k rozkladu  $\alpha$  obdržíme tak, že Ferrersův diagram rozkladu  $\alpha$  přečteme, jednoduše řečeno, po sloupcích. Tak například adjungovaný rozklad k výše uvedenému rozkladu  $5 + 4 + 1 + 1$  je rozklad  $4 + 2 + 2 + 2 + 1$ .

Platí-li  $\alpha = \alpha^*$ , nazývá se rozklad  $\alpha$  *samoadjungovaný*.

Pokusme se nyní zjistit, *kolik má číslo  $n$  samoadjungovaných rozkladů*. Nejprve uvažme následující jednoduchý příklad.

Samoadjungovaným rozkladem čísla 13 je například rozklad  $5+3+3+1+1$ . Ferrersův diagram tohoto rozkladu je následující:



Když sečteme v uvedeném diagramu navzájem propojené body, obdržíme rozklad  $9+3+1$ . Zamyslíme-li se nad tím, jak rozklad  $9+3+1$  vznikl, uvědomíme si jistě okamžitě, že jde zákonitě o rozklad s navzájem různými lichými sčítanci (pokud byl samozřejmě původní rozklad samoadjungovaný). Když si nyní navíc uvědomíme, že obrácením uvedeného postupu zase naopak každému rozkladu čísla  $n$  na navzájem různé liché sčítance přiřadíme evidentně samoadjungovaný rozklad čísla  $n$ , přičemž popsané zobrazení je zřejmě bijektivní, je jasné, že jsme dokázali následující tvrzení.

**6.11. Věta.** *Počet samoadjungovaných rozkladů čísla  $n$  je roven počtu rozkladů čísla  $n$  na navzájem různé liché sčítance.*

Pomocí Ferrersových diagramů lze okamžitě — pouhou záměnou řádků a sloupců — odvodit i další tvrzení.

**6.12. Věta.** *Počet rozkladů čísla  $n$  na sčítance nepřevyšující číslo  $k$  je stejný jako počet rozkladů čísla  $n$  na nejvýše  $k$  sčítanců.*

Na množině  $Y$  všech rozkladů (všech přirozených čísel) je obvyklé definovat vhodné uspořádání následujícím způsobem. (Pro formální jednoduchost nyní ztotožníme rozklad  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$  s posloupností  $(a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0, \dots)$ .)

**6.13. Definice.** Bud'  $Y$  množina všech nerostoucích posloupností nezáporných celých čísel, jejichž součtem je přirozené číslo (tj. všechny členy každé posloupnosti jsou od jistého indexu  $i \geq 2$  rovny nule). Definujeme relaci  $\leq$  na  $Y$  tak, že pro libovolná  $\alpha = (a_n)_{n=1}^\infty$ ,  $\beta = (b_n)_{n=1}^\infty$  platí:

$$\alpha \leq \beta \iff a_i \leq b_i \text{ pro každé } i \in \mathbb{N}.$$

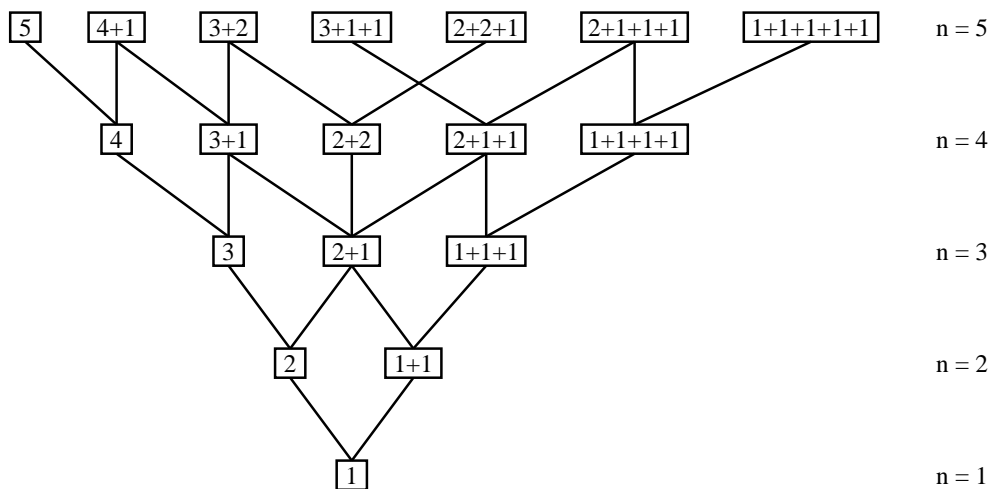
Okamžitě z definice je zřejmé, že platí následující věta.

**6.14. Věta.** Relace  $\leq$  definovaná v 6.13 je uspořádání na množině  $Y$  a  $(Y, \leq)$  je svaz, v němž

$$\alpha \vee \beta = (\max \{a_1, b_1\}, \max \{a_2, b_2\}, \dots)$$

$$\alpha \wedge \beta = (\min \{a_1, b_1\}, \min \{a_2, b_2\}, \dots).$$

**6.15. Poznámka.** Svaz  $(Y, \leq)$  je obvykle nazýván *Youngův svaz*. Je zřejmé, že  $\text{card } Y = \aleph_0$ . Část tohoto svazu najdete na obr. 6.5.



Obr. 6.5: Youngův svaz

Počet prvků „výšky“  $n$  v  $(Y, \leq)$  je zřejmě  $p(n)$ . Snadná je též odpověď na otázku, kolik prvků prvek  $\alpha \in Y$  pokrývá a kolika prvky je pokryt. Je zřejmé, že když rozklad  $\alpha$  obsahuje  $k$  různých sčítanců, pak  $\alpha$  pokrývá  $k$  prvků a je pokryt  $k + 1$  prvky.

## Cvičení

1. Srinivasa Ramanujan dokázal řadu vlastností čísel  $p(n, k)$  a  $p(n)$ , například skutečnost, že pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$  je  $p(5n + 4)$  násobkem 5. Ověřte tuto skutečnost pro  $n = 0, 1, 2$ .
2. Označme  $t(n)$  počet rozkladů čísla  $n$ , jejichž každý sčítanec je mocninou čísla 2 (včetně  $2^0 = 1$ ).
  - (a) Vypočítejte  $t(n)$  pro  $1 \leq n \leq 6$ .
  - (b) Dokažte, že  $t(2n + 1) = t(2n)$ .
  - (c) Dokažte, že  $t(n)$  je sudé pro všechna  $n > 1$ .
3. Již Galileo Galilei řešil problém, proč při házení kostkami nepadá stejně často součet 9 a 10.
  - a) Ukažte, že čísla 9 a 10 mají stejný počet rozkladů na tři sčítance, které jsou nejvýše rovny 6.
  - b) Zdůvodněte, proč přesto nepadá součet 9 stejně často jako součet 10.
4. Dokažte, že  $p(2r + k, r + k) = p(2s + k, s + k)$  pro každé  $r, s \in \mathbb{N}$ .
5. Dokažte, že číslo  $p(r + k, k)$  je rovno:
  - a) počtu rozkladů čísla  $r + \binom{k+1}{2}$  na  $k$  navzájem různých sčítanců;
  - b) počtu rozkladů čísla  $r$  na sčítance nejvýše rovné  $k$ .
6. Pomocí Ferrersových diagramů dokažte rovnost  $p(n) = p(2n, n)$ .
7. Hardy a Ramanujan v r. 1919 dokázali, že

$$p(n) \doteq \frac{1}{4n\sqrt{3}} \cdot e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

Porovnejte hodnotu  $p(70)$  podle tohoto tvaru s přesnou hodnotou (viz tabulku na straně 153).

## 7 Rozdělování do přihrádek

V tomto paragrafu v podstatě jen shrneme některé výsledky odvozené již dříve, přeformulované však do jazyka tzv. „přihrádkové“ kombinatoriky. Mnohé úlohy lze totiž převést na následující problém: *kolika způsoby lze  $n$  předmětů rozdělit do  $k$  přihrádek?*

Vzhledem k tomu, že jak předměty, tak přihrádky mohou být vzájemně rozlišitelné, respektive nerozlišitelné, a na rozmístění mohou být kladeny další omezující podmínky (např. aby všechny přihrádky byly neprázdné, aby počet prvků v různých přihrádkách byl různý apod.), lze úloh tohoto typu zformulovat celou řadu. Řešení některých z nich může být velmi komplikované.

Četné aplikace těchto výsledků lze najít i mimo matematiku, např. ve statistické fyzice.

Ještě před řešením úloh uvedeného typu si zformulujeme následující evidentní tvrzení, známé jako *Dirichletův princip*.

**7.1. Věta.** *Při každém rozdělení  $n$  předmětů do  $k$  přihrádek, kde  $k < n$ , existuje alespoň jedna přihrádka obsahující alespoň dva předměty.*

Jakkoliv je Dirichletův princip jednoduchý, umožňuje řešení řady úloh. Řadu zajímavých příkladů lze najít například v [5].

**7.2. Příklad.** *Dokažte, že když v obdélníku o rozměrech  $6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$  vybereme libovolně 25 bodů, pak mezi nimi existují alespoň dva, které mají vzdálenost menší než  $1,5 \text{ cm}$ .*

Leží-li dva body v jednotkovém čtverci, je jejich vzdálenost rovna nejvýše  $\sqrt{2}$ , což je méně než  $1,5$ . Kdybychom tedy chtěli 25 bodů rozmístit tak, aby každé dva měly vzdálenost alespoň  $1,5 \text{ cm}$ , mohli bychom do každého čtverce o straně  $1 \text{ cm}$  ležícího v daném obdélníku umístit nejvýše jeden bod. Obdélník však lze pokrýt nejvýše 24 takovými čtverci. Podle věty 7.1 tedy mezi libovolnými 25 body jsou alespoň dva ze stejného čtverce.

**7.3. Věta.** *Bud'  $k, n$  libovolná přirozená čísla. Pak lze  $n$  rozlišitelných předmětů rozmístit do  $k$  rozlišitelných přihrádek právě  $k^n$  způsoby.*

**Důkaz.** Je-li  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  množina  $n$  předmětů a  $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$  množina  $k$  přihrádek, pak je evidentní, že rozdělení předmětů do přihrádek je totéž jako zobrazení množiny  $X$  do množiny  $Y$ . (Prvek  $x_i$  se zobrazí na tu přihrádku, do které je umístěn.) Odtud a z věty 3.20 okamžitě plyne tvrzení. •

Při popsáních rozmístění předmětů do přihrádek existují samozřejmě přihrádky, které mohou zůstat prázdné. Chceme-li předměty  $X$  rozmístit do přihrádek  $Y$  tak, aby žádná přihrádka nezůstala prázdná, je to zřejmě totéž, jako sestavit surjekci  $X$  na  $Y$ . Odtud, z věty 4.11 a z příkladu 5.9 plyne následující tvrzení.

**7.4. Věta.** *Bud' dáno  $n$  rozlišitelných předmětů a  $k$  rozlišitelných přihrádek,  $n \geq k$ . Počet rozdělení těchto předmětů do přihrádek, při nichž žádná přihrádka nezůstane prázdná, je roven číslu*

$$k!S(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Podobně z důsledku 3.8 plyne

**7.5. Věta.** *Bud' dáno  $n$  rozlišitelných předmětů a  $k$  rozlišitelných přihrádek,  $k \geq n$ . Počet rozdělení předmětů do přihrádek, při nichž každá přihrádka obsahuje nejvýše jeden prvek, je roven číslu*

$$(k)_n = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1).$$

Nyní uvažujme případ, kdy máme opět  $k$  rozlišitelných přihrádek avšak  $n$  vzájemně nerozlišitelných předmětů. Uvědomíme-li si, že za předměty můžeme vzít například cifry 1 (v počtu  $n$ ) a přihrádky můžeme označit  $x_1, \dots, x_k$ , je okamžitě zřejmé, že tato úloha je ekvivalentní s určením počtu kompozic čísla  $n$ . Chceme-li přitom, aby v každé přihrádce bylo alespoň  $r$  předmětů, můžeme nejprve do každé přihrádky  $r$  předmětů vložit a zbývajících  $n-kr$  předmětů pak rozdělit libovolně. Odtud, z věty 6.2 a poznámky 6.3 okamžitě plyne následující tvrzení.

**7.6. Věta.** *Bud'  $k, n$  libovolná přirozená čísla. Pak lze  $n$  nerozlišitelných předmětů rozmístit do  $k$  rozlišitelných přihrádek právě*

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

*způsoby.*

*Chceme-li, aby v každé přihrádce bylo alespoň  $r$  předmětů, je těchto možností*

$$\binom{n-kr+k-1}{k-1}.$$

*Mají-li zejména být všechny přihrádky neprázdné, je možností celkem*

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Nyní uvažme případ, kdy jsou přihrádky nerozlišitelné. Necht' tedy je dáno  $k$  nerozlišitelných přihrádek a  $n$  rozlišitelných předmětů. Rozdělit tyto předměty do přihrádek tak, aby právě  $p$  těchto přihrádek bylo neprázdných, evidentně značí utvořit rozklad na množině předmětů na právě  $p$  tříd. Podle definice 4.9 udává počet těchto rozkladů Stirlingovo číslo 2. druhu  $S(n, p)$ .

Odtud okamžitě plyne

**7.7. Věta.** Počet rozmístění  $n$  rozlišitelných předmětů do  $k$  nerozlišitelných přihrádek je roven číslu

$$S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, k) = \sum_{i=1}^k S(n, i).$$

Chceme-li zejména, aby všechny přihrádky byly neprázdné, je těchto možností právě  $S(n, k)$ .

Zbývá nám poslední možný případ, kdy jsou nerozlišitelné i předměty i přihrádky. Protože za předměty můžeme vzít cifry 1 a za přihrádky sčítance, jejichž pořadí nerozlišujeme, je tento případ evidentně popsán pomocí rozkladů přirozených čísel. Odtud a z věty 6.9 okamžitě plyne následující tvrzení.

**7.8. Věta.** Je-li dáno  $n$  nerozlišitelných předmětů, lze je do  $k$  nerozlišitelných přihrádek rozdělit

$$p(n, 1) + p(n, 2) + \cdots + p(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n, i) = p(n+k, k)$$

způsoby.

Chceme-li, aby všechny přihrádky byly neprázdné, je těchto možností právě  $p(n, k)$ .

**7.9. Poznámka.** Uvedené výsledky můžeme shrnout do tabulky 1.3, v níž je uveden počet všech rozdělení (bez jakýchkoliv omezujících předpokladů).

Počet všech rozmístění		$n$ předmětů	
		rozlišitelných	nerozlišitelných
$k$ přihrádek	rozlišitelných	$k^n$	$\binom{n+k-1}{k-1}$
	nerozlišitelných	$\sum_{i=1}^k S(n, i)$	$\sum_{i=1}^k p(n, i)$

Tabulka 1.3: Umísťování předmětů do přihrádek

**7.10. Příklad.** Ilustrujme si rozdíly mezi počty možností v jednotlivých případech například pro 10 předmětů a 4 přihrádky.

(a)  $k^n = 4^{10} = 1\,048\,576$ ,

$$(b) \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{13}{3} = 286,$$

$$(c) \sum_{i=1}^k S(n, i) = S(10, 1) + S(10, 2) + S(10, 3) + S(10, 4) = \\ = 1 + 511 + 9\,330 + 34\,105 = 43\,947,$$

$$(d) \sum_{i=1}^k p(n, i) = p(10, 1) + p(10, 2) + p(10, 3) + p(10, 4) = 23.$$

### Cvičení

1. Do 15 přihrádek je rozmístěno 100 míčků. Dokažte, že alespoň dvě přihrádky obsahují stejný počet míčků.
2. Dokažte, že v každé skupině (alespoň dvou) lidí existují alespoň dva lidé, kteří znají stejný počet členů skupiny. (Návod: Uvažujte množinu lidí, kteří neznají nikoho).
3. Ukažte, že mezi sedmi různými přirozenými čísly vždy existují čísla  $x$ ,  $y$  taková, že  $x + y$  nebo  $x - y$  je dělitelné deseti.
4. Máme čtyři bílé koule, čtyři černé koule a čtyři červené koule. Kolika způsoby je můžeme rozdělit do 6 rozlišitelných přihrádek? (2 000 376)

## 8 Řešení rekurentních formulí

S rekurentními formullemi jsme se setkali již několikrát. Tak například ve větě 4.2 jsme odvodili rekurentní formuli pro výpočet Bellových čísel  $B_n$ , ve větě 6.7 pak rekurentní formuli pro výpočet počtu  $p(n, k)$  rozkladů čísla  $n$  na  $k$  sčítanců.

Mezi právě uvedenými formullemi je — kromě jiného — jeden zásadní rozdíl. Čísla  $B_n$  závisejí na jediné hodnotě (tj.  $n$ ), čísla  $p(n, k)$  na dvou hodnotách (tj.  $n, k$ ). V tomto paragrafu se budeme zabývat formullemi 1. typu, tj. formullemi pro výpočet členů posloupnosti pomocí předcházejících členů.

Předpokládejme, že je tedy dána rekurentní formule pro výpočet hodnot  $f(n)$ . Obecně nám taková formule umožňuje výpočet členu  $f(n+1)$ , známe-li hodnoty  $f(1), \dots, f(n)$  (respektive  $f(0), \dots, f(n)$  apod.). Jednotlivé formule se však mohou lišit tím, kolik předcházejících členů fakticky potřebujeme k výpočtu členu následujícího. Tak například ve formuli 4.2 pro výpočet čísel  $B_n$  potřebujeme k určení  $B_n$  **všechny** členy předcházející. Ve formuli  $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$  potřebujeme jen předcházející dva členy.



Má tedy smysl následující definice.

**8.1. Definice.** Řekneme, že rekurentní formule pro výpočet hodnot  $f(n)$  je řádu  $k \in \mathbb{N}$ , jestliže pro každé  $n \in \mathbb{N}$  lze  $f(n+k)$  určit pomocí  $f(n), f(n+1), \dots, f(n+k-1)$ , přičemž  $k$  je nejmenší přirozené číslo s uvedenou vlastností.

**8.2. Příklad.** (a)  $f(n+3) = f(n+2) - \log f(n)$  je formule 3. řádu,

(b)  $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$  je formule 2. řádu,

(c)  $T_{n+1} = \sum_{k=0}^n T_k$  není formule konečného řádu.

**8.3. Definice.** Buď dána rekurentní formule  $k$ -tého řádu pro výpočet čísel  $f(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Řekneme, že posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  je řešením této rekurentní formule, jestliže pro každé  $i \in \mathbb{N}$  dostaneme po dosazení čísel  $a_{i+j}$  za  $f(n+j)$ ,  $j = 0, \dots, k$ , identitu.

**8.4. Příklad.** Posloupnost  $(2^n)_{n=1}^{\infty}$  je řešením rekurentní formule 2. řádu

$$f(n+2) = 3 \cdot f(n+1) - 2 \cdot f(n),$$

neboť pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$2^{n+2} = 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n.$$

**8.5. Poznámka.** Rekurentní formule  $k$ -tého řádu zřejmě může obecně mít nekonečně mnoho řešení, neboť prvních  $k$  členů posloupnosti, která je řešením, můžeme volit zcela libovolně.

Nyní se bude zabývat otázkou, zda lze alespoň v některých případech pro danou rekurentní formuli určit člen  $f(n)$ , aniž bychom museli počítat postupně všechny členy předcházející. Uvidíme, že se nám to podaří pro speciální typ formulí — pro tzv. lineární rekurentní formule s konstantními koeficienty.

**8.6. Definice.** Rekurentní formule tvaru

$$f(n+k) = a_1 \cdot f(n+k-1) + a_2 \cdot f(n+k-2) + \dots + a_k \cdot f(n), \quad (8.1.)$$

kde  $a_1, \dots, a_k$  jsou reálná čísla,  $a_k \neq 0$ , se nazývá *lineární rekurentní formule  $k$ -tého řádu s konstantními koeficienty*.

**8.7. Věta.** Jsou-li posloupnosti  $(f_1(n))_{n=1}^{\infty}, (f_2(n))_{n=1}^{\infty}, \dots, (f_s(n))_{n=1}^{\infty}$  řešením formule 8.1., je také jejich libovolná lineární kombinace

$$(c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + \dots + c_s f_s(n))_{n=1}^{\infty}$$

řešením formule 8.1..

**Důkaz.** Je zřejmé, že stačí dokázat, že každá lineární kombinace libovolných dvou řešení formule 8.1. je opět řešením formule 8.1.. Nechť tedy  $(g(n))_{n=1}^{\infty}, (h(n))_{n=1}^{\infty}$  jsou řešení formule 8.1., tj. platí

$$\begin{aligned} g(n+k) &= a_1 g(n+k-1) + a_2 g(n+k-2) + \dots + a_k g(n) \\ h(n+k) &= a_1 h(n+k-1) + a_2 h(n+k-2) + \dots + a_k h(n) \end{aligned}$$

pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ . Potřebujeme dokázat, že pro libovolná čísla  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  je  $(r(n))_{n=1}^{\infty}$ , kde  $r(n) = c_1 g(n) + c_2 h(n)$ , také řešením formule 8.1..

Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí:

$$\begin{aligned} r(n+k) &= c_1 g(n+k) + c_2 h(n+k) = c_1 [a_1 g(n+k-1) + \dots + a_k g(n)] + \\ &\quad + c_2 [a_1 h(n+k-1) + \dots + a_k h(n)] = \\ &= a_1 [c_1 g(n+k-1) + c_2 h(n+k-1)] + \dots + a_k [c_1 g(n) + c_2 h(n)] = \\ &= a_1 r(n+k-1) + \dots + a_k r(n), \end{aligned}$$

což znamená, že  $(r(n))_{n=1}^{\infty}$  je řešením formule 8.1.. •

**8.8. Příklad.** Mějme dānu rekurentnĭ formuli 2. řādu

$$f(n+2) = 5 \cdot f(n+1) - 6 \cdot f(n).$$

Pouhým dosazením lze snadno ověřit, že posloupnosti  $(2^n)_{n=1}^{\infty}$  a  $(3^n)_{n=1}^{\infty}$  jsou lineárně nezávislá řešení dané formule. Nyní ukážeme, že **každé** řešení  $(g(n))_{n=1}^{\infty}$  zadané formule je vhodnou lineární kombinací uvedených dvou řešení, tj. existují konstanty  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  takové, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí:

$$g(n) = (c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n)_{n=1}^{\infty}.$$

Jak tyto konstanty nalezneme? Protože řād dané formule je 2, je řešení  $(g(n))_{n=1}^{\infty}$  jednoznačně určeno volbou hodnot  $g(1)$  a  $g(2)$ . Nechť tedy  $g(1) = a$ ,  $g(2) = b$ . Potřebujeme dokázat, že existují konstanty  $c_1, c_2$  takové, že

$$\begin{aligned} 2c_1 + 3c_2 &= a \\ 4c_1 + 9c_2 &= b \end{aligned}$$

Tento systém rovnic má však právě jedno řešení

$$c_1 = \frac{3a - b}{2}, \quad c_2 = \frac{b - 2a}{3}.$$

**8.9. Poznámka.** Je zřejmé, že množina všech posloupností reálných čísel se sčítáním definovaným po složkách a s obvyklým násobením reálnými čísly tvoří vektorový prostor nekonečné dimenze na  $\mathbb{R}$ . Z věty 8.7 plyne, že všechna řešení lineární rekurentní formule daného řádu tvoří podprostor tohoto prostoru. V příkladu 8.8 jsme ukázali, že dimenze vektorového prostoru všech řešení zadané rekurentní formule druhého řádu je 2; posloupnosti  $(2^n)_{n=1}^\infty$  a  $(3^n)_{n=1}^\infty$  tvoří bázi tohoto vektorového prostoru.

Ponecháme na čtenáři, aby si promyslel, že postup uvedený v příkladu 8.8 lze snadno zobecnit na případ lineární rekurentní formule s konstantními koeficienty libovolného řádu  $k \in \mathbb{N}$ . Libovolné řešení  $(g(n))_{n=1}^\infty$  takové rekurentní formule je totiž jednoznačně určeno hodnotami  $g(1), g(2), \dots, g(k)$ . Existují-li lineárně nezávislá řešení  $(f_1(n))_{n=1}^\infty, (f_2(n))_{n=1}^\infty, \dots, (f_k(n))_{n=1}^\infty$ , pak jistě existují konstanty  $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  takové, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí:

$$g(n) = c_1 f_1(n) + \dots + c_k f_k(n).$$

K tomu totiž stačí ukázat, že systém rovnic

$$\begin{aligned} c_1 f_1(1) + c_2 f_2(1) + \dots + c_k f_k(1) &= g(1) \\ c_1 f_1(2) + c_2 f_2(2) + \dots + c_k f_k(2) &= g(2) \\ &\vdots \\ c_1 f_1(k) + c_2 f_2(k) + \dots + c_k f_k(k) &= g(k) \end{aligned}$$

má řešení. Z lineární nezávislosti posloupností

$$(f_1(n))_{n=1}^\infty, (f_2(n))_{n=1}^\infty, \dots, (f_k(n))_{n=1}^\infty$$

však snadno plyne, že daný systém rovnic má **právě jedno** řešení  $c_1, c_2, \dots, c_k$ .

V dalším (viz důsledek 8.17) ukážeme, že takový systém lineárně nezávislých řešení vskutku existuje.

Celkem se takto snadno odvodí následující tvrzení.

**8.10. Věta.** *Dimenze podprostoru všech řešení lineární rekurentní formule s konstantními koeficienty je rovna řádu této formule.*

Z výše uvedeného tedy plyne, že má smysl následující definice.

**8.11. Definice.** Necht' je dána lineární rekurentní formule

$$f(n+k) = a_1 \cdot f(n+k-1) + a_2 \cdot f(n+k-2) + \dots + a_k \cdot f(n)$$

řádu  $k$  s konstantními koeficienty. Necht'

$$(f_1(n))_{n=1}^{\infty}, \dots, (f_k(n))_{n=1}^{\infty}$$

jsou lineárně nezávislá řešení dané formule. Pak se posloupnost  $(g(n))_{n=1}^{\infty}$ , kde pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$g(n) = c_1 f_1(n) + \dots + c_k f_k(n),$$

nazývá *obecné řešení* dané rekurentní formule.

Otázkou nyní zůstává, zda alespoň v některých případech obecné řešení najdeme. Buď nyní dána lineární rekurentní formule  $k$ -tého řádu s konstantními koeficienty

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n).$$

Zjišťujeme, zda pro některé  $r \in \mathbb{R}$  je posloupnost  $(r^n)_{n=1}^{\infty}$  řešením této formule.

Pokud je posloupnost  $(r^n)_{n=1}^{\infty}$  řešením, musí pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platit

$$r^{n+k} = a_1 r^{n+k-1} + \dots + a_k r^n.$$

Pokud je  $r = 0$ , je tato rovnost splněna triviálně. Je-li  $r \neq 0$ , musí tedy platit

$$r^k = a_1 r^{k-1} + \dots + a_k.$$

Odtud a z věty 8.7 plyne

**8.12. Věta.** Je-li reálné číslo  $r$  řešením rovnice

$$x^k = a_1 x^{k-1} + \dots + a_k,$$

je každá posloupnost  $(cr^n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  libovolné, řešením rekurentní formule 8.1.

**8.13. Poznámka.** Rovnice  $x^k = a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$  se nazývá *charakteristická rovnice* formule

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n).$$

Charakteristickou rovnicí rekurentní formule  $k$ -tého řádu je tedy algebraická rovnice  $k$ -tého řádu. Tato algebraická rovnice má tedy  $k$  kořenů (počítáme-li každý kořen tolikrát, jaká je jeho násobnost).

Uvědomme si přitom, že když je formule 8.1.  $k$ -tého řádu, je koeficient  $a_k$  nenulový, takže také všechny kořeny charakteristické rovnice jsou nenulové.

Odtud plyne následující věta

**8.14. Věta.** *Bud'  $f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n)$ ,  $a_k \neq 0$ , lineární rekurentní formule  $k$ -tého řádu s konstantními koeficienty. Necht' charakteristická rovnice*

$$x^k = a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

*má jednoduché navzájem různé reálné kořeny  $r_1, \dots, r_k$ . Pak obecné řešení dané rekurentní formule je tvaru*

$$(c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \dots + c_k r_k^n)_{n=1}^{\infty}.$$

**Důkaz.** Posloupnost  $(c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \dots + c_k r_k^n)_{n=1}^{\infty}$  je řešením dané formule podle vět 8.12 a 8.7. Podle poznámky 8.13 jsou všechna čísla  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  různá od nuly. Posloupnosti  $(r_i^n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $i = 1, \dots, k$  jsou evidentně lineárně nezávislé. Zbývá tak pouze dokázat, že každé řešení dané rekurentní formule lze získat vhodnou volbou konstant  $c_i$ . To dokážeme analogicky jako v poznámce 8.9.

Bud'  $(g(n))_{n=1}^{\infty}$  libovolné řešení zadané rekurentní formule. Toto řešení je jednoznačně určeno hodnotami  $g(1), \dots, g(k)$ . Zvolme tedy tyto hodnoty libovolně, ale pevně. Je potřeba dokázat, že systém  $k$  rovnic o  $k$  neznámých  $c_1, \dots, c_k$

$$\begin{aligned} c_1 r_1 + c_2 r_2 + \dots + c_k r_k &= g(1) \\ c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 + \dots + c_k r_k^2 &= g(2) \\ &\vdots \\ c_1 r_1^k + c_2 r_2^k + \dots + c_k r_k^k &= g(k) \end{aligned}$$

má řešení. Protože však jsou všechna čísla  $r_i$  nenulová, je determinant

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_k \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^k & r_2^k & \dots & r_k^k \end{vmatrix}$$

rovněž nenulový, takže daný systém rovnic má právě jedno řešení. •

**8.15. Příklad.** Vyřešme rekurentní formuli z příkladu 8.2(b):

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n).$$

Charakteristická rovnice je tvaru

$$x^2 = x + 1.$$

Její kořeny jsou

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

takže obecné řešení je tvaru

$$\left\{ c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Hledejme takové řešení  $(g(n))_{n=1}^{\infty}$  zadané formule, že  $g(1) = 1$ ,  $g(2) = 1$ . Pak musí platit

$$\begin{aligned} c_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} &= 1 \\ c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Tento systém rovnic má právě jedno řešení  $c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Odtud plyne, že

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Toto řešení  $(g(n))_{n=1}^{\infty}$  je tzv. *Fibonacciova posloupnost*

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots;$$

členy této posloupnosti jsou tzv. *Fibonacciova čísla*, která hrají důležitou roli v různých částech matematiky i v řadě pozoruhodných aplikací. Poznamenejme pouze, že posloupnost Fibonacciových čísel je obvyklé značit symbolem  $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ .

Ve větě 8.14 jsme popsali, jak lze nalézt obecné řešení v případě, že charakteristická rovnice má pouze jednoduché reálné kořeny. Dobře však víme, že algebraická rovnice může mít i kořeny imaginární a násobnost kořenů může být větší než jedna. V dalším popíšeme obecně alespoň ten případ, kdy všechny kořeny charakteristické rovnice jsou reálné.

**8.16. Věta.** *Nechť charakteristická rovnice formule 8.1. má reálný nenulový  $p$ -násobný kořen  $r$ . Pak jsou posloupnosti*

$$(r^n)_{n=1}^{\infty}, (n \cdot r^n)_{n=1}^{\infty}, \dots, (n^{p-1} \cdot r^n)_{n=1}^{\infty}$$

*lineárně nezávislá řešení formule 8.1..*

**Důkaz.** Je zřejmé, že pro  $r \neq 0$  jsou posloupnosti  $(r^n)_{n=1}^\infty, \dots, (n^{p-1} \cdot r^n)_{n=1}^\infty$  lineárně nezávislé. Zbývá tak dokázat, že všechny tyto posloupnosti jsou řešením formule 8.1..

Nechť tedy  $r$  je  $p$ -násobný kořen charakteristické rovnice. Potřebujeme dokázat, že pro  $s = 1, \dots, p-1$  je  $(n^s \cdot r^n)_{n=1}^\infty$  řešením formule 8.1., tj. že platí

$$(n+k)^s r^{n+k} = a_1(n+k-1)^s r^{n+k-1} + a_2(n+k-2)^s r^{n+k-2} + \dots + a_k n^s r^n.$$

Vydělíme-li tuto rovnici  $r^n$ , obdržíme

$$(n+k)^s r^k = a_1(n+k-1)^s r^{k-1} + a_2(n+k-2)^s r^{k-2} + \dots + a_k n^s.$$

Dokažme pro jednoduchost tento vztah pouze pro  $s = 1$ . Předpokládejme tedy, že číslo  $r \neq 0$  je alespoň dvojnásobným kořenem rovnice

$$x^k = a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \dots + a_k.$$

Z algebry víme, že dvojnásobný kořen polynomu je nutně kořenem derivace tohoto polynomu, takže je kořenem rovnice

$$kx^{k-1} = a_1(k-1)x^{k-2} + a_2(k-2)x^{k-3} + \dots + a_{k-1}.$$

Odtud plyne, že platí

$$kr^{k-1} = a_1(k-1)r^{k-2} + a_2(k-2)r^{k-3} + \dots + a_{k-1}.$$

Za těchto předpokladů potřebujeme dokázat správnost následující rovnosti:

$$(n+k)r^k = a_1(n+k-1)r^{k-1} + a_2(n+k-2)r^{k-2} + \dots + a_k(n+k-k).$$

Upravme tuto rovnost následovně:

$$\begin{aligned} nr^k + kr^k &= n \cdot [a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \dots + a_k] + a_1(k-1)r^{k-1} + a_2(k-2)r^{k-2} + \\ &+ \dots + a_k(k-k). \end{aligned}$$

Rovnost výrazů stojících u  $n$  na obou stranách rovnosti nyní plyne z toho, že  $r$  je kořenem charakteristické rovnice, rovnost zbývajících členů plyne z toho, že kořen  $r$  je alespoň dvojnásobný.

•

Z věty 8.16 okamžitě plyne

**8.17. Důsledek.** *Bud'*

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \dots + a_k f(n)$$

lineární rekurentní formule  $k$ -tého řádu s konstantními koeficienty. Necht' jsou všechny kořeny  $r_1, \dots, r_j$  charakteristické rovnice této formule reálné. Necht' kořen  $r_1$  je  $p_1$ -násobný,  $r_2$  je  $p_2$ -násobný,  $\dots$ ,  $r_j$  je  $p_j$ -násobný (tj.  $p_1 + \dots + p_j = k$ ). Pak obecným řešením dané rekurentní formule je posloupnost, jejíž  $n$ -tý člen je roven výrazu

$$r_1^n \cdot (c_{11} + c_{12}n + \dots + c_{1p_1}n^{p_1-1}) + r_2^n \cdot (c_{21} + c_{22}n + \dots + c_{2p_2}n^{p_2-1}) + \dots + r_j^n \cdot (c_{j1} + c_{j2}n + \dots + c_{jp_j}n^{p_j-1}).$$

**8.18. Příklad.** Najděte obecné řešení formule

$$f(n+4) = 3f(n+3) + 3f(n+2) - 11f(n+1) + 6f(n).$$

Charakteristická rovnice této formule je

$$x^4 = 3x^3 + 3x^2 - 11x + 6.$$

Snadno lze ověřit, že tato rovnice má dvojnásobný kořen 1 a jednoduché kořeny  $-2$  a  $3$ . Obecným řešením zadané formule je tedy posloupnost  $(g(n))_{n=1}^{\infty}$ , kde

$$g(n) = c_1 \cdot 1^n + c_2 n \cdot 1^n + c_3(-2)^n + c_4 3^n = c_1 + c_2 n + c_3(-2)^n + c_4 3^n.$$

### Cvičení

1. Název „Fibonacciova čísla“ pro posloupnost  $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$  zavedl francouzský matematik Eduard Lucas. Tzv. *Lucasova posloupnost*  $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$  je definována stejnou rekurentní formulí  $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ , avšak  $L_0 = 1, L_1 = 3$ . Vypočtěte  $L_{10}, L_{20}$ .
2. Známý hlavolam *Hanojská věž* uveřejnil v r. 1833 tajemný francouzský profesor „Claus“. Až v r. 1884 publikoval H. de Parville článek v časopise *La Natur*, v němž uvedl, že „Claus“ je anagram, který užil výše zmiňovaný Eduard „Lucas“. Hlavolam tvoří tři vertikální tyčky, na nichž je navlečeno  $n$  kruhových disků s otvory uprostřed. Tyto disky mají navzájem různé poloměry a jsou poskládány do věže tak, že poloměr každého disku je větší než poloměr kteréhokoliv disku nad ním (viz obrázek 8.6). Hlavolam spočívá v tom, přenést věž na jinou tyčku tak, že v každém kroku lze přenést pouze jeden disk z jedné tyčky na druhou a nikdy přitom nesmí být položen větší disk na menší.

