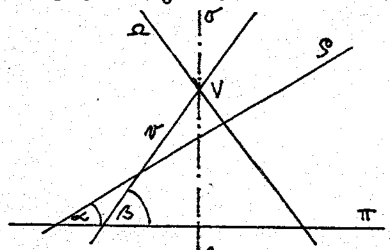
Převzato ze studijních materiálů Doc. RNDr. Oty Řehy, CSc. k teorii kuželoseček a levadník

KUŽELOSEČKY

Název: <u>kuželosečka</u> – řez roviny s kruhovou kuželovou plochou.

Nechť Ω je rotační kuželová plocha, ϱ rovina a $V \notin \varrho$ /viz obr. 1/



Označme: $\pi \perp \sigma$

$\alpha = \sphericalangle \varrho\pi$

$\beta = \sphericalangle r\pi$

Je-li $\alpha < \beta$, protíná rovina ϱ všechny tvořící přímky kuželové plochy a řezem je elipsa,

Je-li $\alpha = \beta$, je rovina ϱ rovnoběžná právě s jednou tvořící přímkou plochy a řezem je parabola,

Je-li $\alpha > \beta$, je rovina ϱ rovnoběžná se dvěma různoběžnými tvořícími přímkami plochy a řezem je hyperbola.

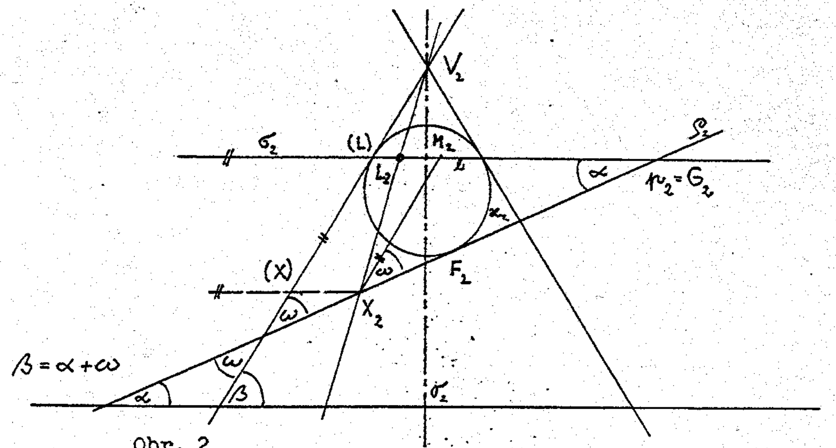
Poznámka: Pro $V \in \varrho$ může být průnikem ϱ s kuželovou plochou bod, přímka, dvě různoběžné přímky /nazýváme je singulární nebo složené kuželosečky/.

<u>Věta 1</u> /Definice/

Kuželosečka zvaná elipsa /parabola, hyperbola/ je množina bodů v rovině, které mají poměr vzdáleností od daného bodu F /zvaného ohnisko/ a dané přímky p /zvané řídící přímka neboli direktrix/ neprocházející bodem F roven kladnému reálnému číslu k, pro které platí $k<1$ /$k=1$, $k>1$/.
Číslo k se nazývá <u>numerická výstřednost</u> neboli excentricita kuželosečky.

Důkaz /pro elipsu, tj. $\alpha < \beta$ /

Do části kuželové plochy ve které leží V vepíšeme kulovou plochu $\varkappa$ tak, aby se dotýkala roviny ϱ v bodě F/viz obr. 2/ Kuželová a kulová plocha se dotýkají podél kružnice l, která leží v rovině σ kolmé k ose o uvažovaného rotačního kužele.



