Základní pojmy a axiomy eukleidovské geometrie

Irena Budínová

První snahy o deduktivní výstavbu geometrických poznatků nacházíme ve starověkém Řecku. Vyvrcholením těchto snah je dílo jednoho z největších matematiků starověku – Eukleida (Eukleides, čteme Euklides, asi 300 př. n. l.). Eukleides shromáždil všechny dosavadní geometrické poznatky, utřídil je a podal jejich deduktivní důkazy. Své poznatky (zejména geometrické) seskupil v rozsáhlém spise **Základy**, který obsahuje 13 knih:

1. Pojednání o základech geometrie – rovnoběžkách, trojúhelnících a rovnoběžnících, důkaz Pythagorovy věty.
2. Pojednání o planimetrii (za použití geometrické algebry).
3. Pojednání o kružnici a kruhu.
4. Pojednání o tětivových a tečnových mnohoúhelnících, kružnici vepsané a opsané.
5. Pojednání o poměrech.
6. Pojednání o geometrické podobnosti.
7. Pojednání o teorii čísel (budována pomocí geometrie a délek úseček).
8. Pokračování pojednání o teorii čísel.
9. Teorie čísel - prvočísla, důkaz, že prvočísel je nekonečně mnoho.
10. Teorie iracionálních čísel.
11. Stereometrie.
12. Pojednání o povrchu a objemu těles.
13. Pojednání o pravidelných (Platonských) tělesech.

V první knize Eukleides uvádí definice základních geometrických pojmů. Nejedná se však o definice v pravém slova smyslu, neboť každý pojem definujeme pomocí pojmů dříve definovaných. Např. **kružnici** definujeme v současné době takto: Nechť je dán **bod** *S* ležící v **rovině** a **úsečka** *r*. Kružnicí o středu *S* a poloměru *r* se nazývá množina všech takových bodů *X* dané roviny, pro které platí, že úsečka *SX* je shodná s úsečkou *r*.

Pro definování pojmu kružnice tedy musíme již dříve znát pojmy bod, úsečka, rovina, shodnost geometrických útvarů.

Eukleides uvádí definice 23 základních geometrických pojmů, z nichž představíme prvních sedm:

1. Bod je to, co nemá části.
2. Čára je délka bez šířky.
3. Hranice čáry jsou body.
4. Úsečka je čára, která je vůči bodům na ni ležícím umístěna rovně.
5. Plocha je to, co má pouze délku a šířku.
6. Hranice plochy jsou čáry.
7. Rovina je plocha, která je vůči úsečkám na ni ležícím umístěna rovně.

Eukleides si uvědomil, že není možno podat důkazy všech tvrzení, že je třeba jisté věty považovat za pravdivé, z jejich platnosti vycházet a pomocí nich pak postupně deduktivně odvozovat věty další. Jako první v historii použil pro základ geometrie soustavu **axiomů** (tj. tvrzení, která se předem považují za pravdivá a tudíž se nedokazují). Ve svém díle Základy uvádí 14 axiomů, z nichž 5, které mají geometrický charakter, nazývá **postuláty**. Ve starším znění mohou být postuláty následující:

1. Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.
2. A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.
3. A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovati kruh.
4. A že všecky pravé úhly sobě rovny jsou.
5. A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.

Modernější formulace postulátů je následující:

1. Dvěma body lze vést jedinou přímku.
2. Úsečku je možno neomezeně prodlužovat.
3. Z libovolného středu je možno libovolným poloměrem opsat kružnici.
4. Všechny pravé úhly jsou shodné.
5. Dvě přímky v rovině, které protínají další přímku této roviny, se vždy protínají na té straně od této přímky, kde je součet přilehlých vnitřních úhlů menší než úhel přímý.

Poslední tvrzení je ekvivalentní s tzv. **axiomem rovnoběžnosti**, tj. že v rovině je možno vést daným bodem, který neleží na dané přímce této roviny, nejvýše jednu přímku, která nemá s danou přímkou žádný společný bod.

Německý matematik David Hilbert (1862 – 1943) rozdělil axiomy eukleidovské geometrie do pěti skupin na **axiomy incidence**, **axiomy uspořádání**, **axiom rovnoběžnosti**, **axiomy shodnosti** a **axiomy spojitosti**.

Literatura:

Francová, M., Matoušková, K., Vaňurová, M.: *Texty k základům elementární geometrie pro studium učitelství 1. stupně základní školy.* PdF UJEP, Brno 1985

Servít, F.: *Eukleidovy Základy.* Praha, 1907