Parville v uvedeném článku uvádí legendu, podle níž mniši v utajovaném tibetském klášteře pracují na přemístění věže tvořené 64 zlatými disky. Ve chvíli, kdy práci dokončí, nastane konec světa. Kdy tato skutečnost nastane?

Označme  $H_n$  **minimální** počet kroků potřebných k přemístění věže.



Obr. 8.6: Hlavolam *Hanojská věž*

- a) Dokažte, že  $(H_n)_{n=0}^{\infty}$  je řešením rekurentní formule  $H_0 = 0$ ,  $H_{n+1} = 2H_n + 1$ .
- b) Najděte obecné řešení uvedené formule.
- c) Vypočtete, kolik století by trvalo přemístění věže ze 64 disků, kdyby se na úkolu pracovalo nepřetržitě a přemístění každého disku by trvalo jednu sekundu.
3. Dokažte, že pro členy Fibonacciovy posloupnosti  $(F_n)_{n=1}^{\infty}$  platí:
- (a)  $F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ ,
- (b)  $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$ ,
- (c)  $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ .
4. Dokažte, že *Fibonacciova posloupnost*  $(F_n)_{n=0}^{\infty}$  splňuje:
- a)  $F_4 = F_2 + 2F_1 + F_0$
- b)  $F_5 = F_3 + 2F_2 + F_1$
- c)  $F_6 = F_3 + 3F_2 + 3F_1 + F_0$
- d)  $F_7 = F_4 + 3F_3 + 3F_2 + F_1$
- e)  $F_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} (F_{2k} - 1)$
- f)  $F_{k+n} = F_k F_n + F_{k-1} F_{n-1}$
- g)  $F_k$  dělí čísla  $F_{2k+1}$  a  $F_{3k+2}$ .
5. Takzvaná  $(3n + 1)$ -funkce  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je definována vztahem

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{pro } n \text{ sudé} \\ \frac{3n+1}{2}, & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Zdá se pravděpodobné, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  dospěje posloupnost  $g(n), g^2(n), g^3(n), \dots$  k číslu 1. (Zatím to je prokázáno pro všechna  $n < 2^{40}$ .) Provéřte tuto vlastnost pro počáteční hodnoty 341, 96, 104, 336, 133.

6. Buď  $n \in \mathbb{N}$  pevné. Pro každé  $x \in \mathbb{N}_0$  položme

$$g(x) = 1^x + 2^x + \cdots + (n-1)^x.$$

Ukažte, že:

- a)  $g(0) = n - 1$ ,
- b)  $g(1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ ,
- c)  $g(2) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ ,
- d)  $g(3) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n$ ,
- e)  $g(4) = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$ .

7.  $k$ -té Bernoulliho číslo  $b_k$  (pojmenované po Jacobu Bernoulli) je definováno jako koeficient u členu  $n$  ve funkci  $g(k)$  (viz cvičení 1). Jacob Bernoulli dokázal, že

$$g(k) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i+1} \binom{k}{i} b_{k-i} n^{i+1}.$$

Pomocí této identity ověřte vyjádření čísla  $g(4)$  ve cvičení 1(e). (Tabulka Bernoulliových čísel je uvedena v tabulce na straně 154.)

8. Bernoulliho čísla splňují vztah

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k = 0, \quad n \geq 1.$$

Pomocí tohoto vztahu a Pascalova trojúhelníka (strana 152) ukažte, že  $b_5 = 0$ ,  $b_6 = \frac{1}{42}$ ,  $b_7 = 0$ ,  $b_8 = -\frac{1}{30}$ ,  $b_{10} = \frac{5}{66}$ ,  $b_{12} = -\frac{691}{2730}$ .

9. Nechť pro  $x \in \mathbb{R}$  značí  $[x]$  celou část čísla  $x$ , tj. největší celé číslo  $n$  takové, že  $n \leq x$ . Nechť  $S_n$  je množina všech permutací  $n$ -prvkové množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Řekneme, že permutace  $p \in S_n$  je *fluktuální*, když platí:

$$p(2k-1) < p(2k) \text{ pro } 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

$$p(2k+1) > p(2k) \text{ pro } 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Tak například v  $S_4$  existují následující fluktuální permutace: (1, 3, 2, 4), (1, 4, 2, 3), (2, 3, 1, 4), (2, 4, 1, 3), (3, 4, 1, 2). Označme  $\xi_n$  počet fluktuálních permutací v  $S_n$ ,  $\xi_0 = 1$ . Tato čísla se nazývají *Eulerova*. Platí:

$$(\xi_n)_{n=0}^{\infty} = 1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, \dots$$

- a) Vypište 16 fluktuálních permutací v  $S_5$ .  
b) Platí rekurentní formule:

$$\xi_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \xi_k \xi_{n-k}$$

Ukažte, že  $\xi_7 = 272$ .

## 9 Vytvořující funkce

**9.1. Poznámka. (O nekonečných řadách funkcí.)** Předpokládejme znalost nekonečných číselných řad. Shrňme zde některé elementární poznatky teorie nekonečných řad funkcí.

Nechť  $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost funkcí definovaných na množině  $M \subseteq \mathbb{R}$ . *Nekonečnou řadou funkcí* nazýváme symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

Řekneme, že tato řada *konverguje v bodě*  $x_0 \in M$ , jestliže konverguje číselná řada  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ .

Řekneme, že řada funkcí  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  *konverguje na množině*  $K$ , jestliže konverguje v každém bodě  $x \in K$ .

*Součtem řady*  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  na množině  $K$  nazýváme funkci  $f(x)$  definovanou takto:

$$\text{pro každé } x_0 \in K \text{ platí } f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0).$$

*Mocninou řadou* nazýváme řadu funkcí tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

kde  $a_0, a_1, a_2, \dots$  jsou reálná (respektive komplexní) čísla – tzv. *koeficienty řady*. Jistě existuje  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = u$  (může být i  $u = +\infty$ ). Číslo  $r = \frac{1}{u}$  (kde  $\frac{1}{0} = \infty$ ,  $\frac{1}{\infty} = 0$ ) nazýváme *poloměr konvergence* mocninné řady  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Snadno lze dokázat, že tato mocninná řada konverguje na intervalu  $(-r, r)$  a diverguje v každém bodě  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x| > r$ .

V matematické analýze se dokazuje, že například

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \text{ pro každé } x \in \mathbb{R} \text{ (tj. } r = \infty \text{)}.$$

Odtud například plyne, že

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots, \quad \frac{1}{e} = e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots,$$

což jsou vztahy, které jsme použili již v příkladu 2.2.

Zobecněním známé binomické věty je následující tvrzení:

*Pro každé reálné číslo  $\alpha$  platí*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \dots,$$

přičemž *poloměr konvergence uvedené řady je  $r = 1$*  (tj. uvedená rovnost platí pro všechna  $x \in (-1, 1)$ ).

Tak například

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1} x + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^2 + \dots + \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n + \dots$$

Podle příkladu 2.8 (c) tedy platí

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} x^n.$$

Je-li  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  mocninná řada a  $r$  její poloměr konvergence, lze uvnitř intervalu  $(-r, r)$  tuto řadu derivovat a integrovat člen po členu, tj. pro každé  $x \in (-r, r)$  platí

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1},$$

přičemž zderivovaná řada má stejný poloměr konvergence jako řada původní.

Dále pro každý interval  $[a, b] \subseteq (-r, r)$  platí

$$\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_a^b a_n x^n dx \right).$$

Mocninné řady  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  podle definice považujeme za sobě rovné, jestliže pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $a_n = b_n$ .

Konečně součet, součin a podíl mocninných řad definujeme následovně:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{kde } c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0,$$

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n,$$

kde  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$  je ta mocninná řada, pro kterou platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

**9.2. Definice.** Vytvořující funkcí posloupnosti  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  nazýváme mocninnou řadu  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  (na množině, kde tato řada konverguje).

**9.3. Příklad.** (a) Víme, že pro  $x \in (-1, 1)$  platí

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (\text{geometrická řada}).$$

To znamená, že  $\frac{1}{1-x}$  je vytvořující funkce posloupnosti  $1, 1, 1, 1, \dots$

(b) Najdeme vytvořující funkci posloupnosti  $1, 2, 3, 4, \dots$

Podle poznámky 9.1 víme, že pro  $x \in (-1, 1)$  platí

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots)' &= 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \\ &= \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Vytvořující funkcí posloupnosti  $(n)_{n=1}^{\infty}$  je tak funkce  $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ .

(c) Víme, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a každé  $x \in \mathbb{R}$  platí

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \quad (\text{binomická věta}).$$

To znamená, že funkce  $(1+x)^n$  je vytvořující funkcí konečné posloupnosti

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n} \quad (\text{tj. řádku Pascalova trojúhelníka}).$$

Vytvořující funkce jsou mocným nástrojem k řešení řady kombinatorických úloh, především těch, které vedou na rekurentní formule. K řešení komplikovanějších případů bychom však potřebovali hlubší znalosti o řadách funkcí. Proto se omezíme jen na několik jednodušších příkladů.

**9.4. Příklad.** Řezem v řetězci (tj. úplně uspořádané množině)  $A \neq \emptyset$  rozumíme uspořádanou dvojici  $[X, Y]$  neprázdných podmnožin množiny  $A$  takových, že  $X \cap Y = \emptyset$ ,  $X \cup Y = A$  a pro každé dva prvky  $x \in X$ ,  $y \in Y$  platí  $x \leq y$  (tj.  $x < y$ ). Je zřejmé, že v konečném  $n$ -prvkovém řetězci  $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$  existuje  $n-1$  řezů, protože „dolní třídou“  $X$  může být právě jen některá z množin  $\{a_1 < a_2 < \dots < a_i\}$ , kde  $i$  může nabýt hodnot  $1, \dots, n-1$ .

*Dělením řetězce*  $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$  nazveme každou posloupnost sestavenou následovně: v prvním kroku utvoříme nějaký řez  $[X, Y]$  v  $A$ . Ve druhém kroku utvoříme řez ve třídě  $X$  i  $Y$ , pokud tyto třídy nejsou jednoprvkové. Ve třetím kroku utvoříme řez v každé z nově vzniklých tříd obsahujících alespoň dva prvky atd. Posloupnost ukončíme v okamžiku, kdy jsou všechny vzniklé třídy jednoprvkové.

Je-li například  $A = \{a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5\}$ , je dělením na  $A$  například posloupnost

$$\begin{aligned} t_1 &= [ \{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4, a_5\} ] \\ t_2 &= [ \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4, a_5\} ] \\ t_3 &= [ \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_5\} ] \end{aligned}$$

Náš úkol nyní zní: *Kolik existuje dělení na konečném řetězci?*

Označme  $R_n$  počet dělení  $(n + 1)$ -prvkového řetězce. Představme si první krok nějakého dělení tohoto řetězce. Jak jsme již uvedli, můžeme tento krok utvořit  $n$  způsoby (dolní třída může obsahovat  $1, \dots, n$  prvků). Podle toho kolik prvků dolní třída tohoto prvního řezu obsahuje, rozdělíme všechna dělení do  $n$  skupin. Do  $k$ -té skupiny patří dělení, v nichž dolní třída 1. řezu obsahuje  $k$  prvků. Spočtème nyní počet dělení patřících do  $k$ -té skupiny. Protože dolní třída obsahuje  $k$  prvků, existuje na ní  $R_{k-1}$  řezů. Horní třída prvního řezu obsahuje  $n + 1 - k$  prvků, proto na ní existuje  $R_{n-k}$  řezů. Odtud zřejmě plyne rekurentní formule

$$R_n = R_0 R_{n-1} + R_1 R_{n-2} + \dots + R_{n-1} R_0, \quad R_0 = 1.$$

Vzhledem k tomu, že uvedená formule není konečného řádu, nemůžeme ji vyřešit pomocí metod odvozených v paragrafu 8. Ukážeme však, jak lze řešení nalézt pomocí vytvořující funkce posloupnosti  $(R_n)_{n=0}^\infty$ .

Vytvořující funkcí je v tomto případě funkce

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n.$$

Platí

$$F^2(x) = F(x) \cdot F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

kde

$$c_n = R_0 R_n + R_1 R_{n-1} + \dots + R_n R_0 = R_{n+1},$$

tj.

$$F^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_{n+1} x^n.$$

Definujeme-li nyní funkci  $G(x)$  vztahem  $G(x) = x \cdot F(x)$ , platí

$$G^2(x) = x^2 \cdot F^2(x) = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} R_{n+1} x^n.$$

Platí tak

$$\begin{aligned} G(x) &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n = R_0 x + R_1 x^2 + R_2 x^3 + \dots \\ G^2(x) &= x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} R_{n+1} x^n = R_1 x^2 + R_2 x^3 + \dots \end{aligned}$$

Odtud

$$G^2(x) = G(x) - R_0x = G(x) - x \quad (\text{neboť } R_0 = 1).$$

Z rovnice

$$G^2(x) - G(x) + x = 0$$

plyne

$$G(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Protože v bodě  $x = 0$  řada  $\sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n$  konverguje, existuje  $G(0)$ . Z posledního vztahu plyne

$$G(0) = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$$

přičemž podle definice musí být  $G(0) = 0$ . Tzn., že

$$G(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Funkci  $\sqrt{1 - 4x}$  však umíme rozvinout v mocninou řadu. Podle poznámky 9.1 platí

$$\sqrt{1 - 4x} = (1 - 4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} (4x)^n,$$

tj.

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} (4x)^n \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \cdot \frac{4^n}{n \cdot 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} x^n \right) \right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^{n+1}. \end{aligned}$$

Protože  $G(x) = x \cdot F(x)$ , plyne odtud

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^{n+1},$$

tj.

$$R_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$



**9.5. Poznámka.** Na příkladu 9.4 lze názorně demonstrovat, jak lze často úlohy na první pohled zcela odlišné převést na řešení téže rekurentní formule.

V příkladu 3.31 jsme řešili problém, kolika způsoby se mohou lidé postavit do fronty na Večerník tak, aby měl prodávající vždy nazpět. Zjistili jsme, že když má  $k$  lidí desetikorunu a  $k$  lidí pětikorunu, je těchto možností

$$\frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}.$$

Nyní všechny „příznivé“ permutace  $k$  jedniček a  $k$  pětek (viz příklad 3.31) rozdělme do  $k$  tříd takto: permutace  $a_1, \dots, a_{2k}$  patří do  $s$ -té třídy právě tehdy, když  $s$  je nejmenší přirozené číslo takové, že mezi ciframi  $a_1, \dots, a_{2s}$  je právě  $s$  jedniček a  $s$  pětek (například permutace 55151151 patří do 3. třídy). Je zřejmé, že když příznivá permutace patří do  $s$ -té třídy a  $s < k$ , pak cifra na místě  $2s+1$  musí být 5; jinak by daná permutace nebyla příznivá.

Nyní zjistíme, kolik permutací je obsaženo v  $s$ -té třídě. Buď tedy

$$a_1, \dots, a_{2s}, \dots, a_{2k}$$

permutace  $s$ -té třídy. Pak mezi členy  $a_1, \dots, a_{2s}$  je  $s$  jedniček a  $s$  pětek, přičemž pro každé  $r < s$  je mezi členy  $a_1, \dots, a_{2r}$  více pětek než jedniček. Snadno však lze dokázat, že takových permutací  $a_1, \dots, a_{2s}$  je celkem  $\frac{1}{s} \binom{2s-2}{s-1}$ . Mezi členy  $a_{2s+1}, \dots, a_{2k}$  je nyní  $k-s$  jedniček a  $k-s$  pětek. Přitom permutace  $a_{2s+1}, \dots, a_{2k}$  musí být evidentně rovněž příznivá. Počet těchto příznivých permutací je podle příkladu 3.31

$$\frac{1}{k-s+1} \cdot \binom{2k-2s}{k-s}.$$

Odtud ovšem plyne, že v  $s$ -té třídě je celkem  $\frac{1}{s} \cdot \binom{2s-2}{s-1} \cdot \frac{1}{k-s+1} \cdot \binom{2k-2s}{k-s}$  permutací. Vzhledem k tomu, že počet všech příznivých permutací je, jak jsme již uvedli,

$$\frac{1}{k+1} \binom{2k}{k},$$

plyne odtud identita

$$\sum_{s=1}^k \frac{k+1}{s(k-s+1)} \binom{2s-2}{s-1} \binom{2k-2s}{k-s} = \binom{2k}{k}.$$

Zavedeme-li nyní označení

$$\frac{1}{s+1} \cdot \binom{2s}{s} = T_s,$$

Lze uvedenou identitu přepsat na tvar

$$T_0 T_{k-1} + T_1 T_{k-2} + \dots + T_{k-1} T_0 = T_k,$$

což je formule, kterou jsme ve zcela jiné souvislosti řešili v příkladu 9.4. Řešení příkladů 3.31 a 9.4 je proto zákonitě stejné.

Nyní ukážeme, jak vypadají vytvořující funkce posloupností, udávajících počty rozkladů přirozených čísel, o nichž jsme hovořili v paragrafu 6.

**9.6. Věta.** *Pro vytvořující funkci posloupnosti  $(p(n))_{n=1}^{\infty}$  platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} \quad (\text{pro } |x| < 1),$$

položíme-li defintoricky  $p(0) = 1$ .

**Důkaz.** Potřebujeme dokázat, že

$$1 + p(1)x + p(2)x^2 + \dots + p(n)x^n + \dots = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-x^n} \cdot \dots$$

Buďte  $a_i \in \mathbb{R}$  libovolná čísla,  $i = 1, 2, \dots$ . Víme, že když  $|a_i x^i| < 1$ , pak platí

$$\frac{1}{1-a_i x^i} = 1 + a_i x^i + a_i^2 x^{2i} + \dots + a_i^n x^{ni} + \dots \quad (\text{součet geometrické řady}).$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-a_1 x) \cdot (1-a_2 x^2) \cdot \dots \cdot (1-a_k x^k) \cdot \dots} &= (1 + a_1 x + a_1^2 x^2 + a_1^3 x^3 + \dots) \cdot \\ &\cdot (1 + a_2 x^2 + a_2^2 x^4 + a_2^3 x^6 + \dots) \cdot \dots \cdot (1 + a_k x^k + a_k^2 x^{2k} + a_k^3 x^{3k} + \dots) \cdot \dots = \\ &= 1 + a_1 x + (a_1^2 + a_2)x^2 + \dots + (a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_k^{r_k} + \dots)x^n + \dots \end{aligned}$$

V koeficientu u  $x^n$  určuje každý sčítanec  $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_k^{r_k}$  právě jeden rozklad čísla  $n$ , totiž

$$\underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{r_1} + \underbrace{(2 + 2 + \dots + 2)}_{r_2} + \dots + \underbrace{(k + k + \dots + k)}_{r_k} = n.$$

(Například koeficient u  $x^2$  je roven součtu  $a_1^2 + a_1^0 a_2^1$ , jehož sčítanci určují po řadě rozklady  $1 + 1$  a  $2$  čísla 2.)

Když nyní položíme  $a_1 = a_2 = \dots = 1$ , obdržíme dokazované tvrzení. •

**9.7. Poznámka.** (a) Poloměr konvergence vytvořující funkce  $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$  je tedy roven 1.

(b) Inverzní funkcí k vytvořující funkci  $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$  je nekonečný součin

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = (1 - x) \cdot (1 - x^2) \cdot \dots \cdot (1 - x^n) \cdot \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Koeficienty  $c_n$  mají rovněž jednoduchou kombinatorickou interpretaci. Platí

$$c_n = A(n) - B(n),$$

kde  $A(n)$  je počet rozkladů čísla  $n$  na sudý počet navzájem různých sčítanců a  $B(n)$  je počet rozkladů čísla  $n$  na lichý počet navzájem různých sčítanců.

(c) Již Euler, který první odvodil vytvořující funkci posloupnosti  $(p(n))_{n=1}^{\infty}$ , dokázal, že „většina“ koeficientů  $c_n$  je rovna nule. Přesněji řečeno, odvodil následující vztah, dnes běžně nazývaný *Eulerova identita*:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \left( x^{\frac{3k^2-k}{2}} + x^{\frac{3k^2+k}{2}} \right).$$

Důkaz této identity, který je nejvýhodnější provádět pomocí Ferrersových diagramů, zde uvádět nebudeme.

(d) Eulerovu identitu lze zřejmě v řeči rozkladů přirozených čísel interpretovat — při označení uvedeném v (b) — takto: *Necht' přirozené číslo  $n$  lze psát ve tvaru  $\frac{3k^2 \pm k}{2}$ , kde  $k$  je vhodné přirozené číslo. Pak  $A(n) = B(n)$ . Je-li přirozené číslo  $n$  výše uvedeného tvaru, pak  $A(n) - B(n) = (-1)^k$ .*

**9.8. Poznámka.** Ideu použitou v důkazu věty 9.6 lze samozřejmě použít v řadě analogických případů. Chceme-li například zjistit počet rozkladů čísla  $n$  na sčítance, z nichž každý je roven některému z čísel  $s_1, \dots, s_k$ , přičemž sčítanci jsou navzájem různí, utvoříme výraz

$$(1 + x^{s_1})(1 + x^{s_2}) \dots (1 + x^{s_k}).$$

Po roznásobení obdržíme evidentně výraz, v němž koeficient u  $x^n$  udává počet hledaných rozkladů.

**9.9. Poznámka.** Vytvořující funkcí posloupnosti  $(p(n, k))_{n=1}^{\infty}$  je funkce

$$G(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^k)}.$$

Vytvořující funkci posloupnosti udávající počty rozkladů čísla  $n$  na liché sčítance je funkce

$$H(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots}$$

Konečně vytvořující funkcí posloupnosti udávající počet rozkladů čísla  $n$  na navzájem různé sčítance, je funkce

$$K(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots = \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k).$$

Ukažme si, jak lze pomocí uvedených vytvořujících funkcí snadno odvozovat tvrzení o rozkladech přirozených čísel. Platí například

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots} = \\ &= \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\dots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots} = \\ &= \frac{[(1-x)(1+x)] \cdot [(1-x^2)(1+x^2)] \cdot [(1-x^3)(1+x^3)] \dots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots} = \\ &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots = K(x). \end{aligned}$$

Dokázali jsme tak právě, že platí následující věta.

**9.10. Věta.** *Počet rozkladů čísla  $n$  na navzájem různé sčítance je roven počtu rozkladů čísla  $n$  na liché sčítance.*

### Cvičení

1. Dokažte, že vytvořující funkce Fibonacciovy posloupnosti je

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

2. Buď  $(B_n)$  posloupnost Bellových čísel.

- Dokažte, že řada  $\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$  diverguje pro všechna  $x \neq 0$ .
- Dokažte, že řada  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$  absolutně konverguje na  $\mathbb{R}$ .

## 10 Blokovaná schémata, latinské čtverce a konečné roviny

Jedním z centrálních pojmů moderní kombinatoriky jsou tzv. *blokovaná schémata*, nazývaná též *konfigurace*, *designy* i jinak. Teorie blokovaných schémat je intenzívně rozvíjena a je velmi složitá. Proto se zmíníme jen o nejzákladnějších pojmech a zavedeme některé jednoduché typy.

**10.1. Definice.** Buďte  $v, b, k, r, \lambda$  přirozená čísla,  $A$  konečná množina,  $|A| = v$ . Systém podmnožin

$$X_1, X_2, \dots, X_b$$

množiny  $A$  se nazývá *blokové schéma typu*  $(v, b, k, r, \lambda)$  v množině  $A$ , jestliže  $|X_1| = |X_2| = \dots = |X_b| = k$ , každý prvek  $a \in A$  je prvkem právě  $r$  množin  $X_i$  a pro každé dva různé prvky  $a, b \in A$  je  $\{a, b\}$  podmnožinou právě  $\lambda$  množin  $X_i$ .

Množiny  $X_i$  se nazývají *bloky* daného blokovaného schématu.

Je samozřejmé, že nemusí existovat blokované schéma libovolného předepsaného typu. Jak však ukážeme v příkladu 10.2, může blokované schéma existovat.

**10.2. Příklad.** Buď  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Blokovým schématem typu  $(7, 7, 3, 3, 1)$  je například systém množin

$$\begin{array}{lll} X_1 = \{1, 2, 4\} & X_4 = \{4, 5, 7\} & X_7 = \{1, 3, 7\} \\ X_2 = \{2, 3, 5\} & X_5 = \{1, 5, 6\} & \\ X_3 = \{3, 4, 6\} & X_6 = \{2, 6, 7\} & \end{array}$$

**10.3. Věta.** *Existuje-li blokované schéma typu  $(v, b, k, r, \lambda)$ , platí*

$$bk = vr, \quad r(k - 1) = \lambda(v - 1).$$

**Důkaz.** První rovnice je evidentní; levá i pravá strana zřejmě udává číslo  $|X_1| + \dots + |X_b|$ . Ve druhé rovnici sečítáme počty dvojic obsahujících daný prvek  $a_i \in A$ . Prvek  $a_i$  je obsažen v  $r$  blocích a v každém z nich tvoří dvojice se zbývajícími  $k - 1$  prvky. Současně však  $a_i$  tvoří  $\lambda$  dvojic s každým z  $v - 1$  zbývajících prvků. •

**10.4. Definice.** Blokované schéma typu  $(v, b, 3, r, \lambda)$  se nazývá *systémem trojic*. Pro  $\lambda = 1$  se systém trojic nazývá *Steinerův*.

**10.5. Poznámka.** Steinerovým systémem trojic je například blokované schéma z příkladu 10.2.

J. Steiner v roce 1853 zformuloval následující problém: *Pro která přirozená čísla  $n$  lze rozdělit  $n$  písmen do trojic tak, aby se každá (neuspořádaná) dvojice písmen vyskytovala v právě jedné trojici?*

Protože se ve Steinerových trojicích každé písmeno vyskytuje s každým jiným písmenem právě jednou, musí být číslo  $n - 1$  sudé, tj.  $n \equiv 1 \pmod{2}$ . (Stačí si totiž uvědomit, že každé písmeno je ve trojici s dalšími dvěma písmeny.)

Dále víme, že každá trojice obsahuje tři dvojice a každá dvojice se v trojicích vyskytne právě jednou. Odtud plyne, že celkový počet dvojic, což je číslo  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ , musí být násobek tří. Celkově odtud plyne, že číslo  $n$  musí být tvaru  $6k + 1$ , respektive  $6k + 3$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (tj.  $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$ ).

V roce 1859 dokázal M. Riess, že tato nutná podmínka je současně postačující, tj. platí následující tvrzení, které uvedeme bez důkazu.

**10.6. Věta.** *Blokové schéma typu  $(n, b, 3, r, 1)$  existuje právě tehdy, když*

$$n = 6k + 1 \quad \text{nebo} \quad n = 6k + 3, \quad k \in \mathbb{N}_0, n \geq 3.$$

Buď dán Steinerův systém trojic typu  $(n, b, 3, r, 1)$ . Jak jsme již uvedli v poznámce 10.5, je počet všech dvojic roven číslu  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Každá trojice obsahuje tři dvojice, takže počet  $b$  všech bloků je roven číslu  $\frac{n(n-1)}{6}$ . Podle věty 10.3 dále platí  $r \cdot 2 = n - 1$ , tj.  $r = \frac{n-1}{2}$ .

Odtud a z věty 10.6 plyne

**10.7. Věta.** *Na  $n$ -prvkové množině existuje systém Steinerových trojic právě tehdy, když  $n = 6k + 1$  nebo  $n = 6k + 3$  ( $k \in \mathbb{N}_0, n \geq 3$ ). V tom případě je těchto trojic  $\frac{n(n-1)}{6}$  a každý prvek se vyskytuje v  $\frac{n-1}{2}$  trojicích.*

**10.8. Příklad.** Uvedme Steinerovy systémy trojic pro nejmenší tři možné hodnoty  $n$ , tj.  $n = 3$ ,  $n = 7$  a  $n = 9$ .

$$n = 3: \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

$$n = 7: \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 7 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 3 & 5 & 6 \end{array}$$

$$n = 9: \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 2 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 9 \end{array}$$

**10.9. Poznámka.** Úlohu vedoucí na Steinerův systém trojic zformuloval ještě před Steinerem v roce 1847 anglický matematik R. T. Kirkman. Jde o známý *Kirkmanův problém 15 dívek: 15 školáček chodí denně na procházku seřazeno do pěti trojic. Lze je řadit do trojic tak, aby každá s každou šla během 7 dnů ve trojici právě jednou?*

Kladná odpověď je vcelku jednoduchá. Rozpis procházek může být následující:

1 2 3	1 4 7	1 5 13	1 6 8	1 9 10
4 5 6	2 5 10	2 4 12	2 11 13	2 7 14
7 8 9	6 11 14	6 7 15	4 10 15	3 5 15
10 11 12	9 12 15	8 10 14	5 9 14	4 8 11
13 14 15	3 8 13	3 9 11	3 7 12	6 12 13
	1 11 15	1 12 14		
	2 6 9	2 8 15		
	3 4 14	3 6 10		
	5 8 12	4 9 13		
	7 10 13	5 7 11		

Jde o Steinerův systém trojic s parametry  $v = 15$ ,  $b = 35$ ,  $k = 3$ ,  $r = 7$ ,  $\lambda = 1$ , přičemž musí být splněna ještě další podmínka: trojice musí být rozděleny na sedm tříd po pěti trojicích tak, aby byl každý prvek v každé třídě právě jednou.

Dodnes není známo, pro která  $n$  má Kirkmanův problém, přesněji řečeno jeho příslušné přeformulování, řešení.

Úzkou souvislost s teorií blokovaných schémat mají tzv. **latinské čtverce**.

**10.10. Definice.** Buď dána libovolná  $n$ -prvková množina  $A$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). *Latinský čtvercem řádu  $n$*  rozumíme čtvercovou tabulku o  $n$  řádcích a  $n$  sloupcích takovou, že v každém řádku a každém sloupci je permutace všech prvků množiny  $A$ .

### 10.11. Příklad.

1 2 3 4 5	1 2 3 4 5
2 3 4 5 1	2 1 4 5 3
3 4 5 1 2	3 4 5 1 2
4 5 1 2 3	4 5 2 3 1
5 1 2 3 4	5 3 1 2 4

jsou latinské čtverce řádu 5.

**10.12. Poznámka.** Je zřejmé, že existují latinské čtverce každého řádu  $n \in \mathbb{N}$ . Z každého latinského čtverce řádu  $n > 1$  můžeme snadno utvořit další latinské čtverce například tak, že změníme pořadí řádků, respektive sloupců, nebo provedeme nějakou permutaci prvků množiny  $A$  nebo eventuálně uvedené postupy zkombinujeme.

Řekneme, že dva latinské čtverce jsou *ekvivalentní*, jestliže výše uvedeným způsobem lze jeden převést na druhý.

Lehce lze dokázat, že každý latinský čtverec 5. řádu je ekvivalentní právě s jedním z latinských čtverců z příkladu 10.11.

Latinské čtverce se vyskytují v nejrůznějších souvislostech. Utvoříme-li například obvyklou tabulku násobení v libovolné konečné grupě, obdržíme zřejmě latinský čtverec.

Latinské čtverce mají rovněž jednoduchou geometrickou interpretaci. Považujme každé z  $n^2$  míst v latinském čtverci za „bod“ a představme si následující „spojnice“ bodů: (1) řádky latinského čtverce, (2) sloupce latinského čtverce, (3) body v nichž je vepsán stejný prvek. Tyto spojnice tvoří tzv. 3-sít' s  $n^2$  uzly. Každá spojnice je tvořena  $n$  body, spojnice téhož „typu“ se neprotínají a každým bodem prochází právě jedna spojnice každého ze tří uvedených typů.

Naopak každou 3-sít' lze interpretovat jako latinský čtverec.

**10.13. Definice.** Buďte dány dva latinské čtverce  $n$ -tého řádu utvořené z prvků množiny  $A$ . Označme  $a_{ij}$ , respektive  $b_{ij}$ , prvek ležící v průsečíku  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce prvního, respektive druhého latinského čtverce. Protože  $|A^2| = n^2$ , lze všechny prvky kartézského čtverce  $A^2$  vepsat do schématu utvořeného z  $n$  řádků a  $n$  sloupců.  
Řekneme, že tyto dva čtverce  $(a_{ij})$  a  $(b_{ij})$  jsou *ortogonální*, když ve čtverci  $(a_{ij}, b_{ij})$  je každý prvek z  $A^2$  právě jednou.

**10.14. Příklad.** Čtverce

1	2	3		2	3	1
2	3	1	a	1	2	3
3	1	2		3	1	2

jsou zřejmě ortogonální, neboť když z nich utvoříme popsáním způsobem čtverec

12	23	31
21	32	13
33	11	22



jsou v tomto čtverci všechny prvky kartézského součinu  $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$  (příčemž prvek  $[i, j]$  jsme zapsali stručně jako  $ij$ ).

Je zřejmé, že neexistují ortogonální latinské čtverce 2. řádu. Jediné latinské čtverce 2. řádu jsou totiž čtverce

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$$

a ty nejsou ortogonální, neboť ve čtverci

$$\begin{array}{cc} 12 & 21 \\ 21 & 12 \end{array}$$

nejsou všechny prvky součinu  $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$ .

Problematiku existence ortogonálních latinských čtverců 6. řádu zpopularizoval Euler, když v roce 1782 zformuloval slavnou *úlohu o 36 důstojnících*:

*Sestavte 36 důstojníků 6 různých hodnotí ze 6 různých pluků do čtverce tak, aby v žádné řadě ani žádném zástupu nestáli dva důstojníci stejné hodnoti ani dva důstojníci ze stejného pluku.*

Je zřejmé, že tato Eulerova úloha vede na konstrukci dvou ortogonálních latinských čtverců 6. řádu. Protože se konstrukce těchto čtverců Eulerovi nedařila, vyslovil hypotézu, že *neexistují dva ortogonální latinské čtverce řádu  $n = 4k + 2$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$* . (Podrobnosti viz ve cvičení 3 na konci této kapitoly.)

Pravdivost této hypotézy pro  $k = 0$  jsme ukázali výše. Samotný Euler se nedožil vyřešení tohoto problému pro  $k > 0$ . Teprve v roce 1900 dokázal francouzský matematik G. Tarry, že **neexistují dva ortogonální latinské čtverce 6. řádu**.

Vzhledem k tomu, že latinských čtverců 6. řádu je téměř 25 000 000 a Tarry své tvrzení odvodil jistým systematickým výčtem, je jeho výkon opravdu pozoruhodný. (O počtu latinských čtverců řádu  $n$  viz kapitolu 2, poznámku 8.16).

Eulerova hypotéza byla dlouho považována za správnou. Vyvrácena byla až v roce 1959, kdy R. C. Bose a S. Shrikhande sestrojili dva ortogonální latinské čtverce 22. řádu.