Obr. 2

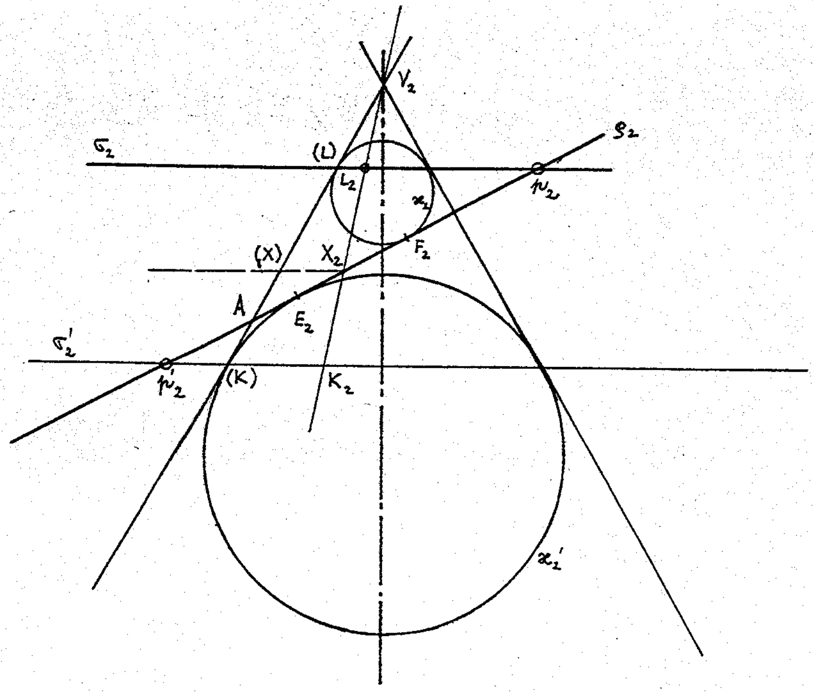
Označme $p = \varrho \cap \sigma$, zvolme $X \in e$, kde e je průnik roviny ϱ s kuželovou plochou /v obr. X_2/. Platí: $/Xp/ = /XG/ = /X_2G_2/$. (1)
Dále platí: $/XF/ = /XL/$ – délka tečny z bodu X ke $\varkappa$, (2)
$/XF/ : /Xp/ \overset{(1)}{=} /XL/ : /Xp/ \overset{(2)}{=} \underset{\text{otočeno}}{/(X)(L)/} : /X_2G_2/ = /X_2M_2/ : /X_2G_2/$.

Pro trojúhelník XMG /z obr.2 $\triangle X_2M_2G_2 \cong \triangle XMG$/ dle sinové věty platí:
$/XM/ : /XG/ = /X_2M_2/ : /X_2G_2/ = \sin\alpha : \sin[\pi - /\alpha + \omega/] =$
$= \sin\alpha : \sin[\pi - /\alpha + \beta - \alpha/] = \sin\alpha : \sin/\pi - \beta/ = \sin\alpha : \sin\beta < 1$,
neboť $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Dostáváme tedy $/XF/ : /Xp/ = \sin\alpha : \sin\beta = k < 1$.

Poznámky:

1. Obdobný závěr dostaneme i pro
   parabolu: $\alpha = \beta \Rightarrow \sin\alpha : \sin\beta = k = 1 \Rightarrow /XF/ = /Xp/$
   hyperbolu: $\alpha > \beta = \sin\alpha : \sin\beta = k > 1 = /XF/ > /Xp/$.
2. Pro $\alpha \neq \beta$ platí, že také do druhé části kuželové plochy určené rovinou ϱ /pro eliptický řez dotě, v níž neleží bod V – viz obr.3/ lze vepsat kulovou plochu, která se dotýká roviny ϱ v bodě E, jenž je pro průsečnou křivku /elipsu nebo hyperbolu/ druhým ohniskem. Tuto skutečnost vyjadřuje věta Quetelet-Dandelinova: Vepíšeme-li do rotační kuželové plochy kulové plochy tak, aby se dotýkaly roviny protínající tuto kuželovou plochu, pak dotykové body kulových ploch s rovinou řezu jsou ohniska průsečné křivky.



Obr. 3

E L I P S A

Pro elipsu $/\alpha < \beta/$ platí /viz obr. 3/:

$/XF/ + /XE/ = /XL/ + /XK/ = /(X)(L)/ + /(X)(K)/ = /(L)(K)/ =$
 délky tečen z X ke $\varkappa$ otočeno

$=$ konst. , kterou označíme 2a.

