

Úlohy o trojúhelníku

- Ověřte a zdůvodněte, proč platí:
 - Osy dvou vedlejších úhlů jsou polopřímky na sebe kolmé.
 - Osy dvou vrcholových úhlů jsou polopřímky navzájem opačné.
- Na ose konvexního úhlu EFG leží bod H tak, že přímky EH a FG jsou rovnoběžné. Ověřte (dokažte), že úsečky EF a EH jsou shodné.
- Jeden vnitřní úhel rovnoramenného trojúhelníku má velikost 76° . Vypočítejte velikosti ostatních vnitřních úhlů a velikosti vnějších úhlů trojúhelníků.
- Zdůvodněte, zda a proč se osy dvou vnějších úhlů trojúhelníku a osa vnitřního úhlu při zbývajícím vrchol protínají v jednom bodě.
- Vnitřní úhly α , β , γ v trojúhelníku ABC jsou v poměru $2 : 3 : 5$. V jakém poměru jsou příslušné vnější úhly tohoto trojúhelníku?
- Vnější úhly α' , β' , γ' trojúhelníku ABC jsou v poměru $3 : 4 : 5$. V jakém poměru jsou příslušné vnitřní úhly tohoto trojúhelníku?
- Můžete najít trojúhelník, ve kterém by součet dvou jeho vnitřních úhlů byl roven velikosti úhlu třetího?
- Je dán tupouhlý trojúhelník ABC a tupým úhlem při vrcholu C. Narýsujte výšky k jeho ramenům AC a BC. Stačilo by vám k určení velikostí všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, kdybyste věděli, že narýsované výšky svírají úhel 48° ?
- Narýsujte pravoúhlý trojúhelník FGH s pravým úhlem při vrcholu F. Sestrojte kolmici bodu F na přímku GH, její patu označte K. Který úhel je shodný a úhlem HFK?
- Narýsujte ostroúhlý trojúhelník RST. Sestrojte kolmici z bodu R na přímku ST, její patu označte P. Sestrojte kolmici z bodu S na přímku RT, její patu označte U. Zdůvodněte, proč úhel PRT je shodný s úhlem UST.
- V trojúhelníku ABC je úhel $\alpha > \beta$. Osa úhlu γ svírá s výškou na stranu c úhel $\omega = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Ověřte.
- V trojúhelníku ABC svírají osy úhlů α a β úhel $\varphi = R + \frac{\gamma}{2}$. Ověřte.
- Ve čtverci ABCD o straně délky a je narýsován rovnostranný trojúhelník ABK. Určete velikost úhlu CKB.
- Je dán trojúhelník KLM. Jeho vrcholy ved'te rovnoběžky s protějšími stranami. Průsečky těchto přímek – body T, U, V určí vrcholy trojúhelníku TUV. Tento trojúhelník je sjednocením čtyř trojúhelníků a každý z nich je shodný s trojúhelníkem KLM. Zdůvodněte proč.
- Narýsujte rovnostranný trojúhelník ABC a zvolte libovolný jeho vnitřní bod, např. K. Sestrojte kolmice z bod K na strany trojúhelníku. Paty kolmic označte postupně L, M, N. Porovnejte úsečky $KL + KM + KN$ s výškou trojúhelníku ABC.

16. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α , β , γ . Sestrojte výšky na strany AC a BC, jejich paty označte E, F. Narýsujte trojúhelník EFC a vyjádřete jeho vnitřní úhly pomocí úhlů α , β , γ .

17. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a opište tomuto trojúhelníku kružnici. Zvolte si libovolný bod K této kružnice a sestrojte z bodu K kolmice k přímkám AB, AC, BC. Ověřte, že paty těchto kolmic leží v jedné přímce.

18. Uměli byste vypočítat obvod rovnostranného trojúhelníku, kdybyste znali:

- velikost jeho výšky,
- velikost jeho těžnice,
- délku poloměru kružnice trojúhelníku opsané,
- délku poloměru kružnice trojúhelníku vepsané?

19. Dokažte, že součet všech tří těžnic daného trojúhelníku je menší než obvod tohoto trojúhelníku.

20. Těžnice trojúhelníku rozdělí tento trojúhelník na šest trojúhelníků. Jaký je vztah mezi obsahy jednotlivých trojúhelníků a obsahem původního trojúhelníku.

21. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a sestrojte jeho těžnici BD. Narýsujte střed F této těžnice a sestrojte úsečky AF a CF. V jakém vztahu jsou obsahy trojúhelníků AFD, CFD, BCF a ABF a obsahu trojúhelníku ABC.

22. Nakreslete trojúhelník, jehož obsah je $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$.

23. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a body M, N, P, které dělí jeho strany BC, CA, AB postupně v poměru 2 : 1. Jakou část trojúhelníku ABC zaujímá trojúhelník XYZ, jehož vrcholy X, Y, Z jsou průsečíky přímek AM, BN, CP.