Později Bose, Shrikhande a E. T. Parker dokázali dokonce následující tvrzení:

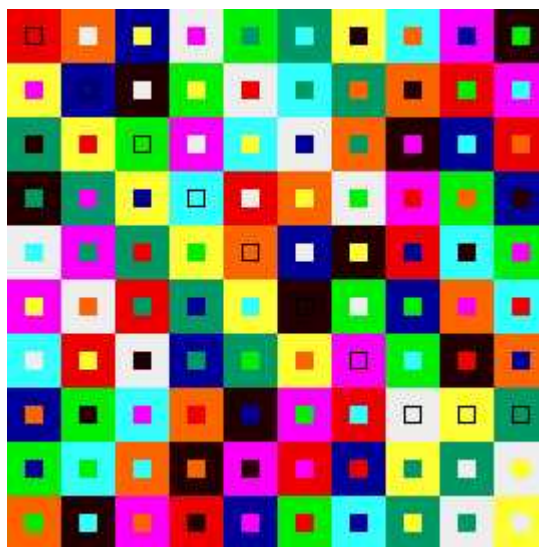
**10.15. Věta.** *Pro každé přirozené  $n > 2$  kromě  $n = 6$  existují ortogonální latinské čtverce  $n$ -tého řádu.*

**Důkaz.** Důkaz nebudeme provádět, neboť přesahuje rámec tohoto textu. K jeho provedení je třeba řady tvrzení o blokovaných schématech. ●

**10.16. Příklad.** Ukažme dva ortogonální latinské čtverce 10. řádu.

00	49	17	96	28	83	75	61	52	34
76	11	59	27	90	38	84	03	63	45
85	70	22	69	37	91	48	13	04	56
58	86	71	33	09	47	92	24	15	60
93	68	80	72	44	19	57	35	26	01
67	94	08	81	73	55	29	46	30	12
39	07	95	18	82	74	66	50	41	23
21	32	43	54	65	06	10	77	88	99
42	53	64	05	16	20	31	89	97	78
14	25	36	40	51	62	03	98	79	87

Ortogonalní latinské čtverce 10. řádu si můžeme znázornit také barevně (viz obr. 10.7):



Obr. 10.7: Ortogonalní latinské čtverce 10. řádu

Z tohoto příkladu tedy plyne nesprávnost Eulerovy hypotézy již pro  $k = 2$ .

Důležitou částí kombinatoriky, těsně propojenou s teorií blokových schémat, jsou tzv. *konečné geometrie*. Ukažme souvislost některých pojmů konečných geometrií s teorií latinských

čtverců.

**10.17. Definice.** Buď  $A \neq \emptyset$  konečná množina,  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$ . Necht' platí:

- (1) Pro každé  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$ , existuje právě jedna množina  $P \in \mathcal{R}$  tak, že  $\{x, y\} \subseteq P$ .
- (2) Pro každou množinu  $P \in \mathcal{R}$  a pro každý prvek  $x \in A$ ,  $x \notin P$ , existuje právě jedna množina  $Q \in \mathcal{R}$  taková, že  $x \in Q$  a  $P \cap Q = \emptyset$ .
- (3) Existují tři navzájem různé prvky  $x, y, z \in A$  takové, že  $\{x, y, z\}$  není podmnožinou žádné množiny  $P \in \mathcal{R}$ .

Pak se dvojice  $(A, \mathcal{R})$  nazývá *konečná afinní rovina*. Prvky množiny  $A$  se nazývají *body* a prvky množiny  $\mathcal{R}$  *přímky* této roviny.

Ve shodě s obvyklou geometrickou terminologií zavedeme následující definici.

**10.18. Definice.** Dvě disjunktní přímky nazveme *rovnoběžkami*. *Směrem* v afinní rovině nazveme systém všech rovnoběžek s danou přímkou. Skutečnost, že přímky  $P, Q$  jsou rovnoběžné, budeme značit symbolem  $P \parallel Q$ .

**10.19. Věta.** *Necht'  $P, Q, R$  jsou přímky v konečné afinní rovině. Necht'  $P \parallel Q, Q \parallel R, P \neq R$ . Pak  $R \parallel P$ .*

**Důkaz.** Připustíme, že existuje  $a \in P \cap R$ . Pak by bodem  $a$  procházely dvě rovnoběžky s přímkou  $Q$ , což není možné. •

**10.20. Věta.** *Všechny přímky v konečné afinní rovině mají stejný počet bodů.*

**Důkaz. I.** Nejprve dokážeme, že stejný počet bodů mají všechny přímky téhož směru.

Necht' tedy v konečné afinní rovině  $(A, \mathcal{R})$  existuje přímka  $P$  tvořená  $n$  body  $a_1, \dots, a_n$ . Buď  $b \in A$  libovolný bod neležící na přímce  $P$  (existence takového bodu plyne z vlastnosti (3)). Podle (2) prochází tímto bodem právě jedna rovnoběžka  $Q$  s přímkou  $P$ . Nyní dokážeme, že  $|Q| = n$ .

Pro každý bod  $a_i \in P$  existuje podle (1) právě jedna přímka  $R_i$  taková, že  $\{a_i, b\} \subseteq R_i$ . Pro  $a_i \neq a_j$  je zřejmě  $R_i \neq R_j$ . (Kdyby totiž  $R_i = R_j$ , ležely by body  $a_i, a_j, b$  na téže přímce, avšak  $a_i, a_j$  určují přímku  $P$  a  $b \notin P$ .)

Zvolme  $a_i \in P$  libovolně. Podle (2) prochází každým bodem  $a_j \in P$ ,  $a_j \neq a_i$ , právě jedna přímka disjunktní s  $R_i$ . Označme tuto přímku  $S_j$ . Kdyby byly přímky  $S_j$  a  $Q$  rovnoběžné, musela by se přímka  $S_j$  rovnat přímce  $P$ , protože bodem  $a_j$  prochází jediná rovnoběžka s  $Q$ . To by však znamenalo, že  $a_i \in R_i \cap S_j$ , což je spor s předpokladem.

Přímka  $S_j$  proto protne přímku  $Q$  v jednom bodě  $s_j$  různém od  $b$  (neboť  $S_j \cap R_j = \{a_j\}$ ). Pro  $j \neq k$  přitom zřejmě platí  $s_j \neq s_k$ . Na přímce  $Q$  tak leží body  $b, s_j, j \neq i$ . Přitom je zřejmé, že na  $Q$  nemůže ležet žádný další bod. (Předpokládejme totiž, že existuje na  $Q$  další bod  $c$ . Podle (2) existuje přímka  $C$  tak, že  $c \in C, C \cap R_i = \emptyset$ , tj.  $C \neq Q$ , neboť  $b \in Q \cap R_i$ . Je-li  $c \neq s_j$ , je  $C \neq S_j$ . Pak ale  $C$  protne přímku  $P$  v bodě různém od  $a_i$  pro všechna  $i$ , což je spor.)

Dokázali jsme tak, že  $|Q| = n$ .

**II.** Necht' nyní  $A, B$  jsou dvě různé přímky, které nejsou rovnoběžné. Pripustme, že  $A$  je tvořena  $n$  body  $a_1, \dots, a_n$  a na  $B$  leží navzájem různé body  $b_1, \dots, b_{n+1}$ . Zvolme označení tak, že průsečík přímek  $A, B$  je  $a_1 = b_1$ . Podle definice bodem  $b_{n+1}$  prochází rovnoběžka  $C$  s přímkou  $A$ . Tato rovnoběžka má podle první části důkazu  $n$  bodů; označme je  $c_1, \dots, c_n = b_{n+1}$ .

Označme  $S_1$  přímkou procházející body  $b_1, c_1$  a zvolme na  $B$  libovolný bod  $b_i \neq b_1$ . Tímto bodem prochází jediná rovnoběžka  $S_i$  s přímkou  $S_1$ . Tato rovnoběžka nutně protne přímky  $A, B$ . Kdyby totiž byly například přímky  $A$  a  $S_i$  rovnoběžné, procházely by bodem  $a_1$  dvě rovnoběžky s přímkou  $S_i$ , a to přímky  $A$  a  $S_1$ .

Označme  $S_i \cap A = a_i^*, S_i \cap B = b_i^*$ . Pro  $i \neq j$  však podle tvrzení 10.19 platí  $a_i^* \neq a_j^*, b_i^* \neq b_j^*$ . To však není možné, neboť na přímce  $B$  je víc bodů než na přímkách  $A$  a  $C$ .

Přímky  $A, B$  tedy musí obsahovat stejný počet bodů. •

**10.21. Definice.** Řádem konečné afinní roviny rozumíme počet bodů ležících na přímkách v této rovině.

Snadno lze dokázat následující tvrzení.

**10.22. Věta.** Konečná afinní rovina řádu  $n$  má  $n^2$  bodů a  $n^2 + n$  přímek. Na každé přímce leží  $n$  bodů a každým bodem prochází  $n + 1$  přímek. Všechny přímky lze rozdělit do  $n + 1$  směrů a každý směr obsahuje  $n$  rovnoběžek.

Nyní je ovšem přirozená otázka, zda nějaká afinní konečná rovina vůbec existuje.

**10.23. Příklad.** V tabulce 1.4 je popsána konečná afinní rovina 4. řádu. Podle věty 10.22 musí obsahovat 16 bodů (jsou označeny arabskými číslicemi) a 20 přímek (jsou označeny římskými číslicemi). Každý z pěti směrů obsahuje čtyři přímky.

**10.24. Poznámka.** Sportovně založený čtenář může postřehnout, že afinní rovina 4. řádu uvedená v tabulce 1.4 je rozpisem rozjížděk při klasické ploché dráze, kdy 16 jezdců absolvuje 20 rozjížděk tak, že každý jezdec jede s každým právě v jedné rozjíždce.

Tabulka 1.4 je důkazem, že konečné afinní roviny vskutku existují. Tím však vůbec není zodpovězena otázka, zda existuje konečná afinní rovina libovolného řádu  $n \in \mathbb{N}$ . Alespoň částečnou odpověď na tuto otázku nám dává teorie latinských čtverců.

První směr	I	1	2	3	4
	II	5	7	6	8
	III	10	11	9	12
	IV	15	14	16	13
Druhý směr	V	13	1	5	9
	VI	14	10	2	6
	VII	11	15	7	3
	VIII	4	8	12	16
Třetí směr	IX	6	16	1	11
	X	12	5	15	2
	XI	8	9	3	14
	XII	13	4	10	7
Čtvrtý směr	XIII	7	12	14	1
	XIV	2	13	8	11
	XV	16	3	10	5
	XVI	9	6	4	15
Pátý směr	XVII	1	8	10	15
	XVIII	2	7	9	16
	XIX	3	6	12	13
	XX	4	5	11	14

Tabulka 1.4: Konečná afinní rovina 4. řádu

Jak latinské čtverce souvisejí s afinními rovinami si ukážeme na rovině uvedené v tabulce 1.4. (Porovnej následující konstrukci s definicí 3–sítě v poznámce 10.12.)

Seřadíme nejprve 16 bodů dané roviny do následující tabulky:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Na první pohled je vidět, že řádky v této tabulce jsou přímkami 1. směru a sloupce přímkami 2. směru v dané rovině. Nyní si ukážeme, jak lze zapsat přímkami dalších tří směrů.

Uvažujeme 3. směr, tj. přímkami IX – XII. V uvedené čtvercové tabulce pak na místa bodů první z těchto přímek, tj. přímkami číslo IX, vepíšeme číslo 1. (Tj. nahradíme jedničkou čísla 1,6,11,16.) Podobně cifrou 2 nahradíme body přímkami číslo X (tj. vepíšeme dvojku místo čísel 2,5,12,15). Když tuto úpravu provedeme analogicky i pro přímkami číslo XI a XII, obdržíme čtverec

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Nyní si uvědomme, že jsme zákonitě obdrželi latinský čtverec 4. řádu. Vzhledem k tomu, že přímkami 3. směru se neprotínají (jsou to rovnoběžky), nemůže se stát, aby jedno a totéž místo mělo být obsazeno různými ciframi. Protože každá přímkami 3. směru protne každou přímkami 1. směru (zapsanou v některém řádku čtvercové tabulky) právě jednou a rovněž každou přímkami 2. směru (zapsanou v některém sloupci) protne právě v jednom bodě, je v každém řádku a každém sloupci vzniklého čtverce opravdu permutace čísel 1, 2, 3, 4, takže vzniklý čtverec je nutně latinský.

Když nyní provedeme analogickou úvahu i pro přímkami 4. a 5. směru, obdržíme latinské čtverce

1	2	3	4		1	2	3	4
3	4	1	2		4	3	2	1
4	3	2	1	a	2	1	4	3
2	1	4	3		3	4	1	2

Popsaným způsobem jsme pomocí roviny 4. řádu sestrojili tři latinské čtverce 4. řádu. Jak se čtenář může snadno přesvědčit, jsou každé dva z těchto čtverců vzájemně ortogonální. Současně je snadné si uvědomit, že ortogonalita těchto čtverců je zákonitá.

Popsanou konstrukci však nyní můžeme snadno obrátit. Budou-li dány libovolné tři vzájemně ortogonální latinské čtverce 4. řádu, sestrojíme z nich zpětně snadno afinní rovinu 4. řádu.

Uvedenou úvahu můžeme zcela analogicky provést pro každé přirozené  $n$  a tak dokázat následující tvrzení.

**10.25. Věta.** *Konečná afinní rovina řádu  $n \geq 3$  existuje právě tehdy, když existuje  $n - 1$  latinských čtverců  $n$ -tého řádu, z nichž každé dva jsou ortogonální.*

Jak jsme již uvedli, neexistují ani dva ortogonální latinské čtverce 6. řádu. Proto z věty 10.25 okamžitě plyne

**10.26. Důsledek.** *Neexistuje konečná afinní rovina 6. řádu.*

(Kdyby sportovní činovníci znali tento výsledek, pravděpodobně by nikdy nevznikla tzv. „dlouhá plochá dráha“, při níž jezdí v jedné rozjíždě 6 jezdců. Pro tuto soutěž podle důsledku 10.26 nelze sestroit analogický „spravedlivý“ rozpis jako pro klasickou plochou dráhu.)

**10.27. Poznámka.** Dodnes není obecně známo, pro která  $n$  konečná afinní rovina  $n$ -tého řádu existuje. Jsou známy jen některé dílčí výsledky. Tak například metodami analytické geometrie lze odvodit tvrzení:

*Je-li  $n = p^k$ , kde  $p$  je prvočíslo a  $k$  přirozené číslo, pak existuje konečná afinní rovina řádu  $n$ .*

Podstatně komplikovanější je důkaz následujícího tvrzení:

*Necht' číslo  $n$  není součtem čtverců dvou přirozených čísel a necht'  $n \equiv 1 \pmod{4}$  nebo  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Pak neexistuje afinní rovina řádu  $n$ .*

Podle uvedeného tvrzení neexistuje například afinní rovina 14. řádu. Je však řada případů, kdy pro dané  $n$  neumíme rozhodnout, zda afinní rovina řádu  $n$  existuje. Nejmenším takovým číslem je  $n = 10$ .

Ke konstrukci afinní roviny 10. řádu bychom potřebovali mít k dispozici 9 vzájemně ortogonálních latinských čtverců 10. řádu. Podle příkladu 10.16 dva ortogonální latinské čtverce 10. řádu existují. Ani pomocí počítačů však dodnes nebyla nalezena ani jedna trojice vzájemně ortogonálních latinských čtverců 10. řádu. Existence afinní roviny 10. řádu tak dodnes nebyla ani dokázána ani vyvrácena. Pro velkou obtížnost tohoto problému se mu často říká matematický „problém století“, i když mnohé jiné problémy jsou známější a populárnější.

Kromě konečných afinních rovin jsou intenzivně studovány i konečné *projektivní* roviny, jejichž definice je v některých rysech obdobná.

**10.28. Definice.** Buď  $A \neq \emptyset$  konečná množina (její prvky budeme opět nazývat *body*), a množina  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$  (její body budeme opět nazývat *přímky*). Necht' platí:

- (1) Pro každé  $x, y \in A, x \neq y$ , existuje právě jedna množina  $P \in \mathcal{R}$  tak, že  $\{x, y\} \subseteq P$ .
- (2) Každé dvě různé přímky se protínají v jediném bodě.
- (3) Existují čtyři navzájem různé prvky, z nichž žádné tři neleží na téže přímce.

Pak se dvojice  $(A, \mathcal{R})$  nazývá *konečná projektivní rovina*.

Základní vlastnosti projektivních rovin se odvíjejí od následujícího tvrzení, jehož důkaz je elementární a proto jej přenecháme čtenáři.

**10.29. Věta.** *V konečné projektivní rovině existují čtyři navzájem různé přímky, z nichž žádné tři se neprotínají v témže bodě.*

Z definice 10.28 a z věty 10.29 plyne základní vlastnost projektivních rovin, tzv. *princip duality*:

**10.30. Věta.** *Každé tvrzení v teorii konečných projektivních rovin zůstane v platnosti, když v něm vzájemně zaměníme pojmy bod a přímka.*

Snadné je odvodit i následující tvrzení.

**10.31. Věta.** *V každé projektivní rovině platí:*

- (1) všechny přímky mají stejný počet bodů;
- (2) každým bodem prochází stejný počet přímek;
- (3) počet bodů na přímkách je stejný jako počet přímek procházejících jednotlivými body.

Má tedy smysl následující definice.

**10.32. Definice.** Necht' každá přímka konečné projektivní roviny obsahuje  $n + 1$  bodů. Pak se číslo  $n$  nazývá *řád* dané roviny.

Z věty 10.31 a z definice 10.32 je zřejmé následující tvrzení.

**10.33. Věta.** *Konečná projektivní rovina řádu  $n$  má  $n^2 + n + 1$  bodů a  $n^2 + n + 1$  přímek.*



**10.34. Poznámka.** Konečná projektivní rovina 2. řádu by měla, pokud existuje, obsahovat 7 bodů a 7 přímek. Čtenář snadno ověří, že takovou rovinou je například Steinerův systém trojic pro  $n = 7$  v příkladu 10.8.

Odpověď na otázku, pro která  $n$  existuje konečná projektivní rovina tohoto řádu je stejná jako u afinních rovin: *konečná projektivní rovina  $n$ -tého řádu existuje právě tehdy, když existuje  $n - 1$  navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu  $n$ .*

### Cvičení

1. Zkonstruujte dva latinské čtverce pátého řádu, které mají shodný právě jeden řádek.
2. Dokažte, že mezi latinskými čtverci řádu  $n$  jich může existovat nejvýše  $n - 1$  navzájem ortogonálních.
3. Existuje zajímavá souvislost latinských čtverců se čtverci *magickými*, o nichž jsme se již několikrát zmínili.

Připomeňme, že *magickým čtvercem řádu  $n$*  rozumíme tabulku o  $n$  řádcích a  $n$  sloupcích, do níž jsou zapsána čísla  $1, 2, \dots, n^2$  tak, že součet čísel ve všech řádcích, sloupcích a obou diagonálách je stejný. Snadno se ukáže, že uvedený součet v tomto případě musí být  $\frac{n \cdot (n^2 + 1)}{2}$ . Vynecháme-li požadavek, aby daný součet byl v diagonálách, dostaneme definici tzv. *polomagického čtverce*.

Není divu, že magické čtverce přitahovaly svými fascinujícími vlastnostmi lidi již před mnoha staletími. Již v úvodním paragrafu jsme se zmínili o magickém čtverci nazývaném *Saturn*, který vznikne přepsáním konfigurace *Lo-šu* (viz obrázky 1.1 a 1.2).

Magické čtverce se objevovaly například i ve výtvarném umění. Uveďme za mnohé obraz Albrechta Dürera *Melancholia* (viz obrázek 10.8; na obrázku 10.9 je detail magického čtverce).

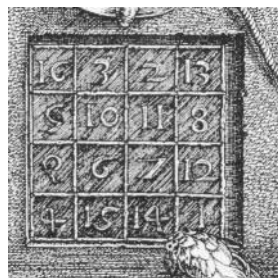
Již ve 13. století popsal čínský matematik Jang-Hui řadu konstrukcí magických čtverců 3. až 10. řádu. Řada těchto konstrukcí byla velmi důmyslná. Uveďme na ukázkou například konstrukci magického čtverce 9. řádu, nazývaného *Veliký Lo-šu*.

Očíslujme řádky a sloupce čtverce *Lo-šu* čísly 0, 1, 2. Dostaneme tak

	0	1	2
0	4	9	2
1	3	5	7
2	8	1	6



Obr. 10.8: Dürerův obraz *Melancholia*



Obr. 10.9: Detail Dürerova obrazu *Melancholia*

Označme číslo v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci tohoto čtverce symbolem  $L(i, j)$ , (takže například  $L(1, 2) = 7$ ). Čtverec „Veliký Lo-šu“ dostaneme tak, že při analogickém očíslování jeho řádků a sloupců čísla  $0, 1, 2, \dots, 8$  jsou jeho prvky  $G(i, j)$  vytvořeny podle pravidla:

$$G(3a + b, 3c + d) = L(a, c) + 9 \cdot [L(b, d) - 1], \quad a, b, c, d = 0, 1, 2.$$

Např.:

$$G(7, 2) = L(2, 0) + 9 \cdot [L(1, 2) - 1] = 8 + 9 \cdot (7 - 1) = 62$$

Dostaneme tak

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	31	76	13	36	81	18	29	74	11
1	22	40	58	27	45	63	20	38	56
2	67	4	49	72	9	54	65	2	47
3	30	75	12	32	77	14	34	79	16
4	21	39	57	23	41	59	25	43	61
5	66	3	48	68	5	50	70	7	52
6	35	80	17	28	73	10	33	78	15
7	26	44	62	19	37	55	24	42	60
8	71	8	53	64	1	46	69	6	51

Jiný zajímavý magický čtverec zkonstruoval známý vědec a politik Benjamin Franklin. Je to čtverec 8. řádu

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Tento čtverec je tzv. *supermagický*: když ho rozdělíme na 4 bloky o 4 řádcích a 4 sloupcích, je každý z těchto bloků *pseudomagický*: součet každého řádku a každého sloupce v těchto blocích je 130, avšak jednotlivé bloky nejsou složeny z čísel  $1, 2, \dots, 16$ .

Intenzívně se magickými čtverci zabýval v 18. století Euler. Slavný se stal jeho magický čtverec 8. řádu

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Tento čtverec totiž, kromě toho, že je magický, ukazuje postup šachového koně, který přeskáče celou šachovnicí (když z pole  $n$  skáče na pole  $n + 1$ ). (Srovnej s příkladem 6.10 ve 2. kapitole.)

Euler také odvodil mimořádně zajímavou souvislost mezi magickými a latinskými čtverci.

Často je mu připisována následující konstrukce magických čtverců **lichého** řádu, kterou však již v 17. století objevil francouzský velvyslanec v tehdejší Siamu S. de la Loubère. Tato konstrukce čtverce  $n$ -tého řádu pro liché  $n$  je následující.

Vepíšeme číslo 1 doprostřed prvního řádku. Máme-li již vepsáno číslo  $n$ , napíšeme číslo  $n + 1$  o jeden řádek výš a jeden sloupec doprava, přičemž „nad“ prvním řádkem je poslední řádek a „vpravo“ od posledního sloupce je první sloupec. Pokud je číslo  $n + 1$  již obsazeno, napíšeme  $n + 1$  **pod** číslo  $n$ .

Ilustrujme to na příkladu čtverce 5. řádu. Předepsaným postupem dostáváme

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Euler ukázal, že když v takto vzniklém magickém čtverci  $n$ -tého řádu odečteme od každého čísla jedničku a výsledek vyjádříme nikoliv dekadicky, ale v soustavě o základu  $n$  (přičemž číslo 1 napíšeme jako 01, 2 jako 02 atd.), dostaneme popis ortogonálních latinských čtverců  $n$ -tého řádu.

Tak například z výše uvedeného magického čtverce dostaneme (neboť 16 dekadicky je 31 v pětkové soustavě apod.)

31	43	00	12	24
42	04	11	23	30
03	10	22	34	41
14	21	33	40	02
20	32	44	01	13

Uvedeným postupem lze tedy sestavit ortogonální latinské čtverce pro každé liché  $n$ . Tyto úvahy Eulera přivedly k formulaci úlohy o 36 důstojnících.

## Kapitola 2

# TEORIE GRAFŮ

### 1 Co to je teorie grafů a kdy vznikla

Odpověď na uvedené otázky je tentokrát poněkud jednodušší než tomu bylo u analogických otázek v 1. kapitole.

Teorie grafů je relativně samostatná část diskrétní matematiky; pochopení základních pojmů této teorie nevyžaduje hluboké znalosti jiných matematických disciplín. Většina pojmů o nichž budeme v této kapitole hovořit, má vcelku jednoduchou a názornou interpretaci. Podobně jako v 1. kapitole si však musíme uvědomit, že se budeme zabývat pouze těmi nejjednoduššími pojmy a že jednoduchá formulace problematiky vůbec nepředznamenává jednoduchost řešení daných problémů.

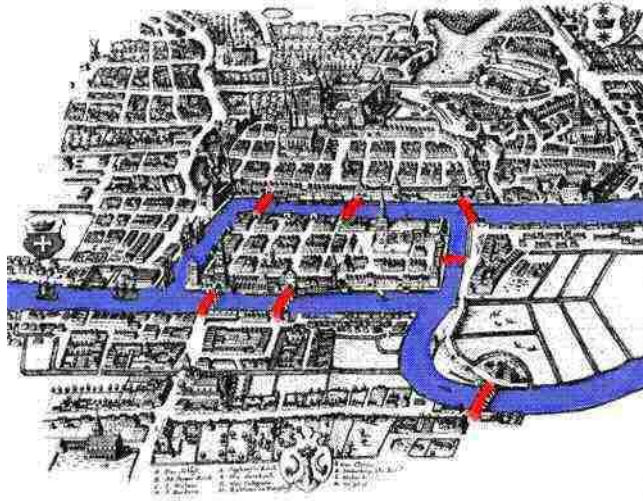
V matematice se s pojmem „graf“ setkáváme často a v nejrůznějších souvislostech. Běžně například hovoříme o „grafech funkcí“. Teorie grafů se však zabývá objekty zcela jiného druhu. V tomto paragrafu ještě nepodáme zcela přesnou definici pojmu „graf“. Pokusíme se pouze o vysvětlení intuitivního velmi názorného smyslu tohoto pojmu, stručně uvedeme, jak a kdy se tento pojem v matematice objevil a naznačíme, proč má teorie grafů četné aplikace nejen v matematice, ale i v řadě nematematických oborů.

Ve světové literatuře patrně neexistuje učebnice teorie grafů, v níž by se dříve nebo později neobjevila známá *úloha o sedmi mostech města Královce*, neboť v souvislosti s touto úlohou se v matematice poje „graf“ objevil poprvé.

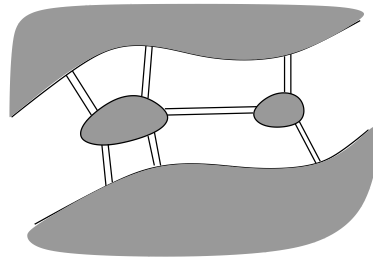
Jak tato úloha zní? Městem Königsberg (česky Královec, dnešní Kaliningrad v Rusku) teče řeka Pregel. V této řece jsou dva ostrovy, které byly s pevninou a vzájemně propojeny sedmi mosty. Na obrázku 1.1 je schéma popisované situace na dobové kresbě.

Když si obrázek překreslíme do schématu na obrázku 1.2, dostaneme následující schéma:

*Úkolem je zjistit, zda je možné vyjít z jednoho místa, projít po každém mostě právě jednou a skončit procházku ve výchozím bodě.*

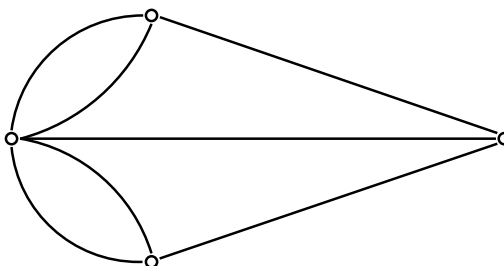


Obr. 1.1: Kresba 7 mostů v Königsbergu



Obr. 1.2: Schéma 7 mostů v Königsbergu

Tuto úlohu řešil (a vyřešil) v roce 1736 L. Euler. Ten samozřejmě dobře věděl, že řešení nezávisí na délce mostů, šířce řeky a podobně, ale pouze na tom, které části města jsou jednotlivými mosty propojeny. Znázorníme-li si jednotlivé části města jako kroužky v rovině a mosty jako spojnice příslušných částí, je okamžitě zřejmé, že vyřešit uvedenou úlohu znamená, názorně řečeno, „namalovat jedním tahem“ „graf“ na obr. 1.3.



Obr. 1.3: Grafová interpretace úlohy o 7 mostech

Euler samozřejmě řešil nejen uvedenou úlohu (čtenář pravděpodobně ví, že požadovanou procházku uskutečnit nelze), ale vyřešil obecně, které „grafy“ lze jedním tahem namalovat (jak o tom budeme hovořit v paragrafu 6).

Po uvedeném Eulerově výsledku se více než 100 let „grafová“ problematika v matematice neobjevila. Až v polovině 19. století se anglický matematik A. Cayley zabýval otázkou, kolik existuje izomerů uhlovodíku  $C_nH_{2n+2}$ . (Jak čtenář patrně ví, první tři členy uhlovodíkové řady, tj. metan, etan, propan, mají jediný izomer, čtvrtý člen již má izomery dva – butan a izobutan). Cayley udělal v podstatě tutéž abstrakci jako Euler. Když si znázornil jednotlivé atomy jako kroužky v rovině a spojil „hranou“ kroužky znázorňující ty atomy, mezi nimiž je chemická vazba, převedl „chemický“ problém na problém nalezení počtu „různých“ grafů předepsaného typu, jak je uvádíme na obr. 1.4. (Kroužky, z nichž „vycházejí“ čtyři hrany, odpovídají atomům uhlíku, kroužky, z nichž vychází jediná hrana, odpovídají atomům vodíku. Jak uvidíme v paragrafu 4, jsou uvedené grafy případem tzv. „stromů“.)

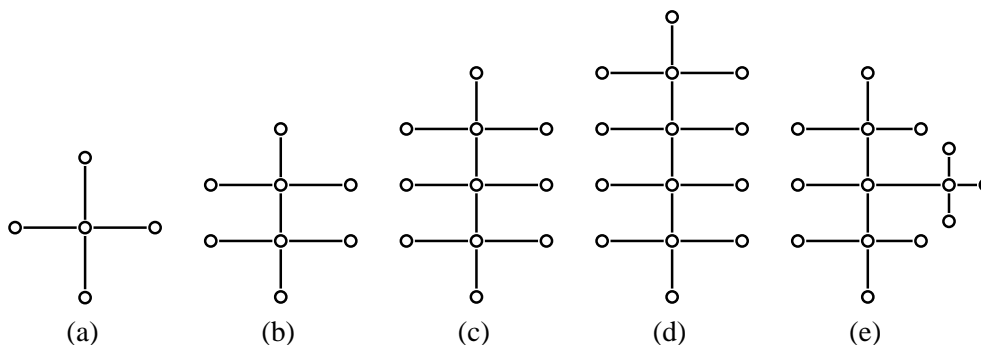
Analogicky se přirozeným způsobem k pojmu „graf“ dostal G. Kirchhoff ve svých pracech o elektrických obvodech.

V téže době, tj. zhruba v polovině 19. století, začíná historie jednoho z nejslavnějších problémů teorie grafů, tzv. *problému čtyř barev*. O tomto problému budeme podrobněji hovořit v paragrafu 8.

První „grafovou“ práci v české matematické literatuře publikoval v roce 1926 O. Borůvka, když vyřešil otázku, jak elektrifikovat danou skupinu měst sítí minimální délky (o tomto problému budeme obecněji hovořit v paragrafu 4).

První monografii o teorii grafů uveřejnil v roce 1936 maďarský matematik D. König. Jeho





Obr. 1.4: Grafy izomerů uhlovodíku

kniha *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* byla vpravdě průkopnická a po dlouhá desetiletí ve světě prakticky jediná.

Doslova bouřlivý rozvoj prodělává teorie grafů v posledních zhruba čtyřiceti letech, kdy se neustále rozšiřuje spektrum aplikací této teorie.

Nyní je snad již alespoň částečně zřejmé, jaké objekty se tedy v teorii grafů studují.

Buď dána nějaká množina  $V \neq \emptyset$  (ve většině případů konečná). Její prvky nazveme *vrcholy* nebo též *uzly*. Představme si tyto vrcholy jako malé kroužky v rovině. Některé dvojice vrcholů mohou být vzájemně spojeny tzv. *hranou*. V některých „grafech“ mohou být dva vrcholy spojeny i více než jednou hranou (takový je například graf na obr. 1.3), někdy je přípustná mezi vrcholy nejvýše jedna hrana (jako například v grafech na obr. 1.4). V některých grafech jsou hrany „orientovány“, tj. je vyznačen směr, od kterého uzlu ke kterému příslušná hrana vede; takové hrany nazýváme *šipky*. V některých grafech se připouštějí tzv. *smyčky*, tj. hrany vedoucí z uzlu do sebe samého. Někdy se dokonce připouštějí „hrany“ spojující více než dva uzly. (Pak hovoříme obvykle o tzv. *hypergrafu*.)

Přitom je jistě zřejmé (a později to přesně ukážeme), že „grafy“ ve výše uvedeném smyslu lze definovat abstraktně, nezávisle na způsobu jejich konkrétního „nakreslení“. Toto kreslení bude důležité jen v některých případech (například v paragrafu 7, kde se budeme zabývat tzv. *rovinnými grafy*).

Některé případy, které lze popsat pomocí grafů, jsme uvedli na začátku tohoto paragrafu. Čtenář si jistě dovede představit řadu dalších situací, které lze takto charakterizovat.

Grafem je například automapa ČR. Vrcholy jsou jednotlivé obce, hrany jsou příslušné silnice. Tento graf je navíc tzv. *ohodnocený* – jednotlivým hranám jsou připsána kladná čísla (vzdálenosti). Grafem je schéma zapojení barevného televizoru i plán vodovodní sítě města Brna. Pomocí grafů lze popsat výrobní procesy i vztahy mezi pracovníky v daném závodě. Pomocí pojmů teorie grafů lze charakterizovat strukturu programu pro počítač i rozpis sportovní

soutěže atd. Za grafy lze považovat hasseovské diagramy uspořádaných množin a vůbec každou množinu, na níž je definována binární relace.

I pro teorii grafů platí to, co jsme uvedli již v 1. kapitole. Chceme-li například v konečném ohodnoceném grafu najít „nejkratší cestu“ z jednoho vrcholu do druhého, mohlo by se zdát nejjednodušší všechny cesty vypsát (je jich přece pouze konečně mnoho), a pak mezi nimi vybrat tu nejkratší. Nemožnost tohoto postupu vyplývá z toho, že již pro poměrně „malé“ grafy je všech možností tak mnoho, že ani pomocí počítačů není uvedený postup realizovatelný.

U řady jednoduše formulovatelných úloh není dodnes nalezen „efektivní“ algoritmus pro jejich řešení. Jmenujme za mnohé alespoň tzv. *problém obchodního cestujícího*: *Obchodní cestující má projít danou množinou měst a vrátit se tam, odkud vyšel. Náklady na jeho cestu přitom mají být co nejmenší.*

Je zřejmé, že tuto situaci lze popsat ohodnoceným grafem, v němž vrcholy jsou jednotlivá města, hranou spojíme města mezi nimiž je přímé dopravní spojení a každé hraně přiřadíme náklady spojené s cestováním mezi danými vrcholy.

Jakkoliv jednoduchý se uvedený problém zdá, jde o jeden z nejkomplicovanějších problémů diskrétní matematiky.

V závěru tohoto paragrafu je nutno ještě uvést, že terminologie v této oblasti není ustálená a jednotná ani ve světové ani v české matematické literatuře. Dokonce i samotný pojem „graf“ může mít v různých knihách odlišný význam, podle toho, jaký cíl autor sleduje.

My budeme v dalším grafem rozumět to, co se často nazývá *obyčejný graf* (neorientovaný graf bez smyček a bez násobných hran). Vzájemný poměr jednotlivých typů grafů (orientovaných, neorientovaných, multigrafů, hypergrafů atd.) popíšeme v paragrafu 9.

## 2 Základní pojmy

**2.1. Definice.** Buď  $U \neq \emptyset$  libovolná množina, buď  $H \subseteq \mathcal{P}_2(U)$ . Uspořádanou dvojici  $[U, H]$  nazýváme *graf*.  
Prvky množiny  $U$  nazýváme *uzly* (nebo též *vrcholy*) grafu, prvky množiny  $H$  *hrany* grafu  $[U, H]$ .

