

Úlohy o úhlech a trojúhelníku

1. Na ose konvexního úhlu EFG leží bod H tak, že přímky EH a FG jsou rovnoběžné. Ověřte, že úsečky EF a EH jsou shodné.
2. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a osy jeho vnějších úhlů. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku KLM, kde body K, L, M jsou průsečíky os vnějších úhlů trojúhelníku ABC.
3. Vnitřní úhly α , β , γ v trojúhelníku ABC jsou v poměru 2 : 3 : 5. V jakém poměru jsou příslušné vnější úhly tohoto trojúhelníku?
4. Vnější úhly α' , β' , γ' trojúhelníku ABC jsou v poměru 3 : 4 : 5. V jakém poměru jsou příslušné vnitřní úhly tohoto trojúhelníku?
5. Narýsujte pravoúhlý trojúhelník FGH s pravým úhlem při vrcholu F. Sestrojte kolmici bodu F na přímkou GH, její patu označte K. Který úhel je shodný a úhlem HFK?
6. Narýsujte ostroúhlý trojúhelník RST. Sestrojte kolmici z bodu R na přímkou ST, její patu označte P. Sestrojte kolmici z bodu S na přímkou RT, její patu označte U. Zdůvodněte, proč úhel PRT je shodný s úhlem UST.
7. Je dán trojúhelník KLM. Jeho vrcholy ved'te rovnoběžky s protějšími stranami. Průsečíky těchto přímk – body T, U, V určí vrcholy trojúhelníku TUV. Tento trojúhelník je sjednocením čtyř trojúhelníků a každý z nich je shodný s trojúhelníkem KLM. Zdůvodněte proč.
8. Narýsujte rovnostranný trojúhelník ABC a zvolte libovolný jeho vnitřní bod, např. K. Sestrojte kolmice z bodu K na strany trojúhelníku. Páty kolmic označte postupně L, M, N. Porovnejte úsečku $KL + KM + KN$ s výškou trojúhelníku ABC.
9. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α , β , γ . Sestrojte výšky na strany AC a BC, jejich paty označte E, F. Narýsujte trojúhelník EFC a vyjádřete jeho vnitřní úhly pomocí úhlů α , β , γ .
10. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a opište tomuto trojúhelníku kružnici. Zvolte si libovolný bod K této kružnice a sestrojte z bodu K kolmice k přímkám AB, AC, BC. Ověřte, že paty těchto kolmic leží v jedné přímce.
11. Ověřte, že součet všech tří těžnic daného trojúhelníku je menší než obvod tohoto trojúhelníku.
12. Těžnice trojúhelníku rozdělí tento trojúhelník na šest trojúhelníků. Jaký je vztah mezi obsahy jednotlivých trojúhelníků a obsahem původního trojúhelníku.
13. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a sestrojte jeho těžnici BD. Narýsujte střed F této těžnice a sestrojte úsečky AF a CF. V jakém vztahu jsou obsahy trojúhelníků AFD, CFD, BCF a ABF a obsahu trojúhelníku ABC.

14. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a body M, N, P , které dělí jeho strany BC, CA, AB postupně v poměru $2 : 1$. Jakou část trojúhelníku ABC zaujímá trojúhelník XYZ , jehož vrcholy X, Y, Z jsou průsečíky přímk AM, BN, CP .

15. V trojúhelníku ABC svírají osy úhlů α a β úhel $\varphi = R + \frac{\gamma}{2}$. Ověřte.

Úlohy o čtyřúhelnících

16. Narýsujte rovnoběžník $KLMN$ a sestrojte středy jeho stran. Ověřte, že tyto středy jsou vrcholy nového rovnoběžníku. Budete-li pokračovat dále v sestrojování středů stran nového rovnoběžníku, zjistíte, že vždy středy stran jsou vrcholy nových rovnoběžníků.

17. V rovnoběžníku $ABCD$ je bod K střed strany BC a bod L střed strany CD . Určete, v jakém poměru dělí úsečky AK a AL úhlopříčku BD .

18. Narýsujte libovolný konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a sestrojte středy všech jeho stran. Ověřte, že platí: Úsečky spojující středy sousedních stran konvexního čtyřúhelníku rozdělují tento čtyřúhelník na rovnoběžník a čtyři trojúhelníky.

19. Narýsujte libovolný konvexní čtyřúhelník $ABCD$, středy jeho stran označte K, L, M, N . Ověřte, že čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoběžník.

20. V lichoběžníku $ABCD$ pro jeho základny platí: $AB = 2 CD$. Ověřte, že úhlopříčky tohoto lichoběžníku dělí střední příčku na tři shodné úsečky.

21. Ověřte, že část střední příčky lichoběžníku vymezená jeho úhlopříčkami (tj. úsečka, jejímiž krajními body jsou body úhlopříček), je rovna polovině rozdílu jeho základen.

22. Je dán lichoběžník $ABCD$, narýsujte jeho úhlopříčky AC, BD . Kolik dvojic geometrických útvarů, které mají sobě rovné obsahy, můžete najít?

Úlohy o kružnici a kruhu

23. Vypočítejte obsah mezikruží, které vznikne, když čtverci o straně délky 10 cm opišeme a vepíšeme kružnici.

24. Z čtvercové desky vyřízneme kruh maximálního obsahu, Kolik procent činí odpad?

25. Z desky tvaru kruhu vyřízneme čtverec maximálního obsahu. Kolik procent činí odpad?

26. Ověřte, že osa tětiny kružnice prochází vždy středem kružnice.

27. Ověřte, že spojnice bodů, které vyznačují na ciferníku hodin 2 a 5 je kolmá na spojnici bodů, které vyznačují 3 a 10 .

28. Narýsujte konvexní úhel AVB a kružnici k , která s ním nemá společný bod. Sestrojte všechny kosočtverce $VZYX$, které mají vrcholy na ramenech úhlu a a bod Z na kružnici k .

Literatura

- FRANCOVÁ, M., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M.: *Sbírka úloh z elementární geometrie*. Brno: PdF MU 1992,
- KRUPKA, P.: *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň ZŠ a nižší ročníky víceletých gymnázií*. Praha: Prometheus, 2000.
- KUPČÁKOVÁ, M.: *Geometrie ve světě dětí i dospělých*. Hradec Králové: Gaudeamus 2001.
- KUŘINA, F.: *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN 1989.
- KUŘINA, F.: *Deset pohledů na geometrii*. Praha: Matematický ústav AV ČR a Albra, 1996.
- KUŘINA, F.: *Geometrické praktikum I*. Praha: MÚ ČSAV, 1992.
- KUŘINA, F.: *Geometrické praktikum II*. Praha: MÚ ČSAV, 1994.
- SOUČKOVÁ, B.: *Sbírka písemných tematických prověrek a úloh z matematiky pro 6. ročník ZŠ*. Praha: JČSMF, 1986.
- ŠVRČEK, J., VANŽURA, J.: *Geometrie trojúhelníka*. Praha: SNTL, 1988.
- VYŠÍN, J.: *Geometrie pro pedagogické fakulty I*. Praha: SPN 1970.