**2.2. Poznámka.** (a) Uvědomme si, že podle definice je množina uzlů vždy neprázdná, avšak množina hran může být prázdná.

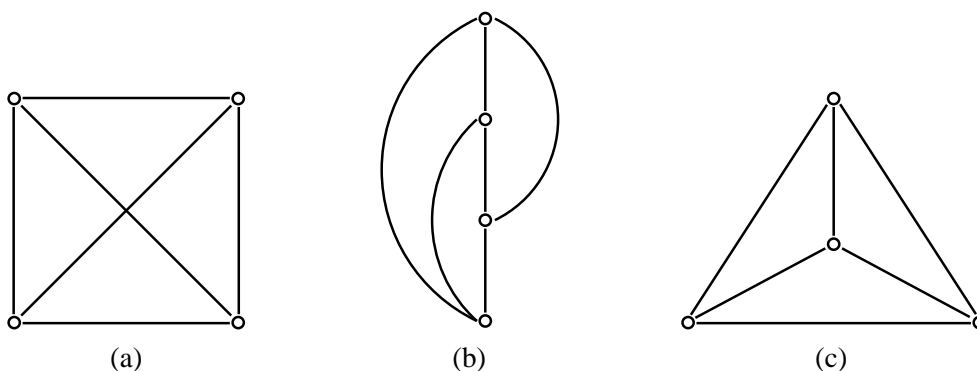
(b) Nechť  $U$  je tříprvková množina  $\{x, y, \{x, y\}\}$ ,  $H$  buď množina  $\{\{x, y\}, \{x, \{x, y\}\}\}$ . Pak je podle definice 2.1  $[U, H]$  graf. Popis tohoto grafu je však nepřehledný, neboť  $\{x, y\}$  je současně jeden z uzlů i jedna z hran. Abychom se vyhnuli podobným nepříjemnostem, budeme nadále automaticky předpokládat (respektive označení volit tak), že  $U \cap H = \emptyset$ .

(c) Uvědomme si, že v grafu  $[U, H]$  každé dva uzly tvoří nejvýše jednu hranu.

(d) Je-li  $[U, H]$  graf, pak jsou hrany dvouprvkové podmnožiny množiny  $U$ . Místo  $\{x, y\} \in H$  budeme obvykle užívat jednoduššího zápisu  $xy \in H$ , tj. budeme hovořit o hranách  $xy, uv, ab$  a podobně. (Přítom je zřejmé, že  $xy \in H$  právě tehdy, když  $yx \in H$ , tj. hrany jsou podle definice „neorientované“.) Je-li  $x \in U$ , není  $xx$  hrana (tj. v našem grafu neexistují „smyčky“).

(e) Podle definice může být množina uzlů grafu  $[U, H]$  konečná i nekonečná. Říkáme, že  $[U, H]$  je *konečný graf*, je-li  $U$  konečná množina. V dalším budeme převážně hovořit o konečných grafech.

(f) Grafy si budeme často představovat tak, jak jsme to uvedli již v paragrafu 1. Je-li  $[U, H]$  graf, představíme si uzly jako malé kroužky v rovině, dva uzly  $x, y$  pak spojíme nějakou křivkou (nejčastěji — ne však nutně — úsečkou) právě tehdy, když  $xy \in H$ . Získaný obrázek je v mnoha případech užitečný, uvědomme si však, že jeden a tentýž graf lze znázornit obrázky, z nichž nemusí být vůbec zřejmé, že jsou to nakreslení téhož grafu. Je-li například  $U = \{a, b, c, d\}$  a  $H = \mathcal{P}_2(U)$ , je na všech obrázcích 2.5a–c nakreslen tento graf  $[U, H]$ .



Obr. 2.5: Různá nakreslení grafu  $K_4$

(g) Terminologie teorie grafů často vychází z takto konstruovaných obrázků. Tak například říkáme, že  $x, y$  jsou *koncové uzly* hrany  $xy$ , o uzlech  $u, v \in U$  říkáme, že jsou *sousední*, pokud  $uv \in H$ , hrana  $ab$  spojuje uzly  $a, b$ , hrana  $xy$  je *incidentní* s uzly  $x, y$  atd.

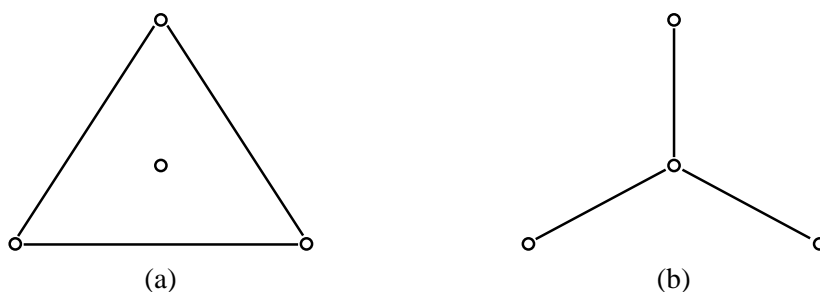
**2.3. Definice.** *Úplným grafem* na množině  $U \neq \emptyset$  rozumíme graf  $[U, \mathcal{P}_2(U)]$ . (Tzn., že v úplném grafu jsou každé dva uzly spojeny hranou.)  
Úplný graf na množině  $U$  je obvyklé značit symbolem  $K_n$ , kde  $n = |U|$ .

Na obrázcích 2.5a–c je tedy nakreslen graf  $K_4$ .

**2.4. Definice.** Buďte dány grafy  $\mathcal{G}_1 = [U_1, H_1]$ ,  $\mathcal{G}_2 = [U_2, H_2]$ . Pak říkáme, že:

- (a)  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$ , jestliže  $U_1 = U_2$ ,  $H_1 = H_2$ ,
- (b)  $\mathcal{G}_1$  je *podgrafem* grafu  $\mathcal{G}_2$ , jestliže  $U_1 \subseteq U_2$ ,  $H_1 \subseteq H_2$ ,
- (c)  $\mathcal{G}_1$  je *faktorem* grafu  $\mathcal{G}_2$ , je-li podgrafem grafu  $\mathcal{G}_2$  a  $U_1 = U_2$ ,
- (d)  $\mathcal{G}_1$  je *vlastním podgrafem* grafu  $\mathcal{G}_2$ , je-li podgrafem tohoto grafu a přitom  $\mathcal{G}_1 \neq \mathcal{G}_2$ ,
- (e)  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  jsou *disjunktní*, jestliže  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ,
- (f)  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  jsou *komplementární*, jestliže  $U_1 = U_2$ ,  $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ ,  $H_1 \cup H_2 = \mathcal{P}_2(U)$ .

**2.5. Příklad.** Na obr. 2.6a,b jsou vzájemně komplementární vlastní podgrafy grafu  $K_4$ . Oba uvedené grafy jsou současně faktory grafu  $K_4$ .



Obr. 2.6: Komplementární podgrafy grafu  $K_4$

**2.6. Definice.** Buď  $[U, H]$  graf. Řekneme, že uzel  $x \in U$  je *konečného stupně*, jestliže inciduje s konečným počtem hran. V opačném případě je  $x$  uzel *nekonečného stupně*. Je-li  $x$  uzel konečného stupně, označíme počet hran, které s tímto uzlem incidují, symbolem  $st\ x$ . Toto číslo nazýváme *stupeň uzlu  $x$* . Je-li  $st\ x = 0$ , nazývá se uzel  $x$  *izolovaný*.

**2.7. Poznámka.** (a) Platí

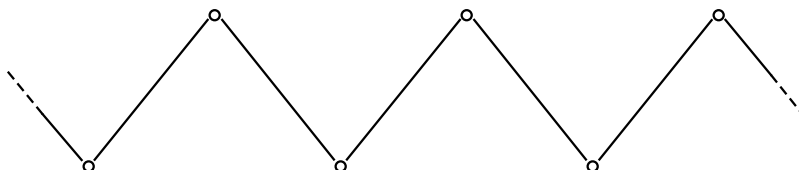
$$st\ x = |\{y \in U; xy \in H\}|.$$

(b) V grafu na obr. 2.6a platí  $st a = st b = st d = 2$ ,  $st c = 0$ , takže  $c$  je izolovaný uzel tohoto grafu.

V grafu na obr. 2.6b platí  $st a = st b = st d = 1$ ,  $st c = 3$ .

V grafu  $K_n$  je zřejmě stupeň každého uzlu roven číslu  $n - 1$ .

(c) Je zřejmé, že v konečném grafu je každý uzel konečného stupně. I v nekonečném grafu však mohou být samozřejmě všechny uzly konečného stupně. Například na obr. 2.7 je nekonečný graf, jehož každý uzel má stupeň 2.



Obr. 2.7: Graf, jehož všechny uzly mají stupeň 2

Zvolíme-li však za množinu uzlů například množinu  $\mathbb{R}$  všech reálných čísel a definujeme-li množinu  $H$  hran takto:

$$x, y \in \mathbb{R}, xy \in H \iff |x - y| \in \mathbb{Q},$$

je zřejmě  $[\mathbb{R}, H]$  nekonečný graf, v němž jsou všechny uzly nekonečného stupně. Tento graf samozřejmě nakreslit (ani schématicky) dost dobře není možné.

**2.8. Věta.** *Bud'  $[U, H]$  konečný graf. Pak platí*

$$\sum_{x \in U} st x = 2 \cdot |H|.$$

**Důkaz.** Indukcí vzhledem k číslu  $|H|$ . Je-li  $|H| = 0$ , tj.  $H = \emptyset$ , je tvrzení zřejmé, neboť  $st x = 0$  pro každý uzel  $x \in U$ . Necht' tvrzení platí pro každý graf na množině uzlů  $U$ , který má nejvýše  $h$  hran. Bud' nyní  $\mathcal{G} = [U, H]$  takový graf, že  $|H| = h + 1$ . Bud'  $xy \in H$  libovolná hrana. V grafu  $\mathcal{G}^* = [U, H - \{x, y\}]$  je  $h$  hran, takže v  $\mathcal{G}^*$  platí  $\sum_{x \in U} st x = 2 \cdot h$ . Stupně všech uzlů v  $\mathcal{G}$  a  $\mathcal{G}^*$  jsou však stejné až na uzly  $x, y$ , které mají v  $\mathcal{G}$  stupeň o jedničku větší než v  $\mathcal{G}^*$ . Odtud zřejmě plyne, že v  $\mathcal{G}$  platí  $\sum_{x \in U} st x = 2 \cdot h + 2 = 2 \cdot (h + 1)$ . •

V důkazu věty 2.11 využijeme následujícího označení.

**2.9. Definice.** Bud'  $\mathcal{G} = [U, H]$  konečný graf,  $k \in \mathbb{N}_0$  bud' libovolné. Pak klademe

$$\sigma_k(\mathcal{G}) = |\{x \in U; st x = k\}|.$$

Symbol  $\sigma_k(\mathcal{G})$  tak udává počet uzlů stupně  $k$  v grafu  $\mathcal{G}$ . Je evidentní, že pouze pro konečně mnoho  $k \in \mathbb{N}_0$  je  $\sigma_k(\mathcal{G}) \neq 0$ . (Předpokládáme, že  $\mathcal{G}$  je konečný!)

Například v grafu na obrázku 2.6a je  $\sigma_0 = 1, \sigma_2 = 3, \sigma_k = 0$  pro  $0 \neq k \neq 2$ . V grafu na obr. 2.6b platí  $\sigma_1 = 3, \sigma_3 = 1, \sigma_k = 0$  pro ostatní  $k$ .

Z definice čísel  $\sigma_k$  je zřejmé, že platí

**2.10. Pomocná věta.** *Bud'  $\mathcal{G} = [U, H]$  konečný graf. Pak*

$$\sum_{x \in U} \text{st } x = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \sigma_k(\mathcal{G}).$$

Následujícího elementárního tvrzení budeme často využívat.

**2.11. Věta.** *Počet uzlů lichého stupně v každém konečném grafu je sudý.*

**Důkaz.** Bud'  $\mathcal{G} = [U, H]$  konečný graf. Počet uzlů lichého stupně je roven číslu  $\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{2j+1}$ . Přitom

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot \sigma_j &= \sum_{j=0}^{\infty} 2j \cdot \sigma_{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \cdot \sigma_{2j+1} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} 2j \cdot (\sigma_{2j} + \sigma_{2j+1}) + \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{2j+1}. \end{aligned}$$

Odtud celkem

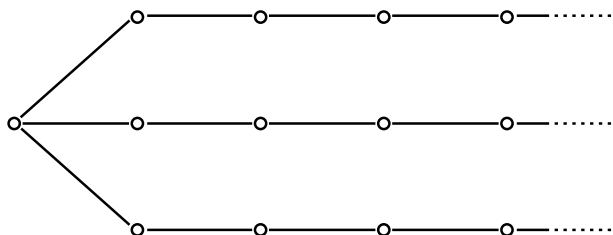
$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{2j+1} = 2 \cdot |H| - \sum_{j=0}^{\infty} 2j \cdot (\sigma_{2j} + \sigma_{2j+1}).$$

Protože na pravé straně poslední rovnosti stojí prokazatelně číslo sudé, je i číslo  $\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{2j+1}$  sudé.

•

**2.12. Poznámka.** (a) Pro nekonečné grafy tvrzení 2.11 zřejmě neplatí. Například v grafu na obr. 2.8 existuje právě jeden uzel lichého stupně.

(b) Stupně uzlů grafu hrají důležitou roli v řadě úvah. Jedna z typických úloh spočívá v následujícím: buď dána konečná posloupnost  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nezáporných celých čísel. Tato posloupnost se nazývá *grafová*, když existuje graf  $[U, H]$  takový, že  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $\text{st } u_i = a_i, i = 1, \dots, n$ . Snadno lze ukázat, že existují posloupnosti, které nejsou grafové. Nutná a dostatečná podmínka toho, aby posloupnost byla grafová, je uvedena například v [10], str. 37.

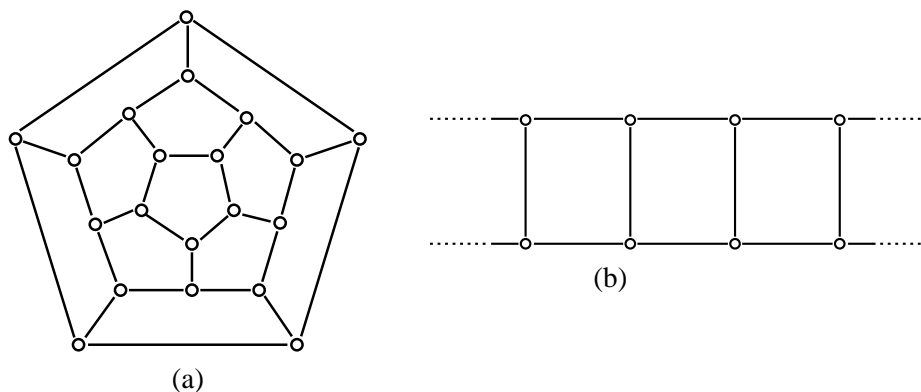


Obr. 2.8: Graf s jediným uzlem lichého stupně

**2.13. Definice.** Řekneme, že graf  $[U, H]$  je *pravidelný graf  $k$ -tého stupně* (nebo stručně jenom  *$k$ -pravidelný graf*), jestliže  $\text{st } x = k$  pro každý uzel  $x \in U$ .

**2.14. Příklad.** (a) Úplný graf  $K_n$  je pravidelný graf stupně  $n - 1$ .

(b) Na obr. 2.9a je konečný a na obr. 2.9b nekonečný pravidelný graf 3. stupně.

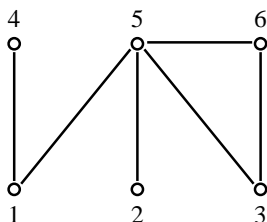


Obr. 2.9: Pravidelné grafy 3. stupně

**2.15. Poznámka.** Z věty 2.11 bezprostředně plyne, že v konečném pravidelném grafu lichého stupně je počet uzlů sudý.

V závěru tohoto paragrafu se stručně zmíníme o tom, jakým způsobem je možno graf zadat.

Uvažujme například graf na obr. 2.10. Tento graf je jistě přehledný a z obrázku je čtenáři okamžitě jasné, o jakém grafu hovoříme. Zadání grafu jeho nakreslením je proto jedno z nejčastějších. Mnohdy je však nutno volit zadání jiné. Obrázek může být nepřehledný a například



Obr. 2.10:

jako vstup do počítače je (alespoň prozatím) prakticky nepoužitelný. V těchto případech je nejobvyklejší graf zadat pomocí vhodně sestavené posloupnosti nebo pomocí jistých matic. Ukažme si alespoň některé z nejběžnějších možností.

Pro zadání grafu je vhodné označit uzly přirozenými čísly  $1, \dots, n$  (jak jsme to udělali na obr. 2.10). Označíme-li graf na obr. 2.10 jako  $[U, H]$ , je

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$H = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{5, 6\}\}$$

Zápis tohoto grafu lze „zakódovat“ následující posloupností:

$$(6, 6, 1, 4, 1, 5, 2, 5, 6, 1, 1, 4, 1, 2, 3, 6, 2, 3, 5).$$

(Jak čtenář jistě postřehl, udává první číslo počet uzlů, druhé počet hran, a pak následuje soupis všech hran, přičemž závorky v označení hran můžeme pochopitelně vynechat.)

Tentýž graf však můžeme popsat i jinou posloupností například takto:

$$(6, 6, 2, 4, 5, 1, 5, 2, 5, 6, 1, 1, 4, 1, 2, 3, 6, 2, 3, 5).$$

První číslo udává počet uzlů, druhé počet hran; pak postupně následuje stupeň uzlu 1 (který je roven 2) a výčet s ním sousedících uzlů (což jsou uzly 4 a 5), dále stupeň uzlu 2 (který je roven 1) a sousední uzel (tj. 5) atd.

*Matici sousednosti* grafu  $[U, H]$  sestavíme z nul a jedniček tak, že  $a_{ij} = 1$  právě tehdy, když  $ij \in H$ .

Maticе sousednosti grafu na obr. 2.10 je uvedena v tabulce 2.1.

Tak zvanou *znaménkovou matici* obdržíme tak, že v matici sousednosti místo jedniček napíšeme znaménko + a místo nul znaménko -.

Dalšími možnostmi — a je jich celá řada — se nebudeme zabývat.



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tabulka 2.1: Matice sousednosti grafu z obr. 2.10

### 3 Souvislé grafy

**3.1. Definice.** Bud'  $[U, H]$  graf,  $x_0, x_n \in U$  buďte libovolné uzly. Posloupnost uzlů a hran tvaru

$$x_0, x_0x_1, x_1, x_1x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n-1}x_n, x_n$$

se nazývá *sled* začínající v uzlu  $x_0$  a končící v uzlu  $x_n$ . Uzly  $x_1, \dots, x_{n-1}$  nazýváme *vnitřní uzly* tohoto sledu, číslo  $n$  (tj. počet hran ve sledu) nazýváme *délkou* tohoto sledu.

**3.2. Příklad.** V grafu na obr. 2.10 je například

$$1, 15, 5, 52, 2, 25, 5, 53, 3$$

sled délky 4 začínající v uzlu 1 a končící v uzlu 3.

**3.3. Poznámka.** (a) Podle definice je každý uzel sledem nulové délky.

(b) Existuje-li mezi dvěma různými uzly sled, existuje mezi nimi zřejmě nekonečně mnoho sledů. Můžeme totiž, jednoduše řečeno, kteroukoliv hranu v daném sledu libovolně mnohokrát opakovat. Například v grafu na obr. 2.10 existují mezi uzly 1 a 2 sledy

$$1, 15, 5, 52, 2$$

$$1, 15, 5, 52, 2, 25, 5, 52, 2$$

$$1, 15, 5, 52, 2, 25, 5, 52, 2, 25, 5, 52, 2 \text{ atd.}$$

Vzhledem k tomu, že ve sledu se mohou hrany i uzly opakovat, má smysl následující definice.

**3.4. Definice.** Sled, v němž se neopakuje žádná hrana, se nazývá *tah* v daném grafu. Je-li počáteční uzel tahu roven koncovému, nazývá se tah *uzavřený*. V opačném případě se tento tah nazývá *otevřený*.

Sled, v němž se neopakuje žádný uzel, se nazývá *cesta*.

**3.5. Poznámka.** Je zřejmé, že každá cesta je tahem, avšak opačné tvrzení obecně neplatí.

Například v grafu na obrázku 2.10 je 2, 25, 5, 53, 3, 36, 6, 65, 5, 51, 1 otevřený tah, avšak není to cesta, neboť se opakuje uzel 5.

**3.6. Věta.** *Nechť v grafu  $[U, H]$  existuje mezi uzly  $x, y \in U, x \neq y$  sled. Pak mezi nimi existuje v daném grafu alespoň jedna cesta.*

**Důkaz.** Tvrzení je vcelku zřejmé. Nechť je dán sled mezi uzly  $x, y$ :

$$x = x_0, x_0x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1}x_n, x_n = y.$$

Pokud tento sled není cestou, existují  $x_i, x_j, i < j$ , tak, že  $x_i = x_j$ . Pak ale je  $x_0, \dots, x_i, x_jx_{j+1}, x_{j+1}, \dots, x_n$  opět sled mezi uzly  $x, y$ . (Z původního sledu jsme „vyškrtli“ úsek od  $x_i$  do  $x_j$ .) Není-li takto získaný sled cestou, musí se v něm nějaký uzel opakovat. Příslušnou část sledu pak můžeme opět vyškrtnout. Po konečném počtu kroků pak z původního sledu jistě zůstane cesta z  $x$  do  $y$ .

•

**3.7. Příklad.** V grafu na obr. 2.10 existují mezi uzly 1 a 3 dvě cesty: jedna má délku 2, druhá délku 3.

**3.8. Definice.** Graf, v němž mezi každými dvěma uzly existuje sled, se nazývá *souvislý*.

**3.9. Poznámka.** Podle poznámky 3.3a je každý graf tvořený jediným uzlem souvislý. Souvislý je i graf na obr. 2.10, avšak graf na obr. 2.6a souvislý není, neboť v něm neexistuje sled například mezi uzly  $a$  a  $c$ .

V dalším budeme potřebovat následující tvrzení.

**3.10. Věta.** *Bud'  $[U, H]$  souvislý graf,  $x \in U$ ,  $st x = 1$ ,  $xy \in H$  hrana incidentní s uzlem  $x$ . Pak je graf  $[U - \{x\}, H - \{xy\}]$  souvislý.*

**Důkaz.** Budte  $u, v \in U - \{x\}$  libovolné dva navzájem různé uzly. (Kdyby takové dva uzly neexistovaly, bylo by  $U = \{x, y\}$ ,  $H = \{xy\}$  a graf  $[U - \{x\}, H - \{xy\}]$  by byl  $[\{y\}, \emptyset]$ , což je souvislý graf podle poznámky 3.9). Protože je  $[U, H]$  souvislý, existuje v něm sled mezi uzly  $u, v$  a podle věty 3.6 existuje mezi těmito uzly alespoň jedna cesta. Nyní si stačí uvědomit, že na žádné cestě mezi uzly  $u, v$  nemůže ležet hrana  $xy$ . (Uzel  $x$  by totiž musel být vnitřním uzlem této cesty. Protože  $x$  inciduje pouze s hranou  $xy$ , obsahuje daná cesta úsek  $\dots, y, yx, x, xy, y, \dots$ . Pak to ale není cesta, neboť v daném sledu se opakuje uzel  $y$ .) Každá cesta mezi  $u, v$  je tedy sledem v  $[U - \{x\}, H - \{xy\}]$ , takže tento graf je souvislý. •

**3.11. Poznámka.** Graf  $[U - \{x\}, H - \{xy\}]$  je tedy souvislý vlastní podgraf grafu  $[U, H]$  (za předpokladů věty 3.10).

Bud'  $[U, H]$  libovolný graf. Definujeme-li na množině  $U$  relaci  $\sim$  takto:

$$x \sim y \iff \text{existuje sled mezi uzly } x, y,$$

je zřejmé, že relace  $\sim$  je ekvivalence na množině  $U$ . (Reflexivita plyne z poznámky 3.9, symetrie a tranzitivita je zřejmá.) Tato ekvivalence určuje rozklad  $U/\sim$  na množině  $U$ . Pro každý uzel  $x \in U$  označme  $U(x)$  tu třídu tohoto rozkladu, v níž leží uzel  $x$ . Je tedy

$$U(x) = \{t \in U; \text{ existuje sled mezi uzly } t, x\}.$$

Označíme-li

$$H(x) = \{uv \in H; u \in U(x), v \in U(x)\},$$

je zřejmé  $[U(x), H(x)]$  podgraf grafu  $[U, H]$  (pro každý uzel  $x \in U$ ).

**3.12. Definice.** Bud'  $[U, H]$  graf,  $x \in U$  libovolný uzel. Podgraf

$$[U(x), H(x)]$$

grafu  $[U, H]$  se nazývá *komponenta grafu*  $[U, H]$  příslušná uzlu  $x$ .

**3.13. Poznámka.** Je zřejmé, že graf  $[U, H]$  je souvislý právě tehdy, když má právě jednu komponentu.

Komponenty grafu jsou — jinak řečeno — maximální souvislé podgrafy daného grafu.

**3.14. Poznámka.** Souvislé grafy lze rovněž považovat za metrické prostory. Je-li totiž  $[U, H]$  souvislý graf a  $x, y \in U$  libovolné uzly, existuje mezi těmito uzly podle věty 3.6 alespoň jedna cesta. Mezi cestami z uzlu  $x$  do uzlu  $y$  jistě existuje cesta minimální délky. Označme její délku  $\varrho(x, y)$ . Pro čtenáře bude jistě snadným cvičením ověření toho, že pro každé tři uzly  $x, y, z \in U$  platí:

- (a)  $\varrho(x, y) = 0$  právě tehdy, když  $x = y$ ,
- (b)  $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ ,
- (c)  $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$ .

To však právě znamená, že  $(U, \varrho)$  je metrický prostor.

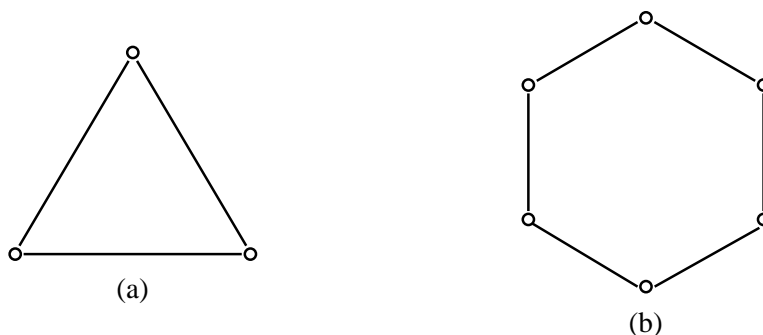
Lze tedy na souvislé grafy aplikovat i metody teorie metrických prostorů.

Jak uvidíme, budou v dalším hrát souvislé grafy důležitou roli. Zvláště významné pak budou souvislé pravidelné grafy.

Například na obr. 2.7 je souvislý pravidelný graf 2. stupně. Nás však budou zajímat především **konečné** souvislé pravidelné grafy 2. stupně.

**3.15. Definice.** Konečný souvislý pravidelný graf druhého stupně se nazývá *kružnice*. Počet uzlů v kružnici nazýváme její *délkou*.

**3.16. Příklad.** Na obrázku 3.11a je kružnice délky 3, na obrázku 3.11b kružnice délky 6.



Obr. 3.11: Kružnice

Graf na obrázku 3.11a se — vcelku pochopitelně — rovněž nazývá *trojúhelník*. (V teorii grafů je tak trojúhelník zvláštním případem kružnice.)

V dalších úvahách uvidíme, že jednou z důležitých charakteristik grafu bude to, zda obsahuje jako podgraf nějakou kružnici. Například graf na obr. 2.10 obsahuje právě jednu kružnici (trojúhelník o vrcholech 3,5,6), graf na obr. 2.9a obsahuje kružnic celou řadu, avšak grafy na obr. 1.4 neobsahují jako podgraf žádnou kružnici.

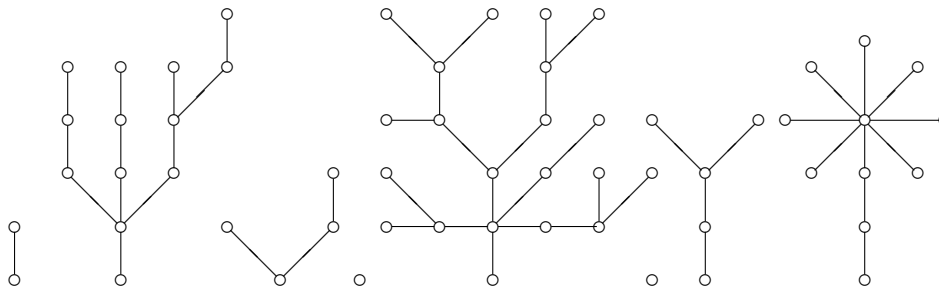
Právě takovými grafy se nyní budeme zabývat.

## 4 Stromy

Stromy tvoří jednu z nejdůležitějších tříd grafů. Mají řadu aplikací v nejrůznějších oborech. Jak jsme uvedli již v paragrafu 1, patří mezi první grafy, které byly v matematice zkoumány.

**4.1. Definice.** Konečný souvislý graf neobsahující jako podgraf žádnou kružnici, se nazývá *strom*.

Graf, jehož každá komponenta je stromem, se nazývá *les*.



Obr. 4.12: Les

**4.2. Poznámka.** Les je tedy graf neobsahující žádnou kružnici. Strom je konečný souvislý les.

Pojmenování „strom“ a „les“ souvisí s tím, jak lze tyto objekty nakreslit. Příklad „odpovídajícího“ nakreslení je na obr. 4.12.

Stromy lze charakterizovat různými způsoby. V následujícím tvrzení uvedeme některé nutné a dostatečné podmínky toho, aby graf byl stromem.

**4.3. Věta.** *Bud'  $[U, H]$  konečný graf. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

- (a)  $[U, H]$  je strom.
- (b) Mezi každými dvěma uzly v  $[U, H]$  existuje právě jedna cesta.
- (c)  $[U, H]$  je souvislý a platí  $|H| = |U| - 1$ .
- (d)  $[U, H]$  neobsahuje kružnici a  $|H| = |U| - 1$ .

**Důkaz.** Dokážeme postupně implikace (a) $\Rightarrow$ (b), (b) $\Rightarrow$ (c), (c) $\Rightarrow$ (d), (d) $\Rightarrow$ (a).

**(a)  $\Rightarrow$  (b):** Strom  $[U, H]$  je souvislý, takže podle věty 3.6 existuje mezi každými dvěma uzly alespoň jedna cesta. Potřebujeme proto pouze dokázat, že nemohou existovat dva uzly, mezi nimiž je více cest. To je však zřejmé. Kdyby totiž existovaly uzly  $u, v \in U$ , mezi nimiž by existovaly dvě různé cesty, pak by zřejmě v  $[U, H]$  existovala kružnice, což podle definice stromu není možné.

**(b)  $\Rightarrow$  (c):** Existuje-li mezi každými uzly  $u, v \in U$  cesta, je  $[U, H]$  souvislý. Zbývá tedy pouze dokázat rovnost  $|H| = |U| - 1$ . Důkaz provedeme indukcí vzhledem k  $|U|$ . Pro  $|U| = 1$  je tvrzení zřejmé. Nechť tedy uvedená rovnost platí pro všechny grafy splňující (b) s počtem

uzlů nejvýše  $n$ . Necht'  $[U, H]$  je graf splňující (b) takový, že  $|U| = n + 1$ . Bud'  $uv \in H$  libovolná hrana. Graf  $[U, H - \{xy\}]$  není souvislý a zřejmě má právě dvě komponenty (jsou to  $U(x)$  a  $U(y)$ ). Podle indukčního předpokladu je v každé z těchto komponent počet hran o jedničku menší než počet uzlů. V grafu  $[U, H - \{xy\}]$  je tedy  $n - 1$  hran, tj. v grafu  $[U, H]$  je  $n = |U| - 1$  hran, což jsme chtěli dokázat.

(c)  $\Rightarrow$  (d): Necht' graf  $[U, H]$  splňuje podmínku (c). Potřebujeme dokázat, že v tomto grafu neexistuje kružnice. Pripusťme tedy, že v grafu  $[U, H]$  kružnice existuje. Je-li  $xy \in H$  libovolná hrana ležící na této kružnici, pak jejím vynecháním vznikne souvislý graf  $[U, H - \{xy\}]$ . (Souvislost tohoto grafu je zřejmá; libovolné dva uzly dovedeme v tomto grafu jistě spojit vhodným sledem, roli hrany  $xy$  v případě potřeby supluje zbylá část kružnice.) Kdyby v grafu  $[U, H - \{xy\}]$  opět existovala nějaká kružnice, vynecháme v ní rovněž některou hranu. Po konečném počtu kroků obdržíme souvislý graf neobsahující žádnou kružnici, tj. strom. Počet hran v tomto stromu je však menší než  $|U| - 1$ , neboť tolik hran měl podle předpokladu graf  $[U, H]$ . To je však spor, neboť jsme již dokázali, že (a) $\Rightarrow$ (c), tj. strom obsahuje nutně  $|U| - 1$  hran.

(d)  $\Rightarrow$  (a): Potřebujeme dokázat, že graf splňující (d) je nutně souvislý. Předpokládejme tedy, že graf  $[U, H]$  splňuje podmínku (d) a není souvislý. Pak je tvořen komponentami  $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$  ( $n \geq 2$ ). Každá z těchto komponent je stromem (neboť  $[U, H]$  je podle (d) les). Označme  $\mathcal{G}_i = [U_i, H_i]$ . Protože (a) $\Rightarrow$ (c), platí  $|H_i| = |U_i| - 1$  pro  $i = 1, \dots, n$ . Odtud

$$|H| = \sum_{i=1}^n |H_i| = \sum_{i=1}^n (|U_i| - 1) = |U| - n,$$

kde  $n \geq 2$ . To je však spor, neboť podle předpokladu platí  $|H| = |U| - 1$ . •

**4.4. Věta.** Každý strom s alespoň dvěma uzly obsahuje alespoň dva uzly prvního stupně.

**Důkaz.** Bud'  $[U, H]$  strom,  $|U| \geq 2$ . Podle vět 2.8 a 4.3 platí

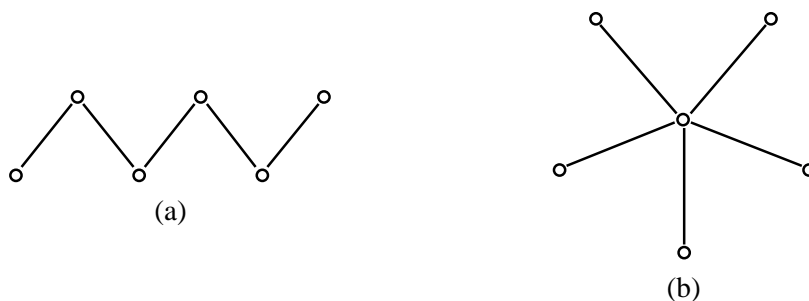
$$\sum_{x \in U} \text{st } x = 2 \cdot |H| = 2 \cdot (|U| - 1) = 2 \cdot |U| - 2.$$

Přitom  $\text{st } x \geq 1$  pro každý uzel  $x \in U$ . Kdyby alespoň dva uzly neměly stupeň 1, bylo by číslo  $\sum_{x \in U} \text{st } x$  větší než  $2 \cdot |U| - 2$ . •

**4.5. Příklad.** Bud'  $n \geq 2$  libovolné přirozené číslo. Pak jistě existuje strom o  $n$  uzlech, který obsahuje právě dva uzly 1. stupně. Takový strom se nazývá *had*.

Pro  $n \geq 3$  může ve stromu o  $n$  uzlech evidentně existovat nejvýše  $n - 1$  uzlů 1. stupně. Strom, který má právě  $n - 1$  uzlů 1. stupně (z celkového počtu  $n$ ), se nazývá *hvězda*.

Na obr. 4.13a je had a na obr. 4.13b hvězda pro  $n = 6$ .

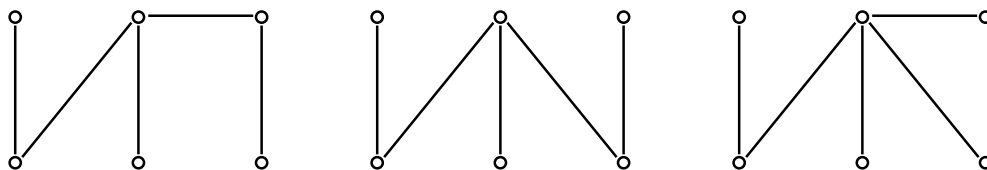


Obr. 4.13: Had a hvězda

V definici 2.4 jsme definovali faktor grafu  $[U, H]$  jako podgraf, jehož množina uzlů je rovněž  $U$ . V dalším nás budou zajímat podgrafy a faktory bez kružnic.

**4.6. Definice.** *Kostrou grafu  $[U, H]$  rozumíme takový faktor  $[U, H_1]$ , který je stromem.*

**4.7. Příklad.** (a) Graf z obr. 2.10 obsahuje tři kostry, které jsou znázorněny na obr. 4.14.



Obr. 4.14: Kostry grafu z obr. 2.10

(b) Kružnice délky  $n$  zřejmě obsahuje  $n$  koster; každá kostra vznikne vynecháním právě jedné hrany.

(c) Strom obsahuje právě jednu kostru – sebe sama.

Nyní je přirozená otázka, které grafy kostru obsahují. Protože kostra grafu je souvislý podgraf, nemůže samozřejmě kostru obsahovat graf, který sám není souvislý. Jak je tomu v souvislých grafech uvádí následující tvrzení.

**4.8. Věta.** *Každý konečný souvislý graf obsahuje alespoň jednu kostru.*

**Důkaz.** Buď  $[U, H]$  konečný souvislý graf. V tomto grafu jistě existuje nějaký podgraf, který je stromem. Stačí totiž zvolit libovolný uzel  $x \in U$  a podgraf  $[\{x\}, \emptyset]$  je strom. Označme  $\mathcal{S}$

množinu všech stromů v  $[U, H]$ . Protože je graf  $[U, H]$  konečný, obsahuje pouze konečně mnoho podgrafů, takže tím spíše je i množina  $\mathcal{S}$  konečná (a víme, že neprázdná). Protože  $\mathcal{S}$  je konečná, obsahuje alespoň jeden maximální prvek (tj. strom, který není podgrafem žádného jiného stromu). Buď tedy  $[U^*, H^*]$  některý maximální prvek v  $\mathcal{S}$ . Zřejmě stačí dokázat, že  $U = U^*$  (pak je totiž  $[U^*, H^*]$  faktor a tedy kostra v  $[U, H]$ ).

Připustíme, že je  $U \neq U^*$ , tj. existuje  $y \in U - U^*$ . Zvolme  $x \in U^*$  libovolně. Protože je  $[U, H]$  souvislý, existuje v něm cesta z  $x$  do  $y$ . V této cestě pak ale nutně existuje alespoň jedna hrana  $vw \in H$  taková, že  $v \in U^*$ ,  $w \notin U^*$ . Pak je ale zřejmě  $[U \cup \{w\}, H \cup \{vw\}]$  strom v  $[U, H]$ . (Souvislost je zřejmá, neboť  $[U^*, H^*]$  je souvislý; přidáním hrany  $vw$  jsme přitom evidentně nemohli uzavřít žádnou kružnici.) To je však spor, neboť  $[U^*, H^*]$  je vlastním podgrafem takto vzniklého stromu a tak není maximální v  $\mathcal{S}$ . •

V příkladu 4.7 jsme viděli, že graf může mít více koster. Proto je přirozená otázka, jak určit počet koster daného grafu. Jeden ze základních poznatků v tomto směru dokázal již v roce 1899 Cayley.

**4.9. Věta.** Počet koster v úplném grafu  $K_n$  je roven číslu  $n^{n-2}$ .

**Důkaz.** Důkaz tohoto tvrzení nebudeme provádět. •

**4.10. Poznámka.** Jak v dalším uvidíme, je zdánlivě jednoduchý postup, totiž postupné prověřování všech možností, již u poměrně „malých“ grafů prakticky neuskutečnitelný (i při použití počítačů).

Obecná metoda, pro praktický výpočet však nepříliš pohodlná, je založena na výpočtu determinantu vytvořeného z tzv. *Laplaceovy matice sousednosti* daného grafu. Tato matice je definována následovně: Je-li  $[U, H]$  konečný graf,  $U = \{1, \dots, n\}$ , je příslušná matice  $(a_{ij})_{i,j=1}^n$  definována takto:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{jestliže } ij \in H, \\ \text{st } i, & \text{jestliže } i = j, \\ 0, & \text{jestliže } i \neq j, ij \notin H. \end{cases}$$

Následující příklad uvádíme z toho důvodu, že ilustruje užitečnost vytvářících funkcí zavedených v 1. kapitole.

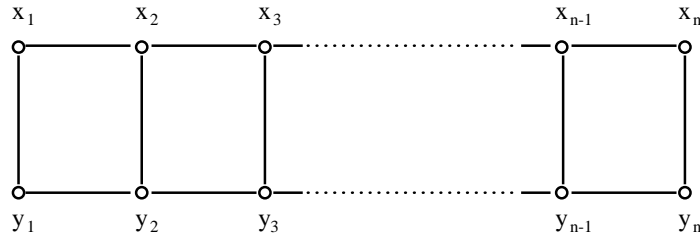
**4.11. Příklad.** Žebřík  $Z_n$  je graf s  $2n$  uzly definovaný tak, jak je znázorněno na obr. 4.15.

Naším úkolem je určit počet  $A_n$  koster v žebříku  $Z_n$ .

$\varphi_n$ -faktorem v  $Z_n$  nazveme takový faktor, který je utvořen dvěma disjunktními stromy (viz definici 2.4), z nichž jeden obsahuje uzel  $x_n$  a druhý uzel  $y_n$ . (Příkladem  $\varphi_n$ -faktoru v  $Z_n$  je faktor, jehož jeden strom obsahuje všechny uzly  $x_i$  a druhý všechny uzly  $y_i$ .) Počet  $\varphi_n$ -faktorů v  $Z_n$  označme  $B_n$ .

Je zřejmé, že platí  $A_1 = B_1 = 1$ .





Obr. 4.15: Žebřík

Nyní odvodíme rekurentní formule pro výpočet hodnot  $A_n, B_n$ . Předpokládejme, že známe  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ . Uvažme, jak můžeme zkonstruovat kostru v  $Z_{n+1}$ . Je zřejmé, že to lze právě jedním z následujících dvou způsobů:

- K některé kostře v  $Z_n$  přidáme některé dvě z hran  $x_n x_{n+1}, x_{n+1} y_{n+1}, y_n y_{n+1}$ . Z každé kostry v  $Z_n$  tak získáme tři kostry v  $Z_{n+1}$ .
- K některému  $\varphi_n$ -faktorů v  $Z_n$  přidáme všechny tři hrany  $x_n x_{n+1}, x_{n+1} y_{n+1}, y_n y_{n+1}$ .

Odtud plyne formule  $A_{n+1} = 3A_n + B_n$ .

Stejně jednoduše lze odvodit formuli  $B_{n+1} = 2A_n + B_n$ .

Takto získané rekurentní formule nyní vyřešíme pomocí vytvořujících funkcí. Položme

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n, \quad G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n.$$

Pak platí

$$3F(x) + G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (3A_n + B_n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n+1}x^n,$$

tj.

$$x[3F(x) + G(x)] = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_{n+1}x^n = \sum_{n=2}^{\infty} A_n x^n = F(x) - A_1 x = F(x) - x.$$

Analogicky

$$x[2F(x) + G(x)] = G(x) - x.$$

Budeme-li stručně místo  $F(x)$  psát pouze  $F$  a místo  $G(x)$  pouze  $G$ , obdrželi jsme následující dvě rovnice pro neznámé  $F, G$ :

$$\begin{aligned} x(3F + G) &= F - x \\ x(2F + G) &= G - x. \end{aligned}$$

Úpravou dostáváme

$$\begin{aligned} F(3x - 1) + x(G + 1) &= 0 \\ x(2F + 1) + G(x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Ze druhé rovnice plyne

$$G = \frac{x(2F + 1)}{1 - x},$$

takže dosazením do první rovnice máme

$$F(3x - 1) + x \cdot \frac{x(2F + 1) + 1 - x}{1 - x} = 0.$$

Odtud

$$F(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 1}.$$

Funkci  $F(x)$  nyní rozložíme v mocninnou řadu. Platí

$$x^2 - 4x + 1 = (x - \alpha)(x - \beta), \quad \text{kde } \alpha = 2 + \sqrt{3}, \beta = 2 - \sqrt{3}.$$

Rozložíme funkci  $F(x)$  na parciální zlomky:

$$F(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 1} = \frac{x}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}.$$

Konstanty  $A, B$  určíme porovnáním koeficientů v rovnosti

$$x = A(x - \beta) + B(x - \alpha).$$

Protože

$$A = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \quad B = \frac{\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{3}},$$

dostáváme

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\sqrt{3} + 2}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x - \alpha} + \frac{\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x - \beta} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \frac{\alpha}{x - \alpha} - \frac{\beta}{x - \beta} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\frac{x}{\alpha} - 1} - \frac{1}{\frac{x}{\beta} - 1} \right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \frac{1}{1 - \frac{x}{\beta}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha}} \right). \end{aligned}$$

Protože zlomky v závorce můžeme (pro vhodné  $x$ ) považovat za součty geometrických řad s kvocientem  $\frac{x}{\beta}$ , respektive  $\frac{x}{\alpha}$ , dostáváme

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\beta}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n \right] = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta^n} - \frac{1}{\alpha^n}\right) x^n = \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} (\beta^{-n} - \alpha^{-n}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{-n} - \alpha^{-n}}{\alpha - \beta} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{-n} - \alpha^{-n}}{\alpha - \beta} x^n. \end{aligned}$$

Protože  $\alpha\beta = 1$ , platí pro všechna  $n$  rovnost  $\alpha^n \beta^n = 1$ . Odtud plyne, že

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^n (\beta^{-n} - \alpha^{-n})}{\alpha - \beta} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} x^n.$$

Protože však podle definice  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$ , dokázali jsme tak

$$A_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[ (2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right].$$

**4.12. Poznámka.** S určováním počtu koster v daném grafu úzce souvisí problém, *kolik vlastně existuje grafů na dané množině uzlů.*

Takto zformulovaná otázka je ovšem jednoduchá. Je-li  $[U, H]$  graf na  $n$  uzlech, je podle definice  $H \subseteq \mathcal{P}_2(U)$ , přičemž víme, že  $|\mathcal{P}_2(U)| = \binom{n}{2}$ . (Viz věta 3.4 z 1. kapitoly.) Všechny grafů s množinou uzlů  $U$  je tedy tolik, kolik má množina  $\mathcal{P}_2(U)$  podmnožin. Označíme-li  $g_n$  počet grafů na  $n$  uzlech, platí podle uvedeného

$$g_n = 2^{\binom{n}{2}}.$$

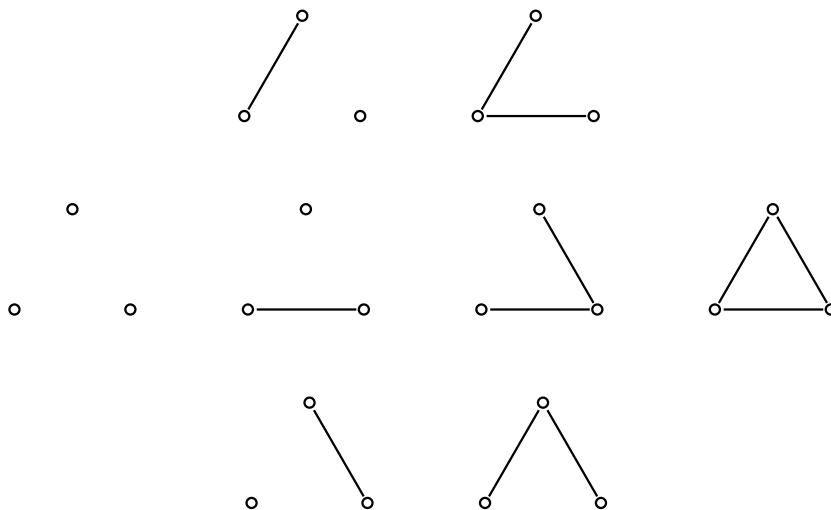
Jak rychle roste posloupnost  $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ , plyne z následující tabulky:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$g_n$	1	2	8	64	1 024	32 768	2 097 152	2 684 354 544	...

Nyní je snad zřejmé, proč řešení grafových úloh nakreslením nebo vypsáním „všech možností“ nemá ve většině případů naději na úspěch.

Určování počtu grafů na  $n$  uzlech je však přirozené následujícím způsobem „zkomplikovat“.

Z právě uvedených tabulek plyne, že na třech uzlech existuje celkem 8 grafů. Všechny tyto grafy jsou uvedeny na obr. 4.16.



Obr. 4.16: Grafy na třech uzlech

Z uvedeného obrázku je patrné, že některé z uvedených 8 grafů jsou si natolik „podobné“, že je nerozlišíme, pokud se nedíváme na označení uzlů. (Čtenář si jistě okamžitě uvědomil, že jde o grafy nakreslené „pod sebou“.) Tuto „podobnost“ nyní precizujeme.

**4.13. Definice.** Buďte  $[U_1, H_1], [U_2, H_2]$  grafy. Zobrazení  $f: U_1 \rightarrow U_2$  se nazývá *izomorfismus* grafu  $[U_1, H_1]$  na graf  $[U_2, H_2]$ , když platí:

1.  $f$  je bijekce,
2.  $xy \in H_1$  právě tehdy, když  $f(x)f(y) \in H_2$ .

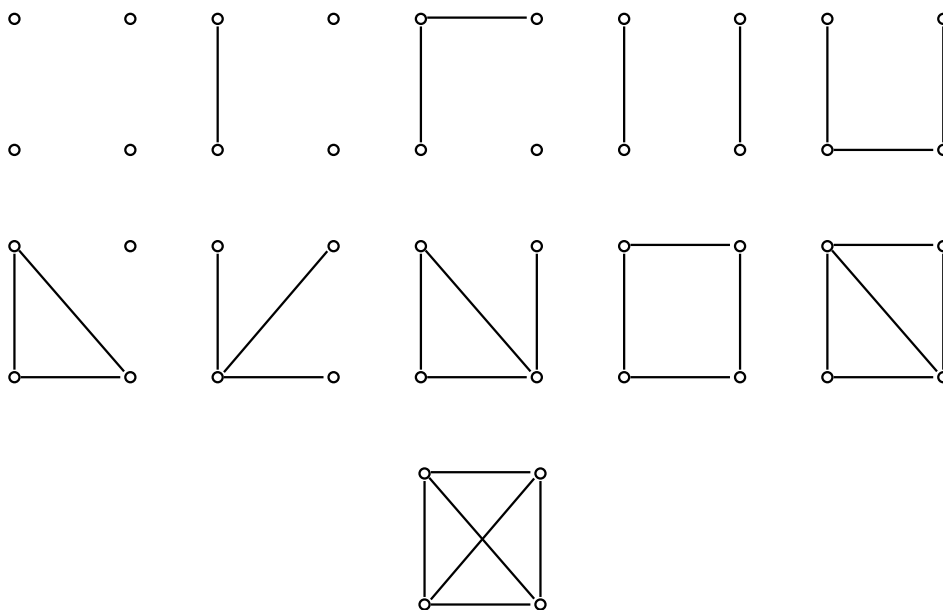
Dva grafy jsou *izomorfní*, když mezi nimi existuje alespoň jeden izomorfismus.

Čtenář si jistě okamžitě uvědomuje, že izomorfismus je ekvivalence na třídě všech grafů.

V jistém slova smyslu důležitější než otázka, kolik existuje na  $n$  uzlech všech grafů, je problém, kolik na  $n$  uzlech existuje **neizomorfních** grafů. Tak například na čtyřech uzlech existuje 64 grafů, avšak jen 11 neizomorfních grafů, jak je patrné z obr. 4.17.

Odvození metody pro výpočet počtu  $h_n$  neizomorfních grafů na  $n$  uzlech přesahuje naše možnosti. (Jde o tzv. *Pólyovu enumerační metodu*, o níž jsme se zmiňovali již v paragrafu 1.1 kapitoly.) Existuje však jednoduchý odhad pro čísla  $h_n$ ; je totiž zřejmé, že platí

$$h_n \geq \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!},$$



Obr. 4.17: Neizomorfní grafy na čtyřech uzlech

neboť na  $n$ -prvkové množině jistě existuje nejvýše  $n!$  vzájemně izomorfních grafů. Uvedený odhad je při své jednoduchosti pro velká  $n$  velmi přesný. Lze totiž dokázat, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( h_n - \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \right) = 0.$$

I posloupnost  $(h_n)_{n=1}^{\infty}$  roste „velmi rychle“, jak lze vyčíst z následující tabulky:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$h_n$	1	2	4	11	34	156	1 034	12 344	308 168	...

Dokonce i počet  $t_n$  *neizomorfních stromů* na  $n$  uzlech (při veškeré „jednoduchosti“ stromů) roste pořád ještě tak rychle, že i jejich systematický přehled pro poměrně malá  $n$  je nemožný (viz tabulku na straně 155).

Jak jsme uvedli již ve větě 4.8, obsahuje každý konečný souvislý graf alespoň jednu kosteru. Viděli jsme, že kosteru grafu obecně není určena jednoznačně. Uvědomme si však, že podle věty 4.3 mají všechny kosteru stejný počet hran (roven počtu uzlů zmenšený o jedničku).

Abychom konečně uviděli nějakou aplikaci teorie grafů, budeme se nyní zabývat hledáním vhodných kosteru v tzv. ohodnocených grafech. K tomu však potřebujeme nejprve následující definici.

	A	B	C	D	E	F
A	0	13	27	18	5	30
B	13	0	7	18	4	12
C	27	7	0	3	8	11
D	18	18	3	0	9	24
E	5	4	8	9	0	15
F	30	12	11	24	15	0

Tabulka 2.2: Náklady na vybudování železnice mezi městy

**4.14. Definice.** Necht' je  $[U, H]$  graf. Buď dáno zobrazení  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  (respektive  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ). Trojici  $[U, H, f]$  nazýváme *hranově ohodnocený* (respektive *uzlově ohodnocený*) graf.

Číslo  $f(t)$  nazýváme *ohodnocení hrany* (respektive *uzlu*)  $t$ .

**4.15. Definice.** Buď  $[U, H, f]$  hranově ohodnocený konečný souvislý graf. Kostra  $[U, H^*]$  grafu  $[U, H]$  se nazývá *minimální kostra* v  $[U, H, f]$ , když pro každou kostru  $[U, H_1]$  grafu  $[U, H]$  platí

$$\sum_{h \in H^*} f(h) \leq \sum_{h \in H_1} f(h).$$

**4.16. Poznámka.** Protože konečný souvislý graf obsahuje pouze konečně mnoho koster, obsahuje nutně každý konečný souvislý hranově ohodnocený graf alespoň jednu minimální kostru. Současně je evidentní, že minimální kostra obecně není jednoznačně určena.

**4.17. Příklad.** Buď dána množina měst A, B, C, D, E, F. V tabulce 2.2 necht' jsou uvedeny náklady na vybudování železnice mezi jednotlivými městy (v miliónech Kč). Naším úkolem je nyní navrhnout mezi uvedenými městy železniční síť tak, aby každá dvě města byla vzájemně po železnici dosažitelná a aby přitom náklady na vybudování železnice byly minimální.

Grafová formulace zadané úlohy je jednoduchá. Naším úkolem je zřejmě nalezení minimální kostry v úplném grafu  $K_6$  s uzly A, B, C, D, E, F, jehož hranové ohodnocení je dáno uvedenou tabulkou.

Ke konkrétnímu řešení této úlohy se vrátíme za chvíli. Uvědomme si, že v zadaném případě bychom pravděpodobně minimální kostru našli poměrně brzy i bez nějaké teorie. V komplikovanějším případě je však nalezení minimální kostry bez znalosti vhodného algoritmu velmi

obtížné. Proto si nyní jednoduchý algoritmus pro konstrukci minimální kostry uvedeme. (První algoritmus pro nalezení minimální kostry našel již v r. 1926 O. Borůvka, jak jsme se již zmínili v paragrafu 1 1. kapitoly. Podrobněji o historii tohoto algoritmu viz. např. v [11]).

**4.18. Věta.** Algoritmus pro hledání minimální kostry: *Bud'  $[U, H, f]$  konečný souvislý hranově ohodnocený graf. Všechny hrany sestavme do posloupnosti  $(h_1, \dots, h_n)$  tak, aby posloupnost  $(f(h_1), \dots, f(h_n))$  byla neklesající. (Takové uspořádání hran vzhledem ke konečnosti grafu jistě existuje i když obecně není určeno jednoznačně.)*

*Požadovaný algoritmus nyní můžeme popsat takto:*

- (1) Polož  $H_0 = \emptyset$ ,  $i = 1$ .
- (2) Obsahuje graf  $[U, H_{i-1} \cup \{h_i\}]$  kružnici? Pokud ano, přejdi k bodu (4). Pokud ne, přejdi k bodu (3).
- (3) Polož  $H_i = H_{i-1} \cup \{h_i\}$ . Přejdi k bodu (5).
- (4) Polož  $H_i = H_{i-1}$ .
- (5) Je  $i = n$ ? Pokud ano, pokračuj podle bodu (6). Pokud ne, přejdi k bodu (8).
- (6) Polož  $H_i = K$ .
- (7) KONEC.  $[U, K]$  je minimální kostra.
- (8) Zvětši hodnotu  $i$  o jedničku a vrat'se k bodu (2).

Popsaným způsobem skutečně v  $[U, H]$  sestrojíme minimální kostru  $[U, K]$ .

To, že  $[U, K]$  je kostra, je evidentní. Nyní je však nutno dokázat, že tato kostra je minimální, tj. že pro každou kostru  $[U, L]$  v  $[U, H]$  platí  $\sum_{h \in K} f(h) \leq \sum_{h \in L} f(h)$ .

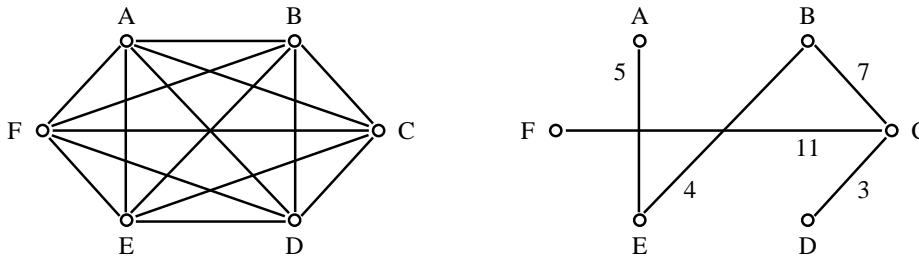
Tento důkaz nebudeme provádět. Jednoduše jej lze provést například pomocí teorie tzv. *matroidů*, o nichž v tomto textu nehovoříme.

**Řešení příkladu 4.17.** Hrany grafu  $K_6$  uspořádáme do vhodné posloupnosti například následovně: (CD, BE, AE, BC, CE, DE, CF, BF, AB, EF, AD, BD, DF, AC, AF). Ohodnocení příslušných hran tvoří posloupnost

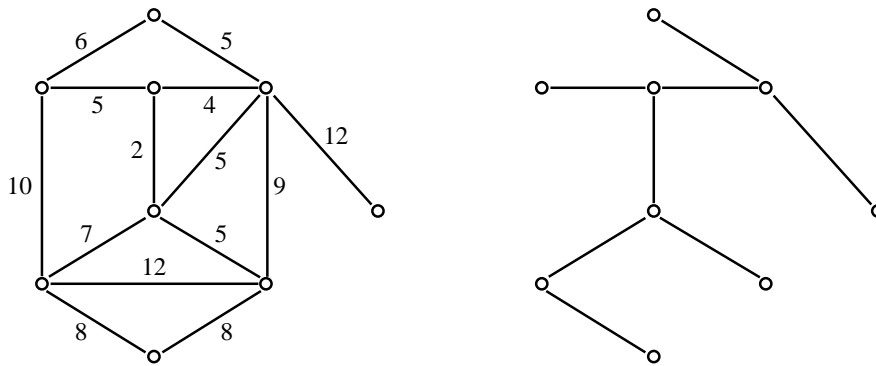
$$(3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 18, 18, 24, 27, 30).$$

Nyní podle algoritmu do kostry postupně vybereme hrany CD, BE, AE, BC, CF. (Viz obr. 4.18.) (Víme, že kostra musí obsahovat 5 hran.)

Minimální náklady na železniční síť jsou tak 30 milionů Kč.



Obr. 4.18: Minimální kostra



Obr. 4.19: Minimální kostra v ohodnoceném grafu



**4.19. Příklad.** Na obr. 4.19a je hranově ohodnocený graf, na obr. 4.19b jeho minimální kostra. Ponecháme čtenáři, aby si promyslel, zda je tato minimální kostra určena jednoznačně.

### Cvičení

1. Najděte sedm neizomorfních podgrafů grafu  $K_3$ .

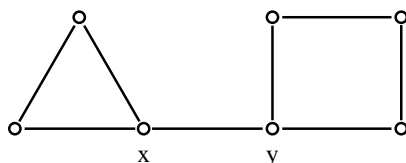
## 5 Mosty, artikulace a některé grafové charakteristiky

V předcházejícím paragrafu jsme hovořili převážně o grafech neobsahujících žádnou kružnici. „Většina“ grafů však pochopitelně kružnice obsahuje. V řadě úvah o grafech je nutno hrany rozlišovat podle toho, zda leží na nějaké kružnici nebo nikoliv.

**5.1. Definice.** Hrana grafu se nazývá *most*, když neleží na žádné kružnici.

**5.2. Příklad.** (a) Ve stromu je každá hrana mostem.

(b) Graf na obr. 5.20 obsahuje právě jeden most – hranu  $xy$ .



Obr. 5.20:

**5.3. Věta.** *Bud'  $xy$  most v souvislém grafu  $[U, H]$ . Pak je graf  $[U, H - \{xy\}]$  nesouvislý a má právě dvě komponenty.*

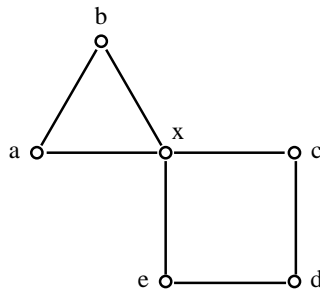
**Důkaz.** V grafu  $[U, H - \{xy\}]$  neexistuje sled mezi uzly  $x, y$ , takže tento graf je nesouvislý. Množina uzlů se rozpadne evidentně na dvě disjunktní množiny  $U(x)$  a  $U(y)$  (při označení z definice 3.12). •

**5.4. Důsledek.** *Každá kostra konečného souvislého grafu obsahuje všechny mosty tohoto grafu.*

**5.5. Definice.** Řekneme, že uzel  $x \in U$  grafu  $[U, H]$  je *artikulace*, když existují hrany  $xy, xz \in H, xy \neq xz$ , které neleží současně na žádné kružnici.

**5.6. Příklad.** (a) Ve stromu je artikulací každý uzel, jehož stupeň je alespoň 2.

(b) Graf na obr. 5.21 má právě jednu artikulaci – uzel  $x$ .



Obr. 5.21:

**5.7. Definice.** Bud'  $\mathcal{G} = [U, H]$  graf,  $uv \in H$  libovolná hrana. Množinu  $H(uv) \subseteq H$  definujeme takto: je-li hrana  $uv$  mostem, je  $H(uv) = \{uv\}$ . Pokud  $uv$  mostem není, pak

$$H(uv) = \{xy \in H; \text{ existuje kružnice v } \mathcal{G} \text{ obsahující } xy \text{ i } uv .\}$$

Dále položme

$$U(uv) = \{t \in U; t \text{ inciduje s některou hranou z } H(uv)\}.$$

Pak je zřejmá  $[U(uv), H(uv)]$  podgrafem grafu  $\mathcal{G}$ . Tento podgraf nazýváme *člen* grafu  $\mathcal{G}$  příslušný hraně  $uv$ .

**5.8. Příklad.** Člen grafu z obr. 5.21 příslušný hraně  $ab$  je trojúhelník o vrcholech  $a, b, x$ , člen příslušný hraně  $cd$  je kružnice o vrcholech  $c, d, e, x$ .

Bud'  $[U, H]$  graf a  $uv, xy$  jeho libovolné navzájem různé hrany takové, že  $H(uv) \cap H(xy) \neq \emptyset$ . Necht' například  $ab \in H(uv) \cap H(xy)$ . Pak v  $[U, H]$  existuje kružnice  $R_1$  obsahující hrany  $uv$  i  $ab$ . Necht'  $R_1 = [U_1, H_1]$ ,  $R_2 = [U_2, H_2]$ . Podle předpokladu je  $|U_1 \cap U_2| \geq 2$ , neboť  $a, b \subseteq U_1 \cap U_2$ . Budte  $r, s \in U_1 \cap U_2$  libovolné navzájem různé uzly. Pak existuje v  $R_1$  cesta z  $r$  do  $s$  obsahující hranu  $uv$ . Protože  $U_1 \cap U_2$  je konečná množina, existují prvky  $r_0, s_0 \in U_1 \cap U_2$  takové, že délka uvedené cesty je minimální. Označme tuto minimální cestu  $C_1$ . Protože však  $r_0, s_0 \in U_2$ , existuje mezi  $r_0, s_0$  cesta  $C_2$  v  $R_2$  obsahující hranu  $xy$ . Spojením cest  $C_1$  a  $C_2$  však zřejmá v  $[U, H]$  obdržíme kružnici obsahující hranu  $uv$  i hranu  $xy$ . To však znamená, že  $xy \in H(uv)$  a současně  $uv \in H(xy)$ . Odtud plyne  $H(uv) = H(xy)$ .

Právě jsme tak dokázali, že pro dvě hrany  $uv, xy \in H$  platí buďto  $H(uv) \cap H(xy) = \emptyset$  nebo  $H(uv) = H(xy)$ . Protože pro libovolnou hranu  $uv \in H$  platí  $uv \in H(uv)$ , je  $H(uv) \neq \emptyset$ . Odtud celkem plyne

**5.9. Věta.** *Systém množin  $\{H(uv); uv \in H\}$  tvoří rozklad na množině  $H$ .*

Zatímco komponenty grafu tvoří disjunktní podgrafy, členy grafu obecně disjunktní podgrafy daného grafu nejsou. Platí totiž

**5.10. Věta.** *Uzel  $x$  je artikulací grafu  $[U, H]$  právě tehdy, když existují hrany  $xy \neq xz$ , z nichž každá patří do jiného členu grafu.*

**Důkaz.** Je-li  $x$  artikulace, pak existují hrany  $xy, xz$  neležící na jedné kružnici. Pak ale  $H(xy) \neq H(xz)$ . Patří-li naopak hrany  $xy, xz$  různým členům grafu, neexistuje kružnice, která by obě hrany obsahovala. To však znamená, že  $x$  je artikulace. •

Důležitou charakteristikou grafů je tzv. „cyklomatické číslo“, nazývané též *Bettiho číslo* daného grafu.

**5.11. Definice.** Bud'  $\mathcal{G} = [U, H]$  konečný graf. *Cyklomatickým číslem grafu nazýváme číslo*

$$\nu(\mathcal{G}) = |H| - |U| + k,$$

kde  $k$  je počet komponent grafu  $\mathcal{G}$ .

**5.12. Věta.** *Cyklomatické číslo každého konečného grafu je nezáporné.*

**Důkaz.** Bud'  $[U, H]$  konečný souvislý graf, tj.  $k = 1$ . Podle věty 4.8 existuje v  $[U, H]$  kostra  $[U, H_1]$ . Podle věty 4.3 platí  $|H_1| = |U| - 1$ . Protože  $|H_1| \leq |H|$ , plyne odtud  $|H| \geq |U| - 1$ , tj.

$$|H| - |U| + 1 \geq 0.$$

(b) Necht'  $[U, H]$  je konečný nesouvislý graf s komponentami  $[U_1, H_1], \dots, [U_k, H_k]$ . Podle (a) pro každé  $i$  platí  $|H_i| - |U_i| + 1 \geq 0$ , takže

$$\sum_{i=1}^k (|H_i| - |U_i| + 1) = |H| - |U| + k \geq 0.$$

Z důkazu věty 5.12 a věty 4.3 okamžitě plyne

**5.13. Věta.** *Cyklomatické číslo konečného grafu je rovno nule právě tehdy, když je tento graf lesem.*

**5.14. Poznámka.** Z výše uvedeného je zřejmé, že cyklomatické číslo grafu udává v jistém smyslu „míru složitosti“ tohoto grafu. Názorně řečeno,  $\nu(\mathcal{G})$  udává, kolik hran je v  $\mathcal{G}$  nutno odstranit, aby v  $\mathcal{G}$  nezůstala žádná kružnice.

Tak jsme výše popsáním způsobem charakterizovali, alespoň v jistém smyslu, „složitost“ grafu. Je samozřejmě účelné umět vhodným způsobem popsat i jiné grafové charakteristiky. Ukažme si takovou charakteristiku alespoň na případě souvislosti grafů.

Elementární odhad „míry souvislosti“ grafu je evidentní – touto mírou je počet komponent. Popis „míry souvislosti“ souvislého grafu je komplikovanější, i když čtenář patrně má jistou intuitivní představu o tom, co to znamená, že jeden graf je „souvislejší“ než druhý.

**5.15. Definice.** Bud'  $\mathcal{G} = [U, H]$  souvislý graf. Množina  $A \subseteq U$  se nazývá *uzlový řez* grafu  $[U, H]$ , jestliže se souvislost grafu poruší, vyškrtne-li z  $[U, H]$  všechny uzly množiny  $A$  a všechny hrany, které s těmito uzly incidují. (Tj. graf  $[U - A, H - \{xy \in H; xy \cap A \neq \emptyset\}]$  je nesouvislý.)  
*Uzlový stupeň souvislosti*  $u(\mathcal{G})$  grafu  $\mathcal{G}$  je minimální mohutnost uzlového řezu v  $\mathcal{G}$ .

**5.16. Poznámka.** Podle definice 5.15 lze určit uzlový stupeň souvislosti každého konečného souvislého grafu kromě úplných grafů  $K_n$  (promyslete si, které hrany musíme podle definice 5.15 vyškrtnout!). Pro tyto grafy definatoricky klademe

$$u(K_n) = n - 1.$$

Podobně jako uzlový se definuje i hranový stupeň souvislosti.

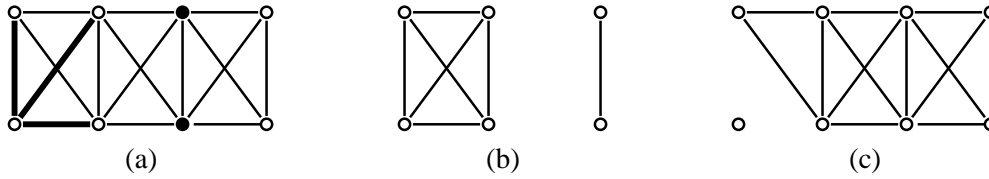
**5.17. Definice.** Bud'  $\mathcal{G} = [U, H]$  souvislý graf. Množina  $H_1 \subseteq H$  se nazývá *hranový řez* v  $\mathcal{G}$ , je-li graf  $[U, H - H_1]$  nesouvislý.  
*Hranový stupeň souvislosti*  $h(\mathcal{G})$  grafu  $\mathcal{G}$  je minimální mohutnost hranového řezu v  $\mathcal{G}$ .

**5.18. Poznámka.** Podle definice 5.17 lze určit  $h(\mathcal{G})$  pro každý konečný souvislý graf kromě grafu  $K_1$  (tj. grafu o jednom uzlu). Pro tento graf definatoricky klademe  $h(K_1) = 0$ .

**5.19. Příklad.** Pro graf  $\mathcal{G}$  na obr. 5.22a platí  $u(\mathcal{G}) = 2$ ,  $h(\mathcal{G}) = 3$ . Jeden z minimálních uzlových řezů je vyznačen plnými kroužky, jeden z minimálních hranových řezů je vyznačen tučnými hranami. Na obr. 5.22b, respektive 5.22c, je graf vzniklý „odstraněním“ příslušného uzlového, respektive hranového, řezu.

**5.20. Věta.** Bud'  $\mathcal{G} = [U, H]$  konečný souvislý graf. Pak platí

$$u(\mathcal{G}) \leq h(\mathcal{G}) \leq \min \{st x; x \in U\}.$$



Obr. 5.22:

**Důkaz.** Je-li  $h(\mathcal{G}) = 0$ , je také  $u(\mathcal{G}) = 0$ , neboť  $\mathcal{G}$  je v tom případě  $K_1$ . Je-li  $h(\mathcal{G}) = 1$ , existuje hrana  $xy \in H$  taková, že  $[U, H - \{xy\}]$  je nesouvislý graf. Pak je však zřejmě  $\mathcal{G} = K_2$  (a tedy  $u(\mathcal{G}) = 1$  podle poznámky 5.16) nebo je  $\{x\}$ , respektive  $\{y\}$  uzlový řez v  $\mathcal{G}$  (takže opět  $u(\mathcal{G}) = 1$ ).

Předpokládejme proto, že  $h(\mathcal{G}) > 1$ . Buď  $H_1$  hranový řez,  $|H_1| = h(\mathcal{G})$ . Zvolme hranu  $h \in H_1$  libovolně. Na každé další hraně  $e \in H_1$  zvolme uzel  $x_e$  tak, že  $x_e$  není incidentní s hranou  $h$ . Nyní z grafu  $\mathcal{G}$  odečteme všechny uzly  $x_e$  ( $e \in H_1 - \{h\}$ ) a hrany s těmito uzly incidentní. Je-li takto vzniklý graf nesouvislý, platí  $u(\mathcal{G}) < h(\mathcal{G})$ . V opačném případě obdržíme nutně uzlový řez, přidáme-li k uzlům  $x_e$  ještě jeden z uzlů tvořících hranu  $h$ . Pak ale  $u(\mathcal{G}) = h(\mathcal{G})$ .

Dokázali jsme tak, že  $u(\mathcal{G}) \leq h(\mathcal{G})$ . Druhá nerovnost ve větě je však zřejmá, neboť pro každý uzel  $x \in U$  tvoří množina všech hran incidentních s  $x$  evidentně hranový řez. •

Ve větě 2.8 jsme dokázali, že v konečném grafu  $[U, H]$  platí  $\sum_{x \in U} \text{st } x = 2|H|$ . Odtud však okamžitě plyne, že  $\min \{\text{st } x; x \in U\} \leq \frac{2|H|}{|U|}$ . Z této nerovnosti a z věty 5.20 plyne důsledek.

**5.21. Důsledek.** *Buď  $\mathcal{G} = [U, H]$  konečný souvislý graf. Pak*

$$h(\mathcal{G}) \leq \frac{2|H|}{|U|}.$$

Pro uzlovou i hranovou souvislost jsou známy významné charakterizační věty (Mengerova a Fordova-Fulkersonova). Vzhledem k jejich závažnosti v řadě aplikací je uvedeme, i když jejich důkazy přesahují rámec našeho textu. K formulaci těchto vět však potřebujeme následující jednoduchou definici.

**5.22. Definice.** Graf  $\mathcal{G}$  se nazývá *uzlově*, respektive *hranově  $k$ -souvislý*, jestliže platí  $u(\mathcal{G}) \geq k$ , respektive  $h(\mathcal{G}) \geq k$ .

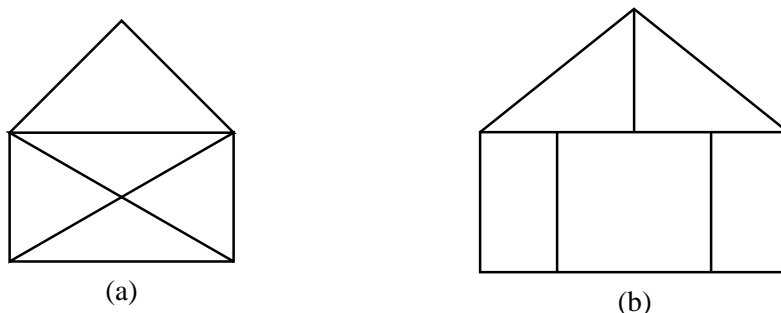
**5.23. Věta.** (Mengerova věta.) *Graf  $\mathcal{G}$  je uzlově  $k$ -souvislý právě tehdy, když pro každé dva uzly  $x, y$  existuje  $k$  cest z  $x$  do  $y$ , které jsou až na uzly  $x, y$  vzájemně disjunktní.*

**5.24. Důsledek.** Graf  $\mathcal{G}$  je uzlově 2-souvislý právě tehdy, když ke každým dvěma uzlům  $x, y$  existuje kružnice v  $\mathcal{G}$ , která je obsahuje.

**5.25. Věta.** (Fordova-Fulkersonova věta.) Graf  $\mathcal{G}$  je hranově  $k$ -souvislý právě tehdy, když pro každé dva uzly  $x, y$  existuje  $k$  cest z  $x$  do  $y$ , které jsou hranově disjunktní.

## 6 Eulerovské a hamiltonovské grafy

Kreslení obrázků „jedním tahem“ je obvyklou součástí tzv. rekreační matematiky. Pravděpodobně každý čtenář si již jako dítě vyzkoušel, že „domeček“ na obr. 6.23a lze jedním tahem nakreslit; a snadno lze ověřit, že obr. 6.23b jedním tahem nakreslit nelze.



Obr. 6.23: Kreslení grafů jedním tahem

Jak jsme uvedli již v paragrafu 1, vyřešil tuto problematiku již v 18. století Euler v souvislosti s problémem sedmi mostů města Královce.

Připomeňme si ještě, že „tah“ v grafu jsme definovali v definici 3.4.

**6.1. Definice.** Řekneme, že graf  $\mathcal{G}$  lze sestrotit jedním tahem, když v  $\mathcal{G}$  existuje tah obsahující všechny hrany tohoto grafu.

V dalším udáme popis všech grafů, které lze jedním tahem sestrotit.

**6.2. Definice.** Konečný graf bez izolovaných uzlů, jehož každý uzel je sudého stupně, se nazývá *eulerovský*.

**6.3. Věta.** Každý uzel eulerovského grafu je obsažen alespoň v jedné kružnici.

**Důkaz.** Bud'  $[U, H]$  eulerovský graf,  $x \in U$  libovolný uzel. Protože  $x$  není izolovaný, existuje hrana  $xy$  s tímto uzlem incidentní. Tato hrana však nemůže být mostem, neboť v tom případě by podle věty 5.3 graf  $[U, H - \{xy\}]$  byl nesouvislý a komponenta obsahující bod  $x$  by obsahovala jediný uzel lichého stupně (totiž uzel  $x$ ). To však podle věty 2.11 není možné. Odtud plyne, že hrana  $xy$  leží na nějaké kružnici, a tedy i  $x$  leží na kružnici. •

**6.4. Věta.** *Konečný souvislý graf lze sestavit jedním uzavřeným tahem právě tehdy, když je tento graf eulerovský.*

**Důkaz. I.** Lze-li konečný graf sestavit jedním uzavřeným tahem, je tento graf nutně souvislý. V uzavřeném tahu přitom z každého uzlu tolikrát vystoupíme, kolikrát jsme do něj vstoupili. Je tedy stupeň každého uzlu sudý.

**II.** Bud'  $\mathcal{G} = [U, H]$  souvislý eulerovský graf. Dokážeme, že  $\mathcal{G}$  lze sestavit jedním uzavřeným tahem.

Zvolme libovolně uzel  $u \in U$ . Podle věty 6.3 leží tento uzel na nějaké kružnici, přičemž kružnice je uzavřeným tahem v  $\mathcal{G}$ . Množina  $A$  všech uzavřených tahů obsahujících uzel  $u$  je tedy neprázdná. Protože je  $A$  konečná, obsahuje tahy maximální délky. Necht' tedy  $\alpha_0 \in A$  je některý tah maximální délky.

Předpokládejme nyní, že existuje hrana  $xy \in H$ , která není obsažena v tahu  $\alpha_0$ . Označme

$$\begin{aligned} H^* &= \{xy \in H; xy \text{ není obsažena v tahu } \alpha_0\}, \\ U^* &= \{x \in U; \text{ existuje } y \in U \text{ tak, že } xy \in H^*\}. \end{aligned}$$

Pak je  $[U^*, H^*]$  podgraf grafu  $\mathcal{G}$ . Z definice grafu  $[U^*, H^*]$  je přitom okamžitě zřejmé, že je to eulerovský graf.

Protože je  $\mathcal{G}$  souvislý, existuje nutně uzel  $v \in U^*$ , který je obsažen v tahu  $\alpha_0$ . Protože je  $[U^*, H^*]$  eulerovský, je uzel  $v$  obsažen v nějaké kružnici  $C$  grafu  $[U^*, H^*]$ . Když nyní v  $\mathcal{G}$  utvoříme sled začínající v  $u$ , pokračujeme v něm až do uzlu  $v$ , nyní projdeme kružnicí  $C$  až do uzlu  $v$  a pak dokončíme tah  $\alpha_0$  až do uzlu  $u$ , vytvoříme v  $\mathcal{G}$  uzavřený tah obsahující uzel  $u$ , jehož délka je větší než délka tahu  $\alpha_0$ . To je však spor s definicí  $\alpha_0$ . To znamená, že  $H^* = \emptyset$ , a tak  $\alpha_0$  obsahuje všechny hrany. •

Pomocí věty 6.4 nyní snadno popíšeme i ty grafy, které lze sestavit jedním otevřeným tahem.

**6.5. Věta.** *Bud'  $\mathcal{G}$  konečný souvislý graf. Pak lze  $\mathcal{G}$  sestavit jedním otevřeným tahem právě tehdy, když  $\mathcal{G}$  obsahuje právě dva uzly lichého stupně.*

*Obsahuje-li  $\mathcal{G}$  právě dva uzly lichého stupně, pak otevřený tah v jednom z těchto uzlů nutně začíná a ve druhém končí.*



**Důkaz. I.** Necht' lze souvislý graf  $\mathcal{G}$  sestavit jedním otevřeným tahem začínajícím v uzlu  $x$  a končícím v uzlu  $y$ . Pak jsou uzly  $x, y$  evidentně lichého stupně a všechny ostatní uzly jsou stupně sudého.

**II.** Necht'  $\mathcal{G} = [U, H]$  je konečný souvislý graf obsahující právě dva uzly  $x, y$  lichého stupně. Bud'  $z \notin U$  libovolný prvek. Položme  $U_1 = U \cup \{z\}$ ,  $H_1 = H \cup \{xz, yz\}$ . Pak je  $[U_1, H_1]$  souvislý eulerovský graf, takže podle věty 6.4 lze tento graf sestavit jedním uzavřeným tahem. Uvažme takový uzavřený tah; jistě můžeme předpokládat, že začíná a končí v uzlu  $z$ . Když nyní z tohoto tahu „vyškrtneme“ hrany  $xz, yz$ , dostaneme zřejmě požadovaný otevřený tah. •

Jak si čtenář jistě mnohokrát povšimnul i v jiných matematických disciplínách, lze tutéž skutečnost často popsat na první pohled zcela odlišnými způsoby. Samozřejmě, že je tomu tak i v teorii grafů. Proto i tak jednoduchá tvrzení jako jsou věty 6.4 a 6.5 lze v literatuře najít ve zcela odlišných formulacích. Ukažme si to alespoň na jednom příkladu.

**6.6. Definice.** Jsou-li  $[U, H]$ ,  $[U_1, H_1]$  grafy, nazveme zobrazení  $f : U \rightarrow U_1$  *homorfismem* grafu  $[U, H]$  do grafu  $[U_1, H_1]$ , jestliže pro každou hranu  $xy \in H$  platí, že  $f(x)f(y) \in H_1$  (tj. hrana se zobrazí na hranu). (Srovnej s definicí izomorfismu uvedenou v definici 4.13.)

Vcelku snadno lze dokázat následující tvrzení, jehož důkaz přenecháme čtenáři.

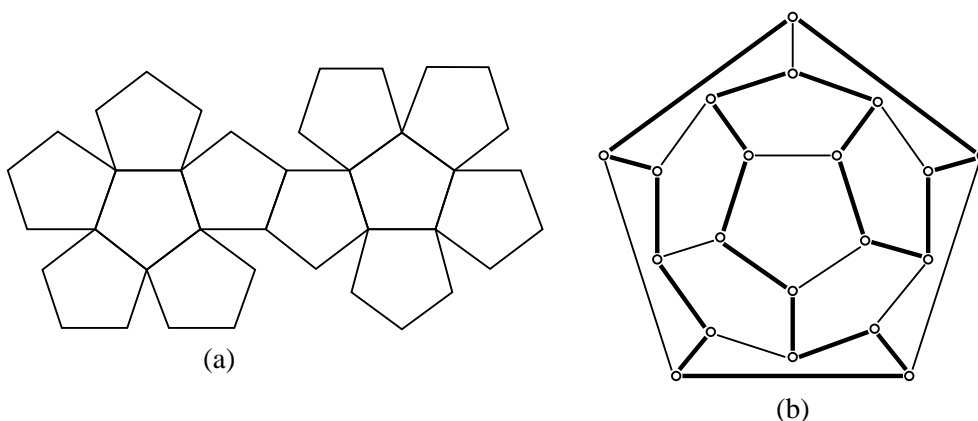
**6.7. Věta.** *Souvislý graf  $[U, H]$  je eulerovský právě tehdy, když je homorfním obrazem kružnice délky  $|H|$ .*

Přeformulování vět 6.4 a 6.5 je nyní zřejmé.

Problematika, kterou se nyní budeme zabývat, jakkoliv je jednou z nejkompikovanějších částí teorie grafů, má svůj prapůvod v hříčce, kterou v roce 1859 vymyslel irský matematik W. R. Hamilton (známý především objevem tzv. *kvaternionů*).

Jak dobře víme, jedním z pěti pravidelných mnohostěnů je pravidelný dvanáctistěn, jehož povrch je tvořen shodnými pětiúhelníky. (O pravidelných mnohostěnech budeme podrobněji hovořit v poznámce 7.17.) Povrch tohoto dvanáctistěnu rozvinutý do roviny je na obr. 6.24a. Hamilton připojil ke každému z dvaceti vrcholů tohoto dvanáctistěnu jméno některého světového velkoměsta a nabídl jednomu výrobci hraček výrobu „hlavolamu“, jehož řešením je „cesta kolem světa“ po hranách daného dvanáctistěnu, během níž se vyjde z některého města, každým z dalších měst se projde právě jednou a cestovatel se nakonec vrátí do výchozího města.

Grafová formulace tohoto „hlavolamu“ je evidentní. Je dán graf o 20 uzlech (vrcholy dvanáctistěnu), hrany grafu odpovídají hranám dvanáctistěnu (jak v paragrafu 7 odvodíme, je těchto hran 30) a naším úkolem je v tomto grafu najít kružnici procházející všemi uzly. Na obr.



Obr. 6.24: Povrch dvanáctistěnu

6.24b je znázorněno jedno z řešení. Hrany ležící na kružnici jsou vytaženy silněji. (Graf 6.24b jsme již viděli na obr. 2.9a.)

Nyní uveďme standardní terminologii.

**6.8. Definice.** Graf se nazývá *hamiltonovský*, když v něm existuje kružnice procházející všemi uzly. Tato kružnice se nazývá *hamiltonovská*.

**6.9. Poznámka.** (a) V definici 2.13 jsme definovali pravidelný graf. Faktor, který je pravidelným grafem, nazýváme *pravidelným faktorem*. Pravidelný faktor 2. stupně obvykle nazýváme *kvadratickým faktorem*. Můžeme tedy říci, že *hamiltonovská kružnice je souvislý kvadratický faktor* daného grafu.

(b) Graf na obr. 6.24b je hamiltonovský. Je však zřejmé, že existují grafy, které hamiltonovské nejsou. Takové jsou například všechny stromy; protože v nich neexistuje žádná kružnice, neexistuje v nich tím spíše kružnice hamiltonovská.

Jakkoliv se na první pohled může zdát problém charakterizace hamiltonovských grafů jednoduchý, není dodnes známa žádná nutná a dostatečná podmínka této skutečnosti. Před uvedením některých známých výsledků ještě uveďme jeden příklad.

**6.10. Příklad.** S Eulerovým jménem je spojována i následující úloha: *Může jezdec projít šachovnicí (o 64 polích) tak, aby každým polem prošel právě jednou a posledním tahem se vrátil na výchozí pole?*

Grafová formulace je snadná. Uvažujeme graf, jehož uzly jsou jednotlivá pole na šachovnici. Dva uzly jsou pak spojeny hranou právě tehdy, když jezdec může skočit z jednoho pole na

druhé. Naším úkolem je nyní v tomto grafu najít hamiltonovskou kružnici – pokud ovšem existuje.

Již dávno je známo, že popsaný graf je opravdu hamiltonovský. Dodnes se však například neví, kolik hamiltonovských kružnic vlastně v tomto grafu existuje.

Nakreslit daný graf nemá smysl, neboť obrázek by byl značně nepřehledný. Popsat v něm hamiltonovskou kružnici je však velmi jednoduché. Do polí schématicky znázorněné šachovnice vepíšeme čísla  $1, 2, \dots, 64$  v takovém pořadí, v jakém jimi bude jezdec postupně procházet. Řešení, které uvádíme v tabulce 2.3 (popsal je v roce 1862 šachista Jaenisch je mimořádně důvtipné tím, že je současně polomagickým čtvercem; součet čísel v každém řádku a každém sloupci je roven 260. (Srovnej s Eulerovským magickým čtvercem ve cvičení ke kapitole 10.)

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

Tabulka 2.3:

Nyní tedy uveďme některé vlastnosti hamiltonovských grafů. Následující nutná podmínka plyne bezprostředně z důsledku 5.24

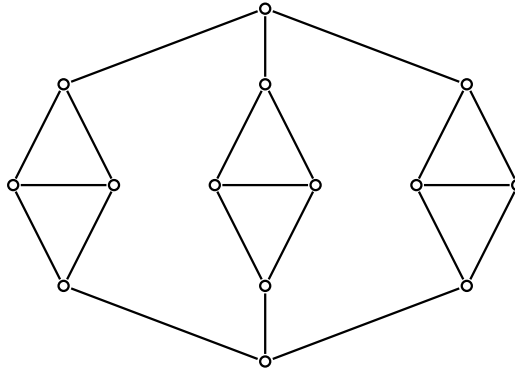
**6.11. Věta.** *Je-li  $\mathcal{G}$  hamiltonovský graf, je jeho uzlový stupeň souvislosti  $u(\mathcal{G}) \geq 2$ .*

Snadno však lze ukázat, že podmínka z věty 6.11 není pro existenci hamiltonovské kružnice postačující. Například graf na obr. 6.25 má uzlový stupeň souvislosti roven 2, je však snadné se přesvědčit, že není hamiltonovský.

Nalezení dostatečných podmínek toho, aby graf byl hamiltonovský, bylo velmi obtížné. Jednu z nejznámějších odvodil v roce 1952 Dirac.

**6.12. Věta.** *Necht'  $\mathcal{G} = [U, H]$  je konečný graf,  $|U| = n \geq 3$  a  $st x \geq \frac{n}{2}$  pro každý uzel  $x \in U$ . Pak je  $\mathcal{G}$  hamiltonovský.*

**Důkaz.** Uvědomme si nejprve, že každý konečný graf je podgrafem nějakého hamiltonovského grafu. Zejména můžeme graf  $[U, H]$  doplnit o množinu uzlů  $V$  a o množinu hran  $\{xy; x \in U, y \in V\}$  na hamiltonovský graf. Je-li totiž  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ , stačí položit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

Obr. 6.25: Graf s  $u(\mathcal{G}) = 2$ , který není hamiltonovský

(kde  $U \cap V = \emptyset$ ) a hamiltonovskou kružnicí je zřejmě kružnice procházející postupně uzly  $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n, u_1$ .

Nechť nyní graf  $\mathcal{G} = [U, H]$  splňuje předpoklady věty a připusíme, že není hamiltonovský. Označme  $k$  nejmenší možný počet uzlů, o které když doplníme spolu s hranami výše uvedeným způsobem graf  $\mathcal{G}$ , tak obdržíme hamiltonovský graf  $\mathcal{G}^*$ . Je-li  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ ,  $U^* = U \cup V$ ,  $H^* = H \cup \{u_i v_j; u_i \in U, v_j \in V\}$ , je  $\mathcal{G}^* = [U^*, H^*]$ . V  $\mathcal{G}^*$  tedy podle předpokladu existuje hamiltonovská kružnice  $C$ , procházející postupně uzly  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , kde  $m = n + k \geq 4$ , neboť podle předpokladu je  $n \geq 3$ ,  $k \geq 1$ . Označení uzlů jistě můžeme zvolit tak, že  $x_1 = u_1$ ,  $x_2 = v_1$ ,  $x_3 = u_2$  (tj. kružnice začíná „doplněnou“ hranou). V  $H$  nyní nemůže být hrana  $x_1 x_3 (= u_1 u_2)$ . Kdyby totiž  $x_1 x_3 \in H$ , bylo by doplnění grafu  $\mathcal{G}$  o uzel  $x_2 = v_1$  zbytečné a to je spor s minimalitou čísla  $k$ .

Označme nyní  $K$  množinu hran z  $H^*$ , které neleží na kružnici  $C$ . Je-li  $x_1 x_i \in K$  pro některé  $i \neq 3$ , pak  $x_3 x_{i+1} \notin K$ , tj.  $x_3 x_{i+1} \in H^*$ , neboť  $x_3 x_{i+1}$  jistě není hrana kružnice. Kdyby totiž  $x_3 x_{i+1} \in K$ , mohli bychom v  $\mathcal{G}^*$  sestrojít kružnici procházející postupně uzly

$$x_1, x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_3, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_1.$$

Tato kružnice je však hamiltonovská v grafu, který obdržíme z  $\mathcal{G}^*$  odečtením uzlu  $x_2 = v_1$  a všech hran s tímto uzlem incidentních. To je však spor s předpokladem, že  $k$  je nejmenší nutný počet dodaných uzlů.

Nyní určíme, kolik je v  $K$  hran tvaru  $x_1 x_i$ . Uvědomme si, že v  $\mathcal{G}^*$  platí  $st u_j \geq \frac{n}{2} + k$  pro každý uzel  $u_j \in U$ . (V  $\mathcal{G}$  je  $st u_j \geq \frac{n}{2}$ , v  $\mathcal{G}^*$  s uzlem  $u_j$  navíc sousedí uzly  $v_1, \dots, v_k$ .) Protože v kružnici  $C$  sousedí s uzlem  $x_1$  dva uzly, je v  $K$  alespoň  $\frac{n}{2} + k - 2$  hran tvaru  $x_1 x_i$ . Podle výše uvedeného to však znamená, že v  $H^*$  není minimálně  $\frac{n}{2} + k - 2$  hran tvaru  $x_3 x_j$  (kromě hran  $x_3 x_{i+1}$  pro  $x_1 x_i \in K$  je to, jak již víme, ještě hrana  $x_3 x_1$ .)

Nyní uvažme, co všechno o uzlu  $x_3$  víme. Vychází z něho alespoň  $\frac{n}{2} + k$  hran  $x_3x_i$ , přitom však v  $\mathcal{G}^*$  nesousedí minimálně s  $\frac{n}{2} + k - 1$  uzly  $x_i \neq x_3$ . Protože však všech uzlů  $x_i \neq x_3$  je  $n + k - 1$ , musí platit

$$\left(\frac{n}{2} + k\right) + \left(\frac{n}{2} + k - 1\right) \leq n + k - 1.$$

Odtud však plyne, že  $k \leq 0$ , což je spor s předpokladem, že  $\mathcal{G}$  není hamiltonovský, takže  $k \geq 1$ .

•

V roce 1960 odvodil norský matematik O. Ore ještě obecnější dostatečnou podmínku existence hamiltonovské kružnice v daném grafu. Je okamžitě zřejmé, že Diracova věta je důsledkem následujícího Oreho tvrzení.

**6.13. Věta.** *Bud'  $[U, H]$  konečný graf,  $|U| \geq 3$ . Necht' pro každé dva uzly  $x, y \in U$ , které nejsou sousední, platí*

$$\text{st } x + \text{st } y \geq |U|.$$

*Pak je graf  $[U, H]$  hamiltonovský.*

**Důkaz.** Důkaz tohoto tvrzení nebudeme provádět. •

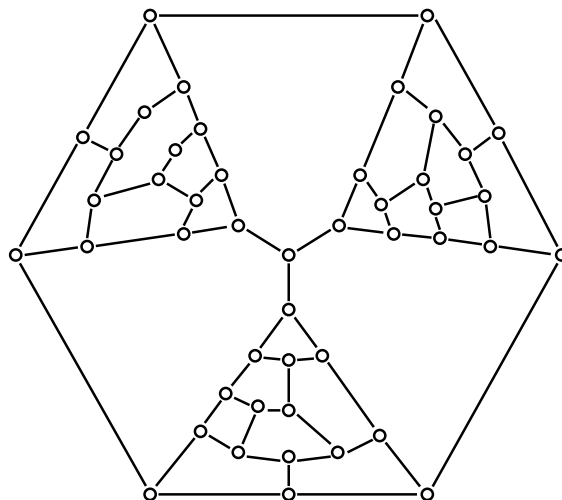
**6.14. Poznámka.** Jak jsme již uvedli, není dosud známa pro hamiltonovské grafy charakterizační věta, která by udávala nutnou a dostatečnou podmínku. Proto byly hledány takové podmínky alespoň pro některé důležité třídy grafů. Dlouho byla například nevyřešena Taitova hypotéza, že každý rovinný uzlově 3-souvislý 3-pravidelný graf je již nutně hamiltonovský. (O rovinných grafech budeme podrobněji hovořit v paragrafu 7. Jsou to jednoduše řečeno grafy, které lze v rovině nakreslit tak, že se jejich hrany neprotínají.) Z platnosti Taitovy hypotézy by mimochodem plynulo kladné řešení problému čtyř barev – viz paragraf 7. V roce 1956 však jeden z nejvýznamnějších odborníků v teorii grafů W. T. Tutte uvedenou hypotézu vyvrátil. Tutteův protipříklad je uveden na obr. 6.26.

Tutte však dokázal, že *každý rovinný uzlově 4-souvislý graf je již nutně hamiltonovský.*

**6.15. Poznámka.** Existuje-li v grafu cesta procházející všemi uzly, nazývá se tato cesta *hamiltonovská*. Graf, v němž existuje hamiltonovská cesta, se nazývá *polohamiltonovský*. Je zřejmé, že každý hamiltonovský graf je současně polohamiltonovský; stejně tak je evidentní, že obrácené tvrzení obecně neplatí. Například graf  $K_2$  je polohamiltonovský, avšak není hamiltonovský.

### Cvičení

1. Najděte tři neizomorfní hamiltonovské grafy na čtyřech uzlech.
2. Najděte dva neizomorfní hamiltonovské grafy na pěti uzlech, které mají nejvýše šest hran.
3. Najděte v  $K_7$  tři hamiltonovské kružnice, v nichž je obsaženo všech 21 hran grafu  $K_7$ .



Obr. 6.26: 3-souvislý 3-pravidelný nehamiltonovský graf

## 7 Rovinné grafy

V průběhu dosavadního výkladu jsme sice grafy „kreslili“, intuitivně je jistě každému čtenáři zřejmé, jak se toto kreslení provádí, avšak fakticky jsme se mohli bez tohoto kreslení obejít, neboť žádná definice ani žádné tvrzení nebylo na tomto kreslení závislé. (I když je nutno si uvědomit, že právě možnost názorného kreslení je jedním z hlavních důvodů četnosti a rozmanitosti aplikací teorie grafů.)

V tomto paragrafu však bude kreslení grafů hrát centrální roli. Proto je nutno některé pojmy precizovat. Nejprve však uzavřeme následující domluvu.

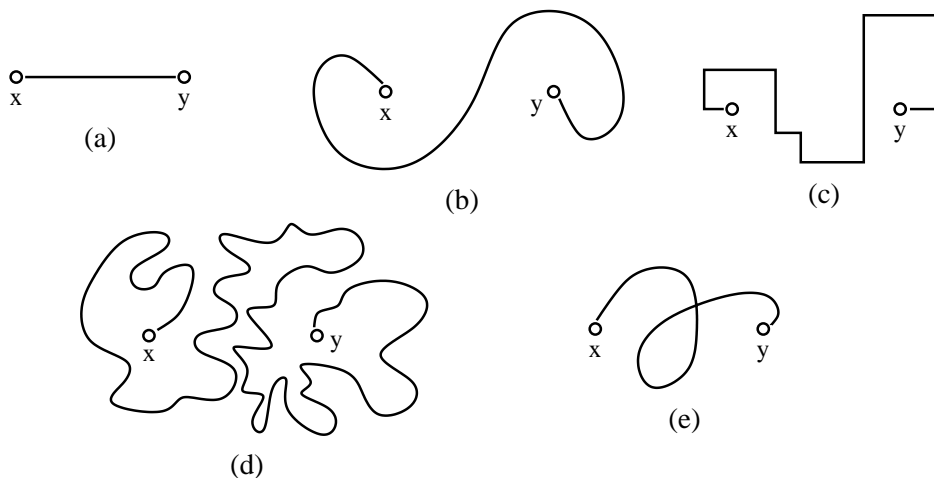
**7.1. Dohoda.** V celém paragrafu 7 pojem „graf“ značí „konečný graf“.

**7.2. Definice.** Buď dán graf  $[U, H]$ . *Nakreslení* tohoto grafu (v rovině) vznikne tak, že uzly znázorníme jako body eukleidovské roviny  $\mathbb{E}_2$  a hranu  $xy \in H$  znázorníme jako oblouk v  $\mathbb{E}_2$  s koncovými body  $x, y$ .

**7.3. Poznámka.** (a) V teorii grafů se studují nakreslení grafů na různých plochách (například na sféře, na anuloidu apod.). Přes důležitost těchto nakreslení se v dalším budeme zabývat pouze nakreslením grafů v rovině.

(b) Oblouk, jak známo, je topologický obraz úsečky. (Oblouk v rovině je tedy obraz intervalu  $[a, b] \subseteq \mathbb{E}_1$  při zobrazení  $f: \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_2$ , které je prosté, spojitě a má tu vlastnost, že inverzní zobrazení  $f^{-1}$  je rovněž spojitě.) Protože oblouků mezi dvěma body  $x, y \in \mathbb{E}_2$  existuje nekonečně mnoho, plyne odtud, že graf může mít v rovině nekonečně mnoho nakreslení.

Na obr. 7.27a–d jsou oblouky mezi uzly  $x, y$ . Na obr. 7.27e je křivka s koncovými body  $x, y$ , která však není obloukem.



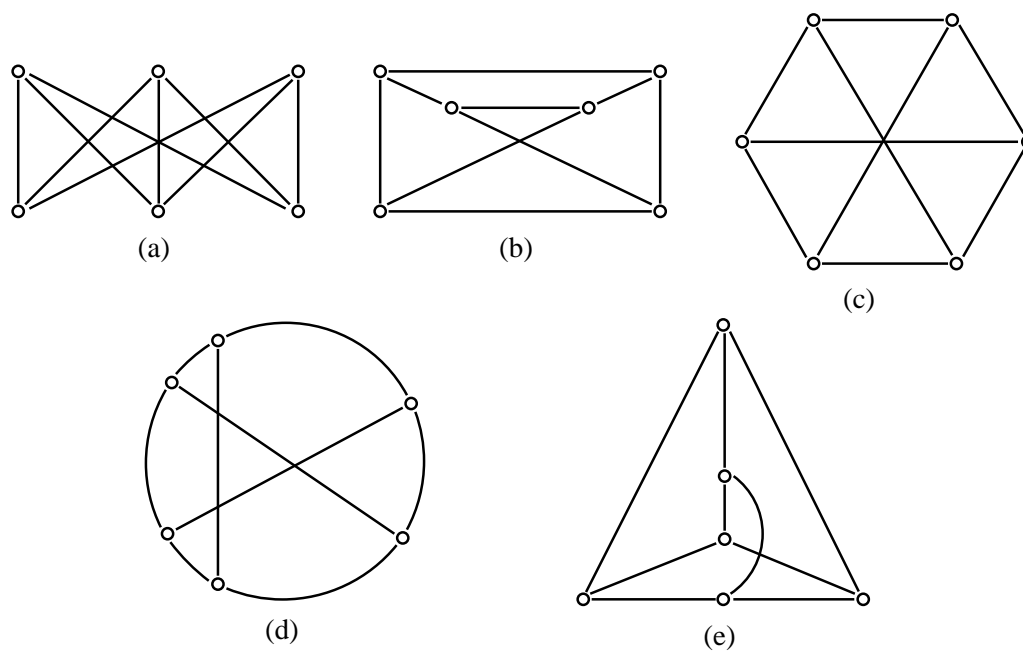
Obr. 7.27: Křivky s koncovými body  $x, y$

(c) Grafy samozřejmě většinou kreslíme tak, že hrany znázorňujeme jako úsečky nebo jiné „jednoduše vyhlížející“ křivky a nikoliv tak, jak je to provedeno například na obr. 7.27d. Přesto má obecně graf nekonečně mnoho nakreslení, neboť není jednoznačně předem dáno ani rozmístění uzlů v rovině. Ponecháme na čtenáři, aby si promyslel, že na obr. 7.28a–d je nakreslen tentýž graf.

To, že je na výše uvedených obrázcích nakreslen jeden a tentýž graf, lze jinými slovy zformulovat tak, že každé dva grafy, které mají nakreslení na některém z obr. 7.28, jsou izomorfní.

Uvážíme-li, že na těchto obrázcích jsme kreslili jednoduchý graf na šesti uzlech, není jistě překvapující, že obecně rozeznat, zda dané dva grafy jsou izomorfní, je jednou z nejtěžších otázek teorie grafů. Dodnes není znám efektivní algoritmus pro řešení tohoto problému.

Při nakreslení grafu se hrany mohou, avšak nemusí, vzájemně křížit. Při některých úvahách a aplikacích je důležité zjistit, zda lze daný graf nakreslit tak, aby se hrany nekřížily. (Například v problematice tištěných spojů apod.) Tím je motivována následující definice.



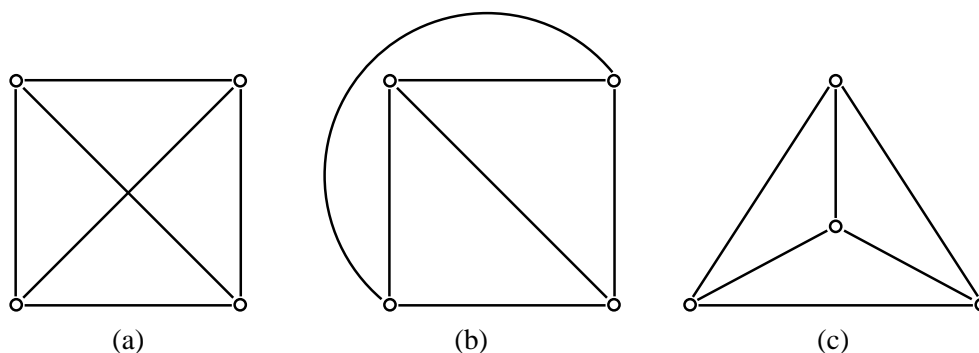
Obr. 7.28: Izomorfní grafy na šesti uzlech



**7.4. Definice.** Graf se nazývá *rovinný* (též *planární*), když existuje takové jeho nakreslení, že každé dvě různé hrany mají nejvýše jeden společný bod – uzel, který je případně s oběma hranami incidentní.

Na první pohled je zřejmé, že například stromy nebo kružnice jsou rovinnými grafy. Dokázat, že nějaký graf je rovinný je však zřejmě jednodušší, než dokázat, že daný graf rovinný není. Častou hříčkou je například nalezení rovinného nakreslení grafu na obr. 7.28a. (Podle této známé rekreační úlohy se také tomuto grafu často říká *tři domy a tři studně*.) Jak v dalším uvidíme, nemá tato úloha řešení, neboť graf na obr. 7.28a není rovinný.

**7.5. Příklad.** Graf  $K_4$  je rovinný, i když jeho „běžné“ nakreslení je takové, že se hrany protínají (obr. 7.29a). Důležité totiž je, že existuje nakreslení, v němž se hrany neprotínají (obr. 7.29b). Tentýž graf lze však nakreslit ještě mnohem „elegantněji“ (obr. 7.29c).



Obr. 7.29: Různá nakreslení grafu  $K_4$

Existence nakreslení grafu  $K_4$  z obr. 7.29c zákonitě vyplývá z následujícího tvrzení, které odvodil Wagner v roce 1936. Důkaz tohoto tvrzení nebudeme uvádět.

**7.6. Věta.** *Graf je rovinný právě tehdy, když existuje jeho rovinné nakreslení takové, že všechny jeho hrany jsou znázorněny úsečkami.*

Jedním z nejdůležitějších tvrzení o rovinných grafech je tzv. *Eulerova věta*. K její formulaci však potřebujeme následující definici.

**7.7. Definice.** Buď  $[U, H]$  rovinný souvislý graf. Buď dáno některé jeho rovinné nakreslení. Označme  $W$  množinu všech oblastí, na něž je tímto nakreslením rovina rozdělena (včetně „vnějšku“). Pak trojici  $[U, H, W]$  nazveme *mapou*.

**7.8. Poznámka.** Oblast, jak známo, je otevřená souvislá množina. Například každá kružnice rozdělí rovinu na dvě oblasti – vnitřek a vnějšek. Mapa určená nakreslením grafu  $K_4$  na obr. 7.29c obsahuje 4 oblasti. Nakreslení téhož grafu na obr. 7.29a žádnou mapu neurčuje, neboť uvedené nakreslení není rovinné.

**7.9. Věta.** (Eulerova věta.) *Bud'  $[U, H, W]$  libovolná mapa. Pak*

$$|W| + |U| - |H| = 2. \quad (7.1.)$$

**Důkaz.** Indukcí vzhledem k číslu  $|H|$ . Je-li  $H = \emptyset$ , je nutně  $|U| = 1$ , neboť graf  $[U, H]$  je souvislý. Pak ale  $|W| = 1$  a rovnost 7.1. je splněna triviálně.

Předpokládejme nyní, že rovnost 7.1. platí pro všechny mapy  $[U, H, W]$  takové, že  $|H| \leq n$ . Bud'  $[U, H, W]$  mapa,  $|H| = n + 1$ . Rozlišíme dva případy:

(a) Graf  $[U, H]$  obsahuje most  $xy$ . Podle věty 5.3 je graf  $[U, H - \{xy\}]$  nesouvislý a má dvě komponenty  $[U_1, H_1]$ ,  $[U_2, H_2]$ . Protože  $|H_1| \leq n$ ,  $|H_2| \leq n$ , platí podle indukčního předpokladu pro mapy  $[U_1, H_1, W_1]$  a  $[U_2, H_2, W_2]$

$$|W_1| + |U_1| - |H_1| = |W_2| + |U_2| - |H_2| = 2.$$

Dále platí  $|H_1| + |H_2| + 1 = |H|$  (neboť od  $H$  jsme odečetli hranu  $xy$ ) a  $|U_1| + |U_2| = |U|$ . Odečtením mostu se v dané mapě počet oblastí nezměnil, avšak v součtu  $|W_1| + |W_2|$  je „vnějšek“ započítán dvakrát. Proto  $|W_1| + |W_2| = |W| + 1$ . Odtud celkem dostáváme:

$$\begin{aligned} |W| + |U| - |H| &= (|W_1| + |W_2| - 1) + (|U_1| + |U_2|) - \\ &\quad - (|H_1| + |H_2| + 1) = \\ &= (|W_1| + |U_1| - |H_1|) + (|W_2| + |U_2| - |H_2|) - 2 = \\ &= 2 + 2 - 2 = 2. \end{aligned}$$

V případě, že  $[U, H]$  obsahuje most, je tak věta dokázána.

(b) Necht'  $[U, H]$  neobsahuje most. Bud'  $h \in H$  libovolná hrana. Protože  $h$  není most, leží na nějaké kružnici. Označme  $C$  kružnici maximální délky, která obsahuje hranu  $h$ . Uvnitř kružnice  $C$  je nutně nějaká oblast, která vynecháním hrany  $h$  v mapě  $[U, H, W]$  zanikne. V mapě  $[U, H_1, W_1]$  vzniklé z mapy  $[U, H, W]$  odečtením hrany  $h$  je tedy o jednu hranu a jednu oblast méně než v mapě původní. Protože  $|H_1| = n$ , platí pro mapu  $[U, H_1, W_1]$  rovnost 7.1., tj.  $|W_1| + |U| - |H_1| = 2$ . Odtud však plyne platnost 7.1. i pro mapu  $[U, H, W]$ . •

Pomocí Eulerovy věty lze snadno dokázat následující důležité tvrzení.

**7.10. Věta.** *Graf  $K_5$  (tj. úplný graf na pěti uzlech) ani graf z obr. 7.28a (tj. graf „3 domy a 3 studně“) není rovinný.*

**Důkaz.** (a) Pripustíme, že graf  $K_5$  je rovinný. Necht' tedy  $[U, H, W]$  je mapa vzniklá některým jeho rovinným nakreslením. Platí  $|U| = 5$ ,  $|H| = 10$ , tj.  $|W| = 2 + |H| - |U| = 7$ . Každá oblast přitom musí mít hranici alespoň ze tří hran a každá hrana odděluje alespoň dvě oblasti (protože v  $K_5$  neexistují mosty). Platí tak

$$2 \cdot 10 \geq 3 \cdot |W|,$$

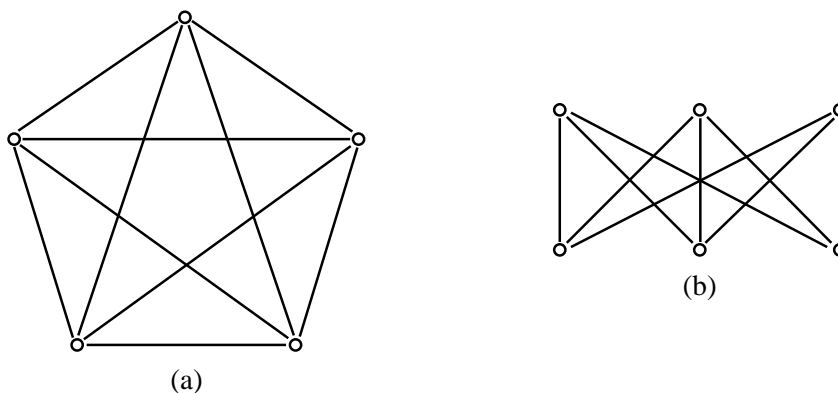
tj.  $|W| < 7$ , což je spor.

(b) Analogicky. Kdyby  $[U, H, W]$  byla mapa vzniklá rovinným nakreslením grafu „3 domy a 3 studně“, platilo by v této mapě,  $|U| = 6$ ,  $|H| = 9$ , tj.  $|W| = 5$ . Každá oblast je opět omezena alespoň třemi hranami. Každá kružnice v  $[U, H]$  má jistě sudou délku (pravidelně se v ní musí střídát „domy“ a „studně“), takže každá kružnice má délku nejméně 4. Odtud plyne

$$2 \cdot 9 \geq 4 \cdot |W|,$$

tj.  $|W| < 5$ , což je spor. •

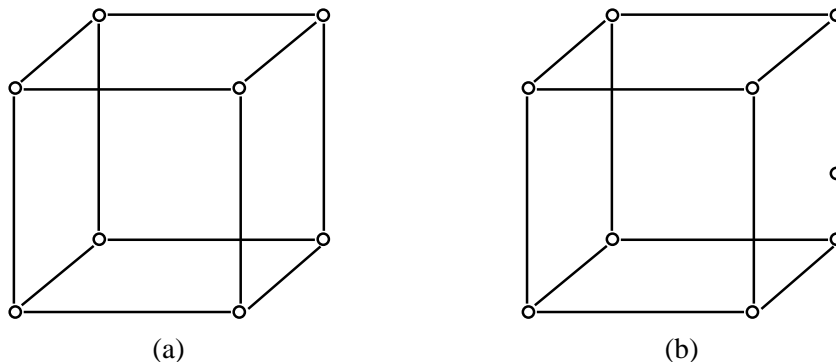
**7.11. Poznámka.** Jak dokázal v roce 1930 významný polský matematik K. Kuratowski, hrají grafy z věty 7.10 v charakterizaci planárních grafů zcela zásadní roli (viz věta 7.16). Proto se těmto grafům často také říká *Kuratowského grafy*. Pro jejich důležitost si tyto grafy ještě jednou nakresleme (obr. 7.30), i když jsme se s nimi již nejdnou setkali.



Obr. 7.30: Kuratowského grafy

**7.12. Definice.** Buď  $[U, H]$  libovolný graf,  $xy \in H$  jeho libovolná hrana. Buď  $z \notin U \cup H$  libovolný prvek. Položme  $U^* = U \cup \{z\}$ ,  $H^* = (H - \{xy\}) \cup \{xz, yz\}$ . Pak řekneme, že graf  $[U^*, H^*]$  vznikl z grafu  $[U, H]$  *půlením hrany*  $xy$ .

**7.13. Příklad.** Graf na obr. 7.31b vznikl z grafu na obr. 7.31a půlením jedné z hran.



Obr. 7.31: Půlení hrany

I z názoru je zřejmé, že při kreslení grafů se takové dva grafy, z nichž jeden vznikl z druhého postupným půlením hran, „chovají stejně“. Tím je motivována následující definice.

**7.14. Definice.** Řekneme, že grafy  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  jsou *homeomorfní*, jestliže existují konečné posloupnosti grafů

$$\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$$

$$\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_m$$

takové, že :

- (a)  $\mathcal{G}_n$  je izomorfní s  $\mathcal{H}_m$ ;
- (b) v každé z těchto posloupností vznikl následující graf z předcházejícího půlením některé hrany.

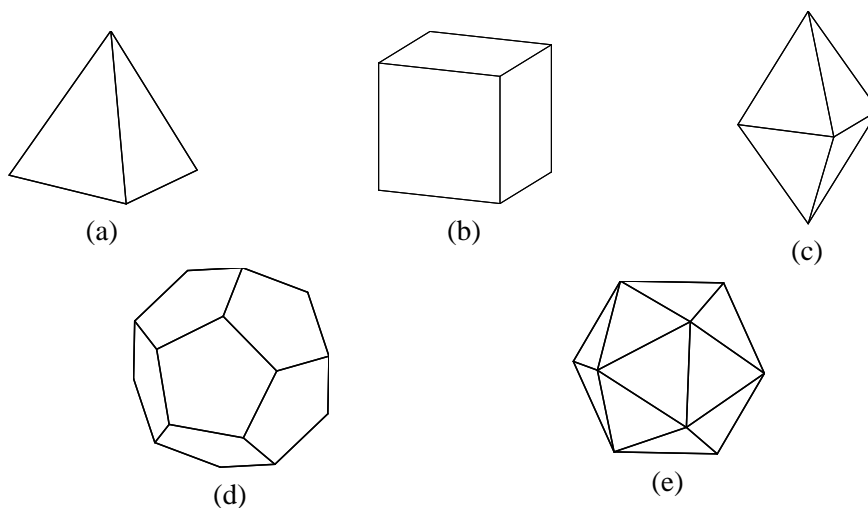
**7.15. Příklad.** Každé dvě kružnice jsou homeomorfní.

Nyní uvedeme bez důkazu již zmiňovanou Kuratowského větu.

**7.16. Věta.** Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podgraf homeomorfní s některým Kuratowského grafem (tj. s některým grafem z obr. 7.30).

**7.17. Poznámka.** Ukažme si, jak lze pomocí teorie rovinných grafů jednoduše zodpovědět jeden z klasických geometrických problémů.

Již staří Řekové znali pět typů pravidelných mnohostěnů (tzv. *Platónových těles*): (a) pravidelný čtyřstěn, (b) krychli, (c) pravidelný osmistěn, (d) pravidelný dvanáctistěn, (e) pravidelný dvacetistěn. (Viz obr. 7.32).



Obr. 7.32: Platónova tělesa

Neuměli však dokázat, zda existují ještě jiné pravidelné mnohostěny. Metodami teorie grafů nyní ukážeme, že žádné další pravidelné mnohostěny neexistují. K tomu však potřebujeme několik jednoduchých pojmů.

Omezená množina  $T \subseteq \mathbb{E}_3$  se nazývá *hvězdovitá*, když existuje bod  $s \in T$  takový, že každá polopřímka s počátečním bodem  $s$  má s hranicí množiny  $T$  právě jeden společný bod. Je zřejmé, že „běžná“ konvexní tělesa (koule, hranol, válec apod.) jsou hvězdovité množiny. Snadno však lze ukázat, že existují i nekonvexní hvězdovitá tělesa.

Z definice hvězdovité množiny okamžitě plyne, že její hranici lze zobrazit spojitou bijekcí na sféru. (Protože je  $T$  omezená, je částí nějaké koule v  $\mathbb{E}_3$ . Uvedená bijekce je realizována „promítáním“ hranice na příslušnou kulovou plochu ze středu  $s$ .)

Mnohostěn, který je zároveň hvězdovitou množinou, nazveme *hvězdovitým mnohostěnem*.

Jak dobře víme, hvězdovitý mnohostěn se nazývá *pravidelný*, jestliže všechny jeho stěny jsou navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky. Ke každému pravidelnému mnohostěnu existují přirozená čísla  $n, p$  taková, že všechny stěny jsou shodné pravidelné  $n$ -úhelníky a v každém jeho vrcholu se stýká  $p$  hran. Uspořádaná dvojice  $[n, p]$  se nazývá *Schläfliův symbol* daného pravidelného mnohostěnu.

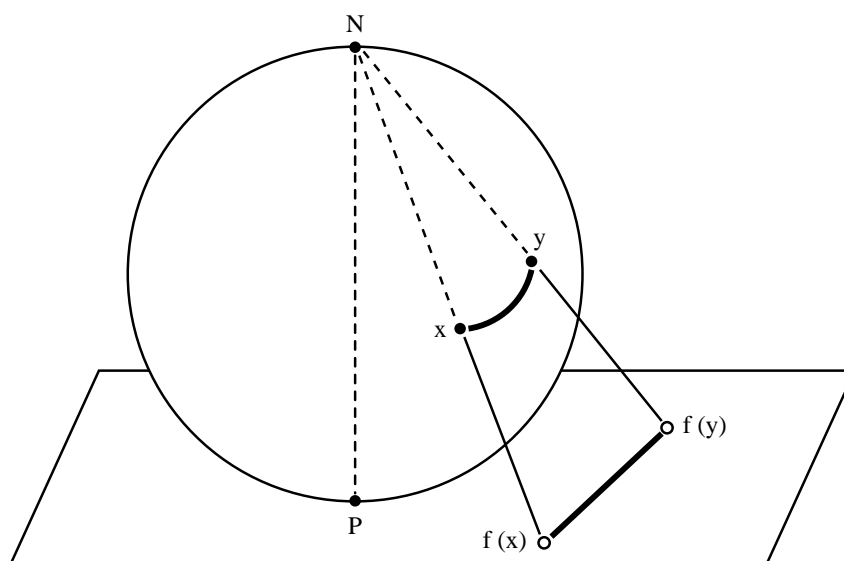
Schläfliův symbol Platónových těles je následující: pravidelný čtyřstěn má symbol [3, 3], krychle [4, 3], pravidelný osmistěn [3, 4], pravidelný dvanáctistěn [5, 3] a konečně pravidelný dvacetistěn [3, 5].

Jak jsme uvedli, lze hranici každé hvězdovité množiny zobrazit spojitou bijekcí na sféru. Zejména tedy lze takto na sféru zobrazit hranici (tj. povrch) každého pravidelného mnohostěnu. Uvedeným zobrazením povrchu mnohostěnu vznikne na sféře „mapa“. (Definice mapy na sféře je analogická definici 7.7 mapy v rovině.)

Užitím tzv. *stereografické projekce* však lze snadno dokázat, že pro mapy na sféře rovněž platí Eulerova věta 7.9.

(Připomeňme si, že stereografická projekce je zobrazení sféry s vyjmutým jedním bodem na rovinu, definované následovně:

Nechť se sféra  $S$  dotýká roviny  $\mathbb{E}_2$  v bodě  $P$ . Buď  $PN$  průměr sféry  $S$  (viz obr. 7.33). Buď  $x \in S$  libovolný bod různý od  $N$ . Bod  $f(x) \in \mathbb{E}_2$  je průsečík polopřímky  $Nx$  s rovinou  $\mathbb{E}_2$ . Je zřejmé, že stereografická projekce  $f$  je bijekcí množiny  $S - \{N\}$  na  $\mathbb{E}_2$  a zobrazení  $f$  i  $f^{-1}$  jsou spojitá. Nyní je také zřejmé, že při stereografické projekci se mapa na sféře zobrazí na mapu v rovině, přičemž se uzly zobrazí na uzly, hrany na hrany a oblasti na oblasti. Proto evidentně platí Eulerova věta i pro mapy na sféře.)



Obr. 7.33: Stereografická projekce

Buď nyní  $T$  pravidelný mnohostěn. Označme  $R$  počet jeho stěn,  $M$  počet hran,  $N$  počet vrcholů,  $n$  počet stran jedné stěny,  $p$  počet hran sbíhajících se v jednom vrcholu.

Protože každá hrana spojuje dva vrcholy a v každém vrcholu se sbíhá  $p$  hran, platí

$$Np = 2M. \quad (7.2.)$$

Protože každá stěna je omezena  $n$  hranami a každá hrana sousedí se dvěma stěnami, platí

$$Rn = 2M. \quad (7.3.)$$

Konečně, podle Eulerovy věty platí

$$N + R - M = 2. \quad (7.4.)$$

Rovnice 7.2., 7.3., 7.4. jsou rovnice o neznámých  $M, N, R$  s parametry  $n, p$  přičemž tyto parametry jsou přirozená čísla větší nebo rovna 3. Z 7.2. – 7.4. dostáváme

$$M = \frac{2np}{2p + 2n - np}, \quad N = \frac{4n}{2p + 2n - np}, \quad R = \frac{4p}{2p + 2n - np}. \quad (7.5.)$$

Protože všechna čísla  $M, N, P$  jsou kladná, musí platit  $2p + 2n - np > 0$ , tj.

$$(n - 2)(p - 2) < 4, \quad n \geq 3, p \geq 3.$$

Protože  $n - 2 > 0, p - 2 > 0$ , platí nutně  $(n - 2)(p - 2) \in \{1, 2, 3\}$ . Odtud dostáváme:

$$(a) \quad (n - 2)(p - 2) = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 3, p = 3,$$

$$(b) \quad (n - 2)(p - 2) = 2 \quad \Rightarrow \quad n = 3, p = 4 \text{ nebo } n = 4, p = 3,$$

$$(c) \quad (n - 2)(p - 2) = 3 \quad \Rightarrow \quad n = 3, p = 5 \text{ nebo } n = 5, p = 3.$$

Pravidelným mnohostěněm proto existuje nejvýše pět druhů, tj. právě pět druhů.

Hodnoty  $M, N, R, n, p$  těchto pravidelných mnohostěněm udává tabulka 2.4.

### Cvičení

1. Podle Wagnerovy věty 7.6 lze každý planární graf namalovat bez protínání hran, jimiž jsou úsečky. Namalujte tak Kuratowského grafy, z nichž je odebrána jedna hrana.

	$R$	$M$	$N$	$n$	$p$
Pravidelný čtyřstěn	4	6	4	3	3
Krychle	6	12	8	4	3
Pravidelný osmistěn	8	12	6	3	4
Pravidelný dvanáctistěn	12	30	20	5	3
Pravidelný dvacetistěn	20	30	12	3	5

Tabulka 2.4: Tabulka hodnot  $R$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $n$ ,  $p$  pro Platónova tělesa

## 8 Barvení grafů

Nejprve si na dvou jednoduchých problémech ilustrujme důvody, které vedly k problematice „barvení“ grafů.

**8.1. Problém.** Mějme danu množinu  $L$  různých druhů léků. Přitom je známo, které dvojice různých léků se pacientům nesmějí podávat současně. Na množině  $L$  chceme definovat rozklad tak, že léky ležící v jedné třídě rozkladu se současně podávat mohou. (Takový rozklad jistě existuje – například rozklad na jednoprvkové třídy.) Náš problém nyní zní: *Jaký je minimální počet tříd takového rozkladu?*

Přeformulujme si problém následovně: Bud'  $[L, H]$  graf, v němž pro  $x, y \in L$  platí  $xy \in H$  právě tehdy, když se léky  $x, y$  nesmějí podávat současně. Nyní si představme, že uzly grafu  $[L, H]$  obarvíme barvami (modře, červeně atd.) tak, že žádné dva sousední uzly nebudou obarveny stejnou barvou.

Problém 8.1 nyní můžeme přeformulovat takto: *Jaký minimální počet barev k výše uvedenému obarvení potřebujeme?*

**8.2. Problém.** Je dána množina  $V$  rádiových vysílacích stanic a každá stanice  $x \in V$  má určenu množinu  $V_x \subseteq V$  stanic, s nimiž má udržovat spojení. Ptáme se, jaký je minimální možný počet různých frekvencí, které musí být k dispozici, chceme-li zajistit, aby každá stanice  $x \in V$  udržovala s každou ze stanic z množiny  $V_x$  spojení na jiné frekvenci?

Grafová formulace je opět jednoduchá. Utvořme graf, v němž  $V$  je množina uzlů a dva uzly jsou spojeny hranou právě tehdy, když příslušné stanice mají udržovat spojení. Hledáme minimální počet barev nutný k takovému obarvení hran tohoto grafu, že každé dvě hrany, které mají společný uzel, jsou obarveny různě.

Před uvedením základních výsledků o barvení grafů uzavřeme, podobně jako v paragrafu 7, následující dohodu.



**8.3. Dohoda.** V celém paragrafu 8 slovo „graf“ značí „konečný graf“.

**8.4. Definice.** Bud'  $[U, H]$  graf. Zobrazení  $f: U \rightarrow \mathbb{N}$  nazveme *obarvení uzlů*, jestliže pro každé dva sousední uzly  $x, y \in U$  platí  $f(x) \neq f(y)$  (tj.  $xy \in H \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ ). Řekneme, že graf  $[U, H]$  je *uzlově  $k$ -chromatický*, existuje-li obarvení  $f$  uzlů takové, že  $|f(U)| \leq k$ .  
*Uzlové chromatické číslo*  $\chi(\mathcal{G})$  grafu  $\mathcal{G}$  je nejmenší číslo  $k \in \mathbb{N}_0$  takové, že  $\mathcal{G}$  je uzlově  $k$ -chromatický.

Z definice je zřejmé, že každý graf má jednoznačně určené uzlové chromatické číslo. Jeho nalezení v konkrétních případech však může být velmi obtížné. Důkaz následujícího tvrzení je však jednoduchý, a proto ho přenecháme čtenáři.

**8.5. Věta.** Bud'  $\mathcal{G} = [U, H]$  graf. Pak platí:

- (a)  $\chi(\mathcal{G}) = 1 \iff H = \emptyset$ .
- (b) Je-li  $\mathcal{G}$  strom a  $|H| \geq 1$ , pak  $\chi(\mathcal{G}) = 2$ .

Grafy s uzlovým chromatickým číslem 2 hrají v řadě aplikací důležitou roli. Jak nyní uvedeme, je charakteristika těchto grafů velmi jednoduchá.

**8.6. Věta.** Bud'  $\mathcal{G} = [U, H]$  graf,  $H \neq \emptyset$ . Pak  $\chi(\mathcal{G}) = 2$  právě tehdy, když neobsahuje kružnici liché délky.

**Důkaz. I.** Nutnost podmínky je zřejmá, neboť k obarvení kružnice liché délky je nezbytné užít tří barev.

**II.** Necht'  $\mathcal{G} = [U, H]$  neobsahuje kružnici liché délky. Dostatečnost této podmínky budeme dokazovat indukcí vzhledem k počtu kružnic v  $\mathcal{G}$ . Uvědomme si přitom, že důkaz stačí provést pro souvislé grafy, neboť obarvení uzlů v jednotlivých komponentách můžeme provádět samostatně a nezávisle na sobě.

Neobsahuje-li  $\mathcal{G}$  žádnou kružnici, je  $\mathcal{G}$  strom a podle věty 8.5(b) platí  $\chi(\mathcal{G}) = 2$ . Necht' tedy tvrzení platí pro každý souvislý graf obsahující nejvýše  $n$  kružnic sudé délky. Bud' nyní  $\mathcal{G} = [U, H]$  graf obsahující  $n + 1$  kružnic sudé délky. Bud'  $C$  libovolná kružnice v  $\mathcal{G}$ . Zvolme v  $C$  libovolně hranu  $xy$ . Graf  $\mathcal{G}^* = [U, H - \{xy\}]$  obsahuje nejvýše  $n$  kružnic, takže podle předpokladu platí  $\chi(\mathcal{G}^*) = 2$ . Odtud plyne existence obarvení uzlů  $f: U \rightarrow \{1, 2\}$  grafu  $\mathcal{G}^*$ . Kružnice  $C$  bez hrany  $xy$  je had, v němž se obarvení uzlů pravidelně střídá. Protože tento had obsahuje sudý počet uzlů, je  $f(x) \neq f(y)$ . To však znamená, že  $f$  je současně obarvením grafu  $\mathcal{G}$ , čímž je důkaz hotov. ●

**8.7. Definice.** Necht'  $\mathcal{G} = [U, H]$  je graf a necht' lze množinu  $U$  rozložit na dvě neprázdné disjunkttní podmnožiny  $U_1, U_2$  tak, že každá hrana má jeden uzel v  $U_1$  a druhý uzel v  $U_2$ . Pak se graf  $\mathcal{G}$  nazývá *bipartitní*. Uvedený bipartitní graf se obvykle zapisuje ve tvaru  $[U_1, U_2, H]$ . Bipartitní graf  $[U, V, H]$  se nazývá *úplný*, když pro každé dva uzly  $x \in U, y \in V$  platí  $xy \in H$ . Je-li  $|U| = m, |V| = n$ , značí se úplný bipartitní graf  $[U, V, H]$  symbolem  $K_{m,n}$ .

Tak například Kuratowského graf „3 domy a 3 studně“ na obr. 7.30b je graf  $K_{3,3}$ . Pro bipartitní graf  $\mathcal{G}$  s neprázdnou množinou hran zřejmě platí  $\chi(\mathcal{G}) = 2$ .

Bipartitní grafy jsou studovány zejména v souvislosti s tzv. *párováním* v grafech, což je jedna z nejzávažnějších částí kombinatoriky a teorie grafů.

Zformulujme si nejprve jeden z klasických kombinatorických problémů, tzv. *problém o svatbách*.

**8.8. Příklad.** Je dána množina  $H$  hochů a množina  $D$  dívek,  $|D| \geq |H|$ . Každý hoch zná alespoň jednu dívku. Jaká je nutná a dostatečná podmínka toho, aby se každý hoch mohl oženit s dívkou, kterou zná?

Nalezení jednoduché nutné podmínky je snadné: kdyby existovala nějaká  $k$ -tice chlapců ( $k \leq |H|$ ) taková, že všech dívek, které by znal alespoň jeden chlapec z této  $k$ -tice, by bylo méně než  $k$ , pak by jistě nebylo možné požadované svatby uskutečnit.

Jak dokázal v roce 1935 Ph. Hall, je tato jednoduchá nutná podmínka současně také podmínkou dostatečnou. *Hallova věta* je jedním z nejdůležitějších kombinatorických tvrzení.

**8.9. Věta.** (Hallova věta.) *Bud' dána množina  $S_i, i = 1, \dots, n$ , neprázdných konečných množin. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

- (a) *Existuje prosté zobrazení  $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \bigcup_{i=1}^n S_i$  takové, že  $f(i) \in S_i$  pro každé  $i = 1, \dots, n$ .*
- (b) *Pro každou podmnožinu  $\emptyset \neq A \subseteq \{1, \dots, n\}$  platí  $|A| \leq \left| \bigcup_{i \in A} S_i \right|$ .*

Grafová interpretace Hallovy věty je jednoduchá. Bud' dán bipartitní graf  $[U, V, H]$ ,  $|U| \leq |V|$ . Pro každý uzel  $x \in U$  označme  $V_x = \{y \in V; xy \in H\}$ .

**8.10. Definice.** *Párováním* v daném bipartitním grafu  $[U, V, H]$  nazveme každý jeho podgraf  $[U, V^*, H^*]$ , který je pravidelným grafem 1. stupně (tj. z každého uzlu vychází právě jedna hrana).

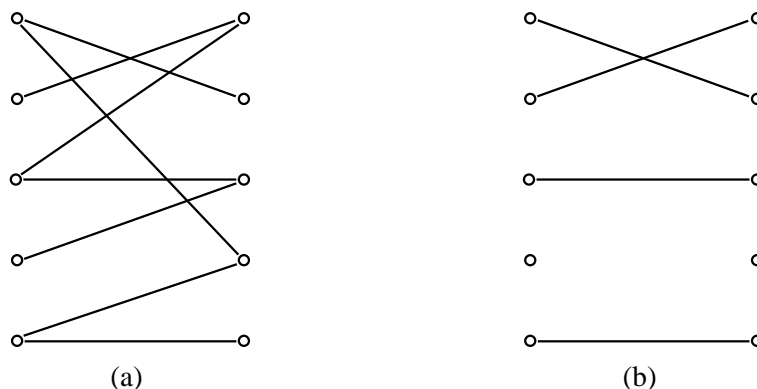
Z Hallovy věty okamžitě plyne, že v bipartitním grafu  $[U, V, H]$  existuje alespoň jedno párování  $[U, V^*, H^*]$  právě tehdy, když pro každou podmnožinu  $\emptyset \neq U_1 \subseteq U$  platí

$$|U_1| \leq \sum_{x \in U_1} |V_x|. \quad (8.1.)$$

Párování v bipartitním grafu se nazývá *úplné*, je-li faktorem daného grafu (tj.  $V^* = V$ ). Je zřejmé, že v  $[U, V, H]$  úplné párování existuje právě tehdy, když kromě podmínky 8.1. navíc platí  $|U| = |V|$ .

Jestliže v bipartitním grafu  $[U, V, H]$  párování neexistuje, je přirozené hledat maximální (vzhledem k počtu hran) podgraf v  $[U, V, H]$ , který je pravidelným grafem 1. stupně. Takové podgrafy mají řadu aplikací v operačním výzkumu, v lineárním programování apod. Nejběžnější z algoritmů pro hledání tohoto maximálního podgrafu je tzv. *maďarský algoritmus*.

Na obr. 8.34a je bipartitní graf, v němž neexistuje párování (je to faktor grafu  $K_{5,5}$ ). Na obr. 8.34b je jeden z maximálních pravidelných podgrafů 1. stupně.



Obr. 8.34: Maximální pravidelný podgraf 1. stupně v daném grafu

Nyní se vraťme k problematice barvení uzlů v grafu.

Jakkoliv je obecně určení čísla  $\chi(\mathcal{G})$  obtížné, je jednoduchá jeho následující majorizace.

**8.11. Věta.** *Bud'  $\mathcal{G} = [U, H]$  graf. Označme  $\varrho = \max \{st x; x \in U\}$ . Pak platí*

$$\chi(\mathcal{G}) \leq \varrho + 1.$$

**Důkaz.** Indukcí vzhledem k číslu  $|U|$ . Pro  $|U| = 1$  je tvrzení zřejmé. Necht' tedy tvrzení věty platí pro všechny grafy  $[U, H]$  takové, že  $|U| \leq n$ . Bud' nyní  $\mathcal{G} = [U, H]$  graf,  $|U| = n + 1$ . Označme  $\mathcal{G}^*$  graf, který vznikne z grafu  $\mathcal{G}$  odečtením některého uzlu  $x$  a všech hran s tímto

uzlem incidentních. Podle předpokladu platí  $\chi(\mathcal{G}^*) \leq \varrho + 1$ , takže existuje obarvení uzlů grafu  $\mathcal{G}^*$   $f: (U - \{x\}) \rightarrow \{1, \dots, \varrho + 1\}$ . V grafu  $\mathcal{G}$  však s uzlem  $x$  sousedí nejvýše  $\varrho$  uzlů, takže uzly v  $\mathcal{G}$  můžeme obarvit následovně:

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{pro } t \neq x, \\ p & \text{pro } t = x, \end{cases}$$

kde  $p \in \{1, \dots, \varrho + 1\}$  je takový prvek, že  $p \neq f(u)$  pro všechny uzly  $u \in U$ ,  $tu \in H$ . Pak je  $g$  obarvení daného grafu nejvýše  $\varrho + 1$  barvami. •

Nyní se budeme zabývat barvením hran.

**8.12. Definice.** Buď  $[U, H]$  graf. Zobrazení  $f: H \rightarrow \mathbb{N}$  nazveme *obarvením hran*, jestliže pro každé dvě hrany  $h_1, h_2 \in H$ ,  $h_1 \neq h_2$ , takové, že  $h_1 \cap h_2 \neq \emptyset$ , platí  $f(h_1) \neq f(h_2)$ . Řekneme, že graf  $[U, H]$  je *hranově  $k$ -chromatický*, když existuje obarvení  $f$  hran takové, že  $|f(H)| \leq k$ . *Hranové chromatické číslo*  $\chi_h(\mathcal{G})$  grafu  $\mathcal{G}$  je nejmenší číslo  $k \in \mathbb{N}_0$  takové, že  $\mathcal{G}$  je hranově  $k$ -chromatický.

Ve větě 8.11 jsme uvedli horní odhad uzlového chromatického čísla. Má-li symbol  $\varrho$  též smysl jako ve větě 8.11, je z definice okamžitě zřejmé, že pro hranové chromatické číslo platí  $\chi_h(\mathcal{G}) \geq \varrho$ . Jak v roce 1964 dokázal ruský matematik G. V. Vizing, platí dokonce následující věta, kterou uvedeme bez důkazu.

**8.13. Věta.** Pro libovolný graf  $\mathcal{G}$  platí  $\varrho \leq \chi_h(\mathcal{G}) \leq \varrho + 1$ .

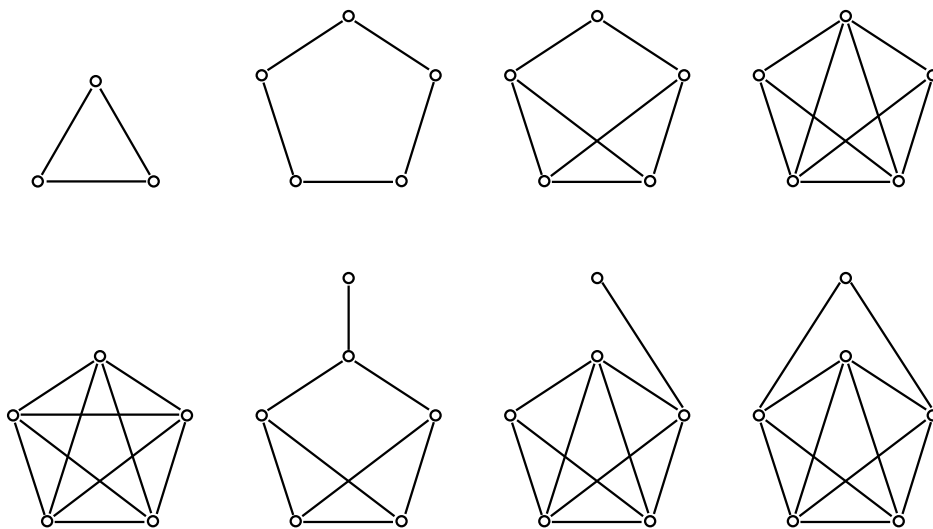
**8.14. Poznámka.** Hranové chromatické číslo daného grafu tedy může nabýt jen dvou hodnot:  $\varrho$  nebo  $\varrho + 1$ . Řekneme, že graf  $\mathcal{G}$  patří do *první*, respektive do *druhé třídy*, je-li  $\chi_h(\mathcal{G}) = \varrho$ , respektive  $\chi_h(\mathcal{G}) = \varrho + 1$ .

Je zřejmé, že například každá kružnice sudé délky patří do první třídy, každá kružnice liché délky do druhé třídy. Dodnes však není známa charakterizace příslušnosti grafů k těmto třídám. Přitom není zastoupení grafů v těchto třídách ani zdaleka rovnoměrné. Jak v roce 1977 dokázali P. Erdős a R. J. Wilson, platí následující tvrzení:

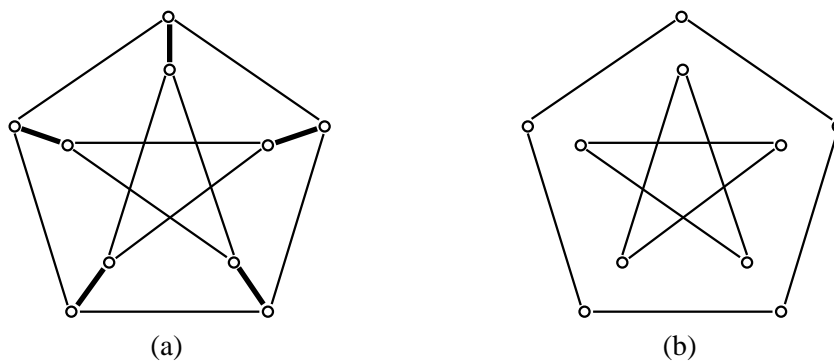
*Označíme-li  $p_i(n)$  počet grafů na  $n$  uzlech patřících do  $i$ -té třídy, platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_2(n)}{p_1(n)} = 0.$$

Podle [10] existuje například 143 souvislých grafů s nejvýše šesti uzly a pouze 8 z nich patří do druhé třídy. Těchto 8 grafů je na obr. 8.35.



Obr. 8.35: Grafy druhé třídy na nejvýše šesti uzlech



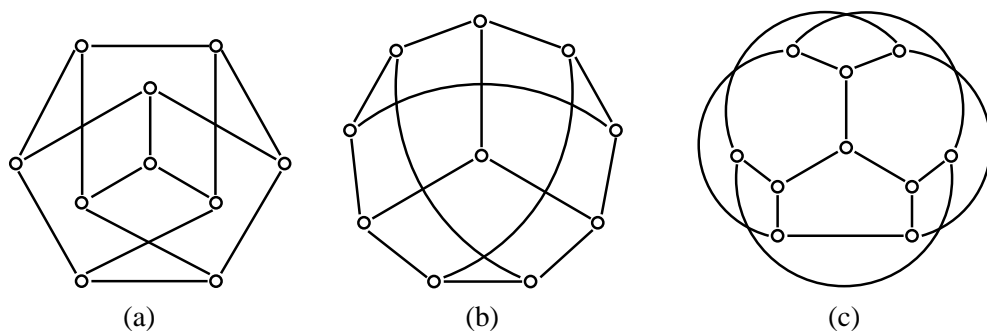
Obr. 8.36: Petersenův graf a jeho kvadratický faktor

**8.15. Příklad.** Důležitým grafem patřícím do druhé třídy je tzv. *Petersenův graf* (obr. 8.36a). J. Petersen uveřejnil v roce 1891 práci v níž podrobně popsal vlastnosti pravidelných grafů; především pak studoval problém existence pravidelných faktorů v těchto grafech.

Jak je okamžitě zřejmé, je Petersenův graf pravidelným grafem 3. stupně. Obsahuje pravidelný faktor 1. stupně (tzv. *lineární faktor*) – hrany tohoto faktoru jsou na obr. 8.36a vyznačeny tučně. Petersenův graf obsahuje i pravidelný faktor 2. stupně (tj. *kvadratický faktor*); tento faktor je na obr. 8.36b.

Tento kvadratický faktor však není souvislý. Ponecháme čtenáři, aby si promyslel, že souvislý kvadratický faktor (tj. hamiltonovská kružnice) v Petersenově grafu neexistuje. Petersenův graf proto není hamiltonovský. Lehce však lze ukázat, že je polohamiltonovský (viz poznámka 6.15).

Na dokreslení toho, co jsme o znázorňování grafů uvedli v poznámce 7.3, necht' si čtenář promyslí, že všechny tři grafy na obr. 8.37 jsou izomorfní s Petersenovým grafem.



Obr. 8.37: Různá nakreslení Petersenova grafu

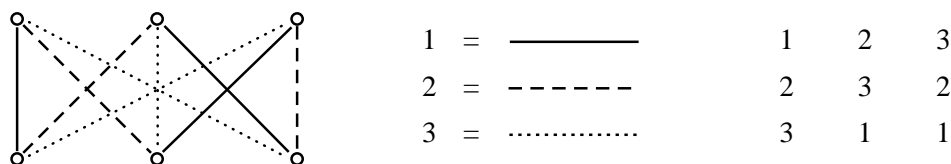
**8.16. Poznámka.** Hranové obarvení grafů překvapivě souvisí s latinskými čtverci, o nichž jsme hovořili v 1. kapitole, paragraf 10.

Lehce lze dokázat, že úplné bipartitní grafy patří do první třídy. Evidentně platí

$$\chi_h(K_{m,n}) = \varrho = \max(m, n).$$

Buď  $n \in \mathbb{N}$  libovolné. Pak platí  $\chi_h(K_{n,n}) = n$ . Označme  $K_{n,n} = [U, V, H]$ ,  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , tj.  $H = \{u_i v_j; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n\}$ . Buď  $f: H \rightarrow \{1, \dots, n\}$  obarvení hran. Definujme čtvercovou matici  $(a_{ij})_{i,j=1}^n$  takto:  $a_{ij} = f(u_i v_j)$ . Pak je zřejmé, že tato matice je latinským čtvercem řádu  $n$ .

Na obr. 8.38 je uvedené přiřazení provedeno pro obarvení hran grafu  $K_{3,3}$ .

Obr. 8.38: Obarvení grafu  $K_{3,3}$  a příslušný latinský čtverec

Hranové obarvení grafu  $K_{n,n}$   $n$  barvami však současně evidentním způsobem určuje  $n$  různých úplných párování v  $K_{n,n}$  (Každá barva určuje jedno takové párování). Protože počet úplných párování v  $K_{n,n}$  lze algebraickými metodami vypočítat (tento počet udává tzv. *permanente* matice sousednosti daného grafu — viz cvičení), lze odtud rovněž odvodit, že latinských čtverců řádu  $n$  je alespoň

$$n! \cdot (n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \dots \cdot 1!$$

Například latinských čtverců 6. řádu je alespoň  $6! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! = 24\,883\,220$ .

**8.17. Poznámka.** S problematikou barvení grafů úzce souvisí jeden z neznámějších matematických problémů 20. století, tzv. *problém čtyř barev*. Formulace tohoto problému je jednoduchá: Mějme v rovině zeměpisnou mapu, na níž je několik států. Chceme, aby mapa byla vybarvena tak, jak je to obvyklé, tj. aby každý stát byl vybarven nějakou barvou tak, že žádné dva sousední státy nejsou obarveny stejně (viz například obrázek 8.39).

Naším úkolem je zjistit, jaký počet barev nezbytně potřebujeme, abychom mohli takto vybarvit každou zeměpisnou mapu.

Aby formulace problému byla regulérní, je nutno upřesnit dvě skutečnosti:

(a) předpokládáme, že území každého státu je „souvislé“ (což v praxi není vždy splněno – viz například USA (Aljaška));

(b) dva státy považujeme za sousední, když mají společnou hraniční „čáru“ (tj. nedotýkají se jen v izolovaných bodech). Lehce lze ukázat, že je nutno mít k dispozici alespoň čtyři barvy (obr. 8.40).

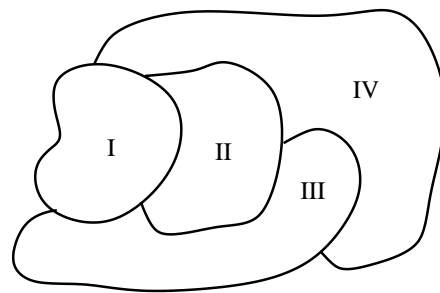
Ve všech konkrétních příkladech se vždy podařilo najít obarvení čtyřmi barvami. Například na obrázku 8.41 je takto vybarvena mapa USA.

Nalezení důkazu, že tomu tak je zákonitě, se však ukázalo být jedním z nejobtížnějších problémů moderní matematiky.

Přeformulujme si nyní uvedený problém do grafové terminologie. Mějme danu nějakou zeměpisnou mapu (splňující výše uvedené podmínky). Nyní zkonstruujeme graf  $\mathcal{G} = [U, H]$  následovně. Na území každého státu zvolme jeden bod; tyto body tvoří množinu  $U$ . Dva uzly spojíme hranou právě tehdy, když příslušné státy sousedí. Takto získaný graf je jistě rovinný, neboť hrany můžeme kreslit tak, aby neprocházely územím žádného dalšího státu (hranici dvou států můžeme „překročit“ v hraniční čáře). Tak například státům na obr. 8.40 odpovídá graf  $K_4$ .



Obr. 8.39: Ukázka politické mapy



Obr. 8.40:



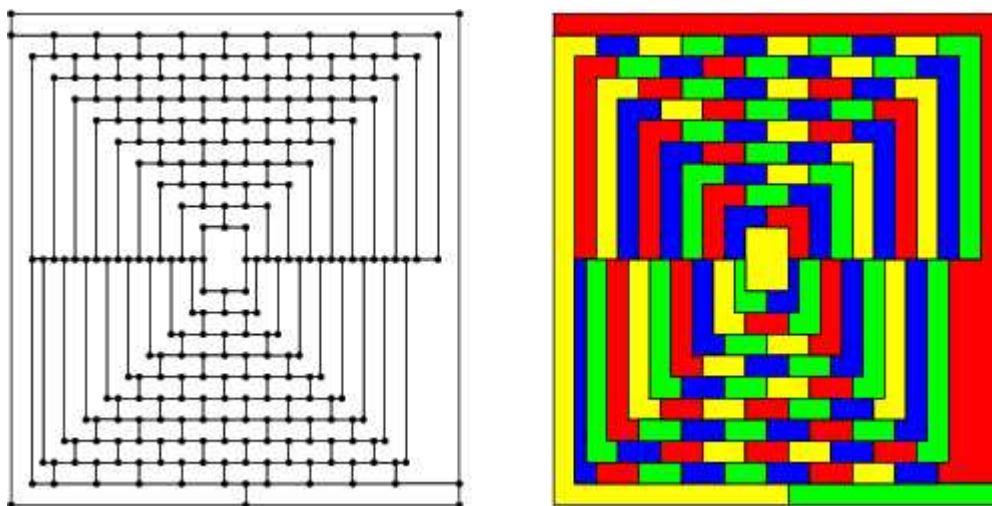


Obr. 8.41: Vybarvení mapy USA čtyřmi barvami

Obarvení zeměpisné mapy je nyní ekvivalentní s obarvením uzlů takto sestrojeného rovinného grafu. V grafové terminologii lze tedy problém čtyř barev přeformulovat takto:

*Platí pro každý rovinný graf  $G$  nerovnost  $\chi(G) \leq 4$ ?*

To, že i relativně komplikované grafy — viz například obrázek 8.42 — uvedenou podmínku splňují, samozřejmě ještě nic neznamená.



Obr. 8.42: Vybarvení rovinného grafu čtyřmi barvami

Historie toho problému sahá až do let 1840–1850, kdy se tímto problémem zabývali A. F. Möbius, A. de Morgan a další. Mnohokrát byl uvedený problém zdánlivě „vyřešen“, vždy se

však ukázalo, že v důkazu byla nějaká chyba. V roce 1890 dokázal P. J. Heawood (právě při rozboru jednoho z chybných důkazů), že *pro každý rovinný graf  $\mathcal{G}$  platí  $\chi(\mathcal{G}) \leq 5$  (tzv. věta o pěti barvách)*. Definitivně problém čtyř barev vyřešili (pozitivně) až v roce 1976 K. Appel a W. Haken z univerzity v Illinois (USA), když dokázali, že vskutku pro každý rovinný graf  $\mathcal{G}$  platí  $\chi(\mathcal{G}) \leq 4$ .

Důkaz tohoto tvrzení převedli na prověření vlastností téměř dvou tisíc speciálních grafů. Samotné prověření pak provedli na počítači, který na to spotřeboval 1200 hodin strojového času.

I tyto údaje demonstrují obtížnost celého problému.

Podrobněji o historii tohoto problému viz například v knize [11].

### Cvičení

1. *Permanent matice*  $A = (a_{ij})$  typu  $m/n$ ,  $m \leq n$  je definován jako

$$\text{per}(A) = \sum a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{mi_m},$$

kde se sčítá přes všechny variace  $m$  prvků z množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Vypočtěte permanent matic:

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c)  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

## 9 Zobecnění pojmu graf

Jak jsme uvedli již v paragrafu 1, není grafová terminologie v literatuře zdaleka jednotná. Ustálený význam nemá ani pojem graf. Nyní uvedeme definici tzv. „obecného grafu“, která zahrnuje většinu běžně studovaných grafů jako speciální případy.

**9.1. Definice.** *Obecným grafem nazýváme trojici  $[U, H, \varphi]$ , kde  $U, H$  jsou disjunktní množiny,  $U \neq \emptyset$  a  $\varphi: H \rightarrow U^2 \cup U \cup \mathcal{P}_2(U)$ .*

Prvky množiny  $U$  nazýváme *uzly*, prvky množiny  $H$  *hrany* a  $\varphi$  je tzv. *incidenční zobrazení*. Je-li  $\varphi(h) \in U^2$ , nazývá se  $h$  *orientovaná hrana*, je-li  $\varphi(h) \in U \cup \mathcal{P}_2(U)$ , je  $h$  *neorientovaná hrana*.

Orientovaná hrana  $h$  se nazývá *orientovaná smyčka*, je-li  $\varphi(h) = [x, x]$  pro nějaký uzel  $x \in U$ . Neorientovaná hrana se nazývá *smyčka*, je-li  $\varphi(h) \in U$ .

Orientované hrany  $h, k$  se nazývají *souhlasně rovnoběžné*, je-li  $\varphi(h) = \varphi(k)$  a *nesouhlasně rovnoběžné*, je-li  $\varphi(h) = [x, y] \neq [y, x] = \varphi(k)$ .

Neorientované hrany  $h, k$  se nazývají *rovnoběžné*, je-li  $\varphi(h) = \varphi(k)$ .

*Násobností hrany  $h \in H$  nazýváme číslo  $|\{k \in H; \varphi(k) = \varphi(h)\}|$ .*

V obecném grafu tak mohou existovat současně hrany orientované i neorientované, mezi dvěma uzly nemusí existovat žádná hrana, ale může jich existovat i více než jedna atd. Možných „typů“ grafů tak existuje celá řada. Nejdůležitější rozdělení grafů obdržíme podle toho, zda v nich existují vícenásobné hrany či nikoliv a podle toho, zda jsou všechny hrany orientované respektive všechny neorientované.

**9.2. Definice.** Buď  $\mathcal{G} = [U, H, \varphi]$  obecný graf. Existuje-li alespoň jedna hrana  $h \in H$  s násobností větší než jedna, nazývá se  $\mathcal{G}$  *multigraf* (nebo též *pseudograf*). Je-li násobnost všech hran rovna jedné, nazývá se  $\mathcal{G}$  *prostý graf*.

Obsahuje-li  $\mathcal{G}$  pouze neorientované hrany, nazývá se *neorientovaný graf*. Jsou-li všechny hrany v  $\mathcal{G}$  orientované, je  $\mathcal{G}$  tzv. *orientovaný graf*.

Řekneme, že  $\mathcal{G}$  je *smíšený graf*, není-li ani orientovaný ani neorientovaný. (Ve smíšeném grafu tedy existuje alespoň jedna orientovaná a alespoň jedna neorientovaná hrana.)

**9.3. Poznámka.** Formální popis prostého grafu můžeme snadno zjednodušit. Incidenční zobrazení je podstatné u multigrafů. V prostém grafu můžeme přímo předpokládat, že  $H \subseteq U^2 \cup U \cup \mathcal{P}_2(U)$  a  $\varphi$  je pak identické zobrazení (tj.  $\varphi(h) = h$  pro každou hranu  $h \in H$ ). (Tzn., že prostý graf můžeme definovat jako dvojici  $[U, H]$ , kde  $U \neq \emptyset$ ,  $H \subseteq U^2 \cup U \cup \mathcal{P}_2(U)$ ,  $U \cap H = \emptyset$ .)

Orientovaný i neorientovaný graf přitom může a nemusí být prostý.

Důležitou charakteristikou grafu je v mnoha situacích skutečnost, zda daný graf obsahuje smyčky či nikoliv.

Prostý neorientovaný graf bez smyček se nazývá *obyčejný graf*. Prostý orientovaný graf bez smyček nazýváme *obyčejný orientovaný graf*.

**9.4. Poznámka.** V paragrafech 2 – 8 jsme tedy „grafem“ rozuměli obyčejný graf.

Kromě obyčejných grafů, které jsme dosud studovali, tvoří druhou nejčastěji studovanou třídu grafů prosté orientované grafy, respektive obyčejné orientované grafy.

Místo prostý orientovaný graf, respektive obyčejný orientovaný graf, se často stručně říká jen „orientovaný graf“.

Uvažme, že když  $[U, H]$  je prostý orientovaný graf, je  $H \subseteq U^2$ , tj.  $H$  je binární relace na  $U$ . Tento graf je pak obyčejným orientovaným grafem právě tehdy, když je relace  $H$  areflexivní.

Prosté orientované grafy tedy nejsou nic jiného než množiny s binární relací. Všechno, co známe o binárních relacích, proto můžeme na tyto grafy přenést. Mohlo by se proto zdát, že studium orientovaných grafů jako samostatných objektů je zbytečné. Z tradičních důvodů a vzhledem k specifičnosti metod teorie grafů se však orientované grafy intenzivně studují.

**9.5. Poznámka.** Prostý orientovaný graf je podle výše uvedeného dvojice  $[U, H]$ , kde  $U \neq \emptyset$ ,  $H \subseteq U^2$ . V teorii grafů jsou však tyto grafy obvykle zadávány jiným způsobem. Ke každému uzlu  $x \in U$  je zadána množina  $\Gamma(x)$  těch uzlů, do nichž z  $x$  vede orientovaná hrana, kterou nazýváme *šipkou*.

**9.6. Definice.** Buď  $U \neq \emptyset$  libovolná množina,  $\Gamma : U \rightarrow \mathcal{P}(U)$  buď libovolné zobrazení. Pak se dvojice  $[U, \Gamma]$  nazývá *orientovaný graf*.  $U$  je *množina uzlů*. Z uzlu  $x$  vede do uzlu  $y$  orientovaná hrana  $\overrightarrow{xy}$  právě tehdy, když  $y \in \Gamma(x)$ .

**9.7. Poznámka.** Z výše uvedeného je zřejmé, co to znamená, že orientovaný graf  $[U, \Gamma]$  je reflexivní, symetrický, antisymetrický, tranzitivní a podobně.

Řadu pojmů lze z obyčejných grafů přenést na neorientované grafy prakticky beze změny – například pojem „podgraf“, „izomorfismus grafů“ atd. U některých pojmů dochází k jistým modifikacím. Tak například roli stupně uzlu  $x$  hrají dva tzv. *polostupně*  $|\Gamma(x)|$  a  $|\Gamma^{-1}(x)|$  (tj. počty hran z uzlu  $x$  vycházejících a v uzlu  $x$  končících).

Roli kružnice v orientovaných grafech hraje tzv. *cyklus*. *Acyklický graf* je orientovaný graf neobsahující jako podgraf žádný cyklus.

Důležitou třídou orientovaných grafů jsou tzv. *turnaje*. Areflexivní orientovaný graf se nazývá *turnaj*, jestliže pro každé dva různé uzly  $x, y$  platí, že jsou spojeny hranou  $\overrightarrow{xy}$ , respektive  $\overrightarrow{yx}$ .

Přes veškeré odlišnosti mezi jednotlivými typy grafů však lze říci, že pro toho, kdo zvládne teorii pro jeden z typů, je snadné pochopení pojmů i pro zbývající typy.

V aplikacích se pochopitelně užívá různých typů grafů, podle toho, jaký typ je pro popis zadané situace nejvýhodnější.

Zobecnění pojmu graf je však možno provést i jiným způsobem, než jak jsme to provedli v definici 9.1. Někdy je výhodné a potřebné studovat „grafy“, jejichž hrany spojují více než dva uzly. Takovým grafům se říká obvykle *hypergrafy*. (V posledních letech se v české literatuře ujímá pro hypergrafy termín *společnost*, místo o hranách hypergrafu se pak hovoří o *týmech* společnosti.)

Je zřejmé, že pojem hypergrafu úzce souvisí například s blokovými schématy, o nichž jsme hovořili v 1. kapitole, paragrafu 10.

**9.8. Definice.** *Hypergraf* je trojice  $[U, H, \varphi]$ , kde  $U \neq \emptyset$  je množina uzlů,  $H$  je množina hran a  $\varphi: H \rightarrow (\mathcal{P}(U) - \{\emptyset\})$  je incidenční zobrazení.

**9.9. Poznámka.** Hypergraf je tedy — jednoduše řečeno — systém neprázdných podmnožin množiny uzlů. Některé množiny se přitom v tomto systému mohou opakovat.

Existuje-li číslo  $k$  takové, že pro každou hranu  $h \in H$  platí  $|\varphi(h)| = k$ , říkáme, že hypergraf je *uniformní* (respektive *k-uniformní*).

Je zřejmé, že 2-uniformní hypergraf je totéž jako neorientovaný graf bez smyček.

Je-li incidenční zobrazení prosté (tj. „násobnost“ každé hrany je rovna jedné), nazývá se hypergraf *prostý*. Podobně jako u prostého grafu můžeme předpokládat, že prostý hypergraf je dvojice  $[U, H]$ , kde  $H \subseteq (\mathcal{P}(U) - \{\emptyset\})$ . Přenesení řady pojmů z grafů na hypergrafy je jednoduché.

# **PŘÍLOHY**

$n!$									$n$							
								1	1							
								2	2							
								6	3							
								24	4							
								120	5							
								720	6							
							5	040	7							
							40	320	8							
							362	880	9							
							3	628	800	10						
							39	916	800	11						
							479	001	600	12						
							6	227	020	800	13					
							87	178	291	200	14					
							1	307	674	368	000	15				
												⋮				
							2	432	902	008	176	640	000	20		
														⋮		
							15	511	210	043	330	985	984	000	000	25

Tabulka 2.5: Tabulka hodnot  $n!$

$\binom{n}{k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n=0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	0	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
$\vdots$											

Tabulka 2.6: Pascalův trojúhelník

$p(n, k)$	$n=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k=1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
3	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8
4	0	0	0	1	1	2	3	5	6	9
5	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7
6	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5
7	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3
8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$\vdots$										

Tabulka 2.7: Počet  $p(n, k)$  rozkladů čísla  $n$  na  $k$  sčítanců



$n$	$p(n)$	$n$	$p(n)$	$n$	$p(n)$	$n$	$p(n)$
1	1	21	792	41	44 583	...	
2	2	22	1 002	42	53 174	70	4 087 968
3	3	23	1 255	43	63 261	...	
4	5	24	1 575	44	75 175	80	15 796 476
5	7	25	1 958	45	89 134	...	
6	11	26	2 436	46	105 558	90	56 634 173
7	15	27	3 010	47	124 754	...	
8	22	28	3 718	48	147 273	100	190 569 292
9	30	29	4 565	49	173 525	...	
10	42	30	5 604	50	204 226	110	607 163 746
11	56	31	6 842	51	239 943	...	
12	77	32	8 349	52	281 589	120	1 844 349 560
13	101	33	10 143	53	329 931	...	
14	135	34	12 310	54	386 155	125	3 163 127 352
15	176	35	14 833	55	451 276	...	
16	231	36	17 977	56	526 823	200	3 972 999 029 388
17	297	37	21 637	57	614 154		
18	385	38	26 015	58	715 220		
19	490	39	31 185	59	831 820		
20	627	40	37 338	60	966 467		

Tabulka 2.8: Počet  $p(n)$  rozkladů čísla  $n$ 

$s(n, k)$	$k = 0$	1	2	3	4	5	6
$n = 1$	0	1	0	0	0	0	0
2	0	-1	1	0	0	0	0
3	0	2	-3	1	0	0	0
4	0	-6	11	-6	1	0	0
5	0	24	-50	35	-10	1	0
6	0	-120	274	-225	85	-15	1
⋮							

Tabulka 2.9: Tabulka hodnot Stirlingových čísel prvního druhu

$S(n, k)$	$k = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n = 1$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	7	6	1	0	0	0	0	0	0
5	1	15	25	10	1	0	0	0	0	0
6	1	31	90	65	15	1	0	0	0	0
7	1	63	301	350	140	21	1	0	0	0
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1	0	0
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	0
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5580	750	45	1
⋮										

Tabulka 2.10: Tabulka hodnot Stirlingových čísel druhého druhu

$k$	$b_k$
2	0,166 67
4	0,033 33
6	0,023 81
8	0,033 33
10	0,075 76
12	0,253 11
14	1,166 67
16	7,092 16
18	54,971 18
20	529,124 24
22	6 192,123 19
24	86 580,253 11
26	1 425 517,166 67
28	27 298 231,067 82
30	601 580 873,900 64

Tabulka 2.11: Bernoulliova čísla

$n$	$t(n)$	$n$	$t(n)$
1	1	14	3 159
2	1	15	7 741
3	1	16	19 320
4	2	17	48 629
5	3	18	123 867
6	6	19	317 955
7	12	20	823 065
8	23	21	2 144 505
9	47	22	5 623 756
10	106	23	14 828 074
11	235	24	39 299 897
12	551	25	104 636 890
13	1 301	26	279 793 450

Tabulka 2.12: Počet  $t_n$  neizomorfních stromů na  $n$  uzlech

# LITERATURA

- [1] C. BERGE: *Principles of Combinatorics*, Academic Press, New York – San Francisco – London 1971
- [2] J. B. DENCE - T. P. DENCE: *Elements of the Theory of Numbers*, Academic Press, London 1998
- [3] J. E. GRAVER, M. E. WATKINS: *Combinatorics with Emphasis on the Theory of Graphs*, Springer - Verlag, New York – Heidelberg – Berlin 1977
- [4] M. HALL, JR.: *Combinatorial Theory*, Blaisdel P.C., Waltham – Toronto – London 1967; ruský překlad 1970
- [5] J. HERMAN, R. KUČERA, J. ŠIMŠA: *Metody řešení matematických úloh II*, Brno 1997
- [6] J. KAUCKÝ: *Kombinatorické identity*, Veda, Bratislava 1975
- [7] J. NEČAS: *Grafy a jejich použití*, SNTL, Praha 1978
- [8] R. MERRIS: *Combinatorics*, PWS Publishing Company, Boston – London – Tokyo 1996
- [9] J. NEŠETŘIL: *Teorie grafů*, SNTL, Praha 1979
- [10] J. SEDLÁČEK: *Úvod do teorie grafů*, Academia, Praha 1981
- [11] P. ŠIŠMA: *Teorie grafů 1736–1963*, Prometheus, Praha 1997
- [12] N. J. VILENKIN: *Kombinatorika*, SNTL, Praha – Moskva 1977
- [13] A. VRBA: *Kombinatorika*, Mladá fronta, Praha 1980

# REJSTŘÍK

- ( $3n + 1$ )-funkce, 57
- 3-sít', 72
- $k$ -pravidelný graf, 95
- $k$ -uniformní hypergraf, 149
  
- acyklický graf, 148
- adjungovaný rozklad, 42
- anagram, 17
- artikulace, 114
  
- Bellova čísla, 24
- Bernoulliova čísla, 58
- Bettiho číslo, 116
- binomický koeficient, 8
- bipartitní graf, 138
- blokové schéma, 69
- blokové schéma typu  $(v, b, k, r, \lambda)$ , 69
- bloky blokového schématu, 69
- bod konečné afinní roviny, 75
- bod v projektivní rovině, 80
  
- cesta, 97
- cyklomatické číslo, 116
- cyklus, 148
  
- člen grafu, 115
  
- dělení řetězce, 62
- délka kružnice, 100
- délka sledu, 97
- design, 69
- Dirichletův princip, 45
  
- disjunktní grafy, 92
  
- ekvivalentní latinské čtverce, 72
- Eulerova čísla, 59
- Eulerova funkce, 36
- Eulerova funkce gama, 7
- Eulerova identita, 67
- Eulerova úloha o 36 důstojnících, 73
- Eulerova věta, 129
- eulerovský graf, 119
  
- faktor grafu, 92
- Ferrersův diagram, 42
- Fibonacciova čísla, 54
- Fibonacciova posloupnost, 54
- flukтуаční permutace, 58
- funkcionál, 29
  
- graf, 90
- graf „tři domy a tři studně“, 129
- grafová posloupnost, 94
- grafy druhé třídy, 140
- grafy první třídy, 140
  
- had, 102
- Hallova věta, 138
- hamiltonovská cesta, 125
- hamiltonovská kružnice, 122
- hamiltonovský graf, 122
- Hanojská věž, 56
- homeomorfní grafy, 132
- homomorfismus grafů, 121

- hrana, 89, 147  
 hrana grafu, 90  
 hranově  $k$ -chromatický graf, 140  
 hranově  $k$ -souvislý graf, 118  
 hranové chromatické číslo, 140  
 hranově ohodnocený graf, 110  
 hranový řez, 117  
 hranový stupeň souvislosti, 117  
 hvězda, 102  
 hvězdovitá množina, 133  
 hvězdovitý mnohostěn, 133  
 hypergraf, 89, 149  
  
 charakteristická rovnice formule, 52  
  
 incidenční zobrazení, 147, 149  
 izolovaný uzel, 92  
 izomorfismus grafů, 108  
 izomorfní grafy, 108  
  
 Kirkmannův problém 15 dívek, 71  
 koeficient řady, 60  
 kombinace  $k$ -té třídy, 15  
 kombinace s opakováním, 19  
 kombinační číslo, 8  
 kombinatorická identita, 11  
 komplementární grafy, 92  
 komponenta grafu, 99  
 kompozice, 39  
 koncové uzly hrany, 91  
 konečná afinní rovina, 75  
 konečná geometrie, 74  
 konečná projektivní rovina, 80  
 konečný graf, 91  
 konfigurace, 3, 69  
 konvergence řady funkcí na množině, 59  
 konvergence řady v bodě, 59  
 kostra grafu, 103  
 kružnice v grafu, 100  
  
 Kuratowského grafy, 131  
 kvadratický faktor, 122, 142  
 kvaternion, 121  
  
 Laplaceova matice sousednosti, 104  
 latinský čtverec řádu  $n$ , 71  
 les, 100  
 lineární faktor, 142  
 lineární funkcionál, 29  
 lineární rekurentní formule  $k$ -tého řádu s  
     konstantními koeficienty, 49  
 Lo-šu, 5  
 Lucasova posloupnost, 56  
  
 maďarský algoritmus, 139  
 magický čtverec, 81  
 mapa, 129  
 matice sousednosti grafu, 96  
 matroid, 111  
 minimální kostra, 110  
 množina hran, 149  
 množina uzlů, 148, 149  
 mocinná řada, 59  
 most, 114  
 multigraf, 147  
  
 nakreslení grafu, 126  
 násobnost hrany, 147  
 neizomorfní stromy, 109  
 nekonečná řada funkcí, 59  
 neorientovaná hrana, 147  
 neorientovaný graf, 147  
 nesouhlasně rovnoběžné hrany, 147  
  
 obarvení hran, 140  
 obarvení uzlů, 137  
 obecný graf, 147  
 obyčejný graf, 90, 147  
 obyčejný orientovaný graf, 147  
 ohodnocení hrany (uzlu), 110

- ohodnocený graf, 89  
 orientovaná hrana, 147  
 orientovaná smyčka, 147  
 orientovaný graf, 147, 148  
 ortogonální latinské čtverce, 72  
 otevřený tah, 97
- párování, 138  
 Pascalův trojúhelník, 11  
 permanent matice, 146  
 permutace, 15  
 permutace s opakováním, 17  
 Petersenův graf, 142  
 planární graf, 129  
 Platónova tělesa, 133  
 podgraf grafu, 92  
 polohamiltonovský graf, 125  
 polomagický čtverec, 81  
 poloměr konvergence, 60  
 polostupeň uzlu, 148  
 pravidelný faktor, 122  
 pravidelný graf, 95  
 pravidelný mnohostěn, 133  
 pravidlo součinu, 14  
 princip duality, 80  
 princip inkluze a exkluze, 31  
 princip o vylučování a zapojování prvků,  
 31  
 problém čtyř barev, 88, 143  
 problém o svatbách, 138  
 problém obchodního cestujícího, 90  
 prostý graf, 147  
 prostý hypergraf, 149  
 přímka v afinní rovině, 75  
 přímka v projektivní rovině, 80  
 pseudograf, 147  
 pseudomagický čtverec, 83  
 půlení hrany, 131
- rovinný graf, 89, 129  
 rovnoběžky v afinní rovině, 75  
 rovnoběžné hrany, 147  
 rozklad čísla, 40  
 rozklad daného typu, 25  
 rozklad množiny, 24
- řád konečné afinní roviny, 76  
 řád konečné projektivní roviny, 80  
 řešení rekurentní formule, 49  
 řez, 62  
 Říční mapa, 5
- samoadjungovaný rozklad, 42  
 Saturn, 5  
 Schläfliův symbol, 133  
 sled, 97  
 směr v afinní rovině, 75  
 smíšený graf, 147  
 smyčka, 89, 147  
 součet konečné řady, 7  
 součet řady, 59  
 souhlasně rovnoběžné hrany, 147  
 souvislý graf, 98  
 společnost, 149  
 Steinerův systém trojic, 69  
 stereografická projekce, 134  
 Stirlingova čísla 1. druhu, 10  
 Stirlingova čísla 2. druhu, 26  
 Stirlingova formule, 7  
 Stirlingův trojúhelník, 27  
 strom, 100  
 stupeň uzlu, 92  
 supermagický čtverec, 83  
 svaz  $k$ -tic, 18  
 systém trojic, 69
- šipka, 89, 148  
 tah v grafu, 97

trojúhelník, 100  
třídy rozkladu, 24  
turnaj, 148  
tým, 149

úloha o hostech, 35  
úloha o sedmi mostech města Královce, 86  
uniformní hypergraf, 149  
úplné párování, 139  
úplný bipartitní graf, 138  
úplný graf, 91  
uzavřený tah, 97  
uzel, 147  
uzel grafu, 89, 90  
uzel konečného stupně, 92  
uzel nekonečného stupně, 92  
uzlově  $k$ -chromatický graf, 137  
uzlově  $k$ -souvislý graf, 118  
uzlové chromatické číslo, 137  
uzlově ohodnocený graf, 110  
uzlový řez, 117  
uzlový stupeň souvislosti, 117

variace  $k$ -té třídy, 14  
variace s opakováním, 16  
variace, permutace a kombinace bez opakování, 16  
Veliký Lo-šu, 81  
věta o pěti barvách, 146  
vlastní podgraf grafu, 92  
vnitřní uzel, 97  
vrchol grafu, 89, 90  
vytvorující funkce, 61

Youngův svaz, 43

zjemnění rozkladu, 24  
znaménková matice, 96

žebřík, 104