Pro délky tečen z bodu A ke $\varkappa$ platí:

$/AF/ = /A(L)/ \Rightarrow /EF/ < /A(L)/ < /(K)(L)/ = 2a.$

Tedy $/EF/ < 2a.$

Z předchozí úvahy plyne:

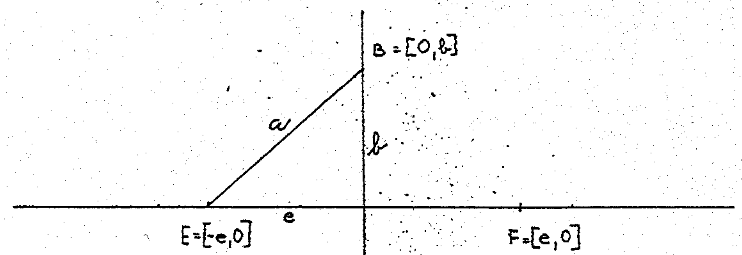
Jsou-li dány body $E \neq F$ a číslo $2a > /EF/$, pak množinou všech bodů X roviny obsahující body E, F, pro které platí

$$/EX/ + /FX/ = 2a$$

je elipsa s ohnisky E, F a s hlavní osou o velikosti 2a.

Rovnice elipsy

Nechť je v eukleidovské rovině dána elipsa $\mathscr{E}$ s ohnisky E, F a velikostí hlavní osy 2a. Zvolme KASS tak, aby osa x procházela body E, F a počátek KASS byl středem úsečky E, F.
Souřadnice ohnisek označme $E = [-e, 0]$, $F = [e, 0]$, /obr. 4/, $e > 0$



Obr. 4

Jestliže je bod $X = [x, y]$ bodem elipsy $\mathscr{E}$, pak platí

$$/XE/ + /XF/ = 2a, \qquad (1)$$

tj.

$$\sqrt{(x + e)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - e)^2 + (y - 0)^2} = 2a \quad /^2$$

$$(x+e)^2 + y^2 + (x-e)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x+e)^2 + y^2}\sqrt{(x-e)^2+y^2} = 4a^2$$

$$2(x^2+e^2+y^2) + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4e^2x^2} = 4a^2$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4e^2x^2} = 2a^2-(x^2+e^2+y^2) \quad /^2$$

Po umocnění, dalších úpravách a označení $a^2 - e^2 = b^2$ dostáváme pro souřadnice x, y bodu X elipsy $\mathscr{E}$ vztah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

Obrácením postupu ověříme, že každý bod X, jehož souřadnice x, y splňují vztah (2) je bodem elipsy $\mathscr{E}$.

Číslo b ve vztahu (2) se nazývá velikost vedlejší poloosy elipsy $\mathscr{E}$, číslo e lineární výstřednost - excentricita elipsy $\mathscr{E}$. Vztah (2) nazýváme normální, též kanonickou rovnicí elipsy $\mathscr{E}$.

Věta 2 /upřesnění věty 1 pro elipsu/

Elipsa o rovnici (2) je množinou všech bodů v rovině E_2, které mají od bodu $F = [e,0]$ a od přímky $p \equiv x = \frac{a^2}{e}$, poměr vzdáleností roven číslu $k = \frac{e}{a}$, kde $e = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Důkaz proveďte jako cvičení.

Obecná rovnice kuželosečky

Nehomogenní kvadratickou formou v proměnných x_1, x_2 nazýváme každý mnohočlen

$$f(x_1,x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}, \qquad (1)$$

kde a_{ij} $/1 \leq i \leq j \leq 3/$ jsou libovolná reálná čísla splňující podmínku

$$(a_{11},a_{12},a_{22}) \neq (0,0,0). \qquad (2)$$

Pro $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$ nazýváme mnohočlen (1) homogenní kvadratickou formou.

Nehomogenní kvadratickou formu (1) lze zapsat pomocí matic takto:

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

stručněji

$$f(x_1, x_2) = X^T A X, \qquad (3)$$

kde $X^T = (x_1, x_2, 1)$.

Jediný prvek matice $X^T A X$ typu (1,1) je roven $f(x_1,x_2)$ - což zjednodušeně zapisujeme ve tvaru (3).

Matice A v (3) se nazývá <u>matice kvadratické formy</u> (1).

Determinant $|A|$ se nazývá <u>diskriminant kvadratické formy</u> (1), respektive rovnice $f(x_1,x_2) = 0$. (4)

Matici

$$A_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

nazýváme <u>maticí kvadratických členů formy</u> (1).

Determinant $|A_{33}|$ nazýváme <u>diskriminantem kvadratických členů</u> nebo též <u>malým diskriminantem</u>.

<u>Kvadratická forma, jejíž diskriminant je roven nule /je různý od nuly/ se nazývá singulární /regulární/.</u>

<u>Jádrem kvadratické formy</u> (1) /též nulovou množinou/ nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic, které jsou řešením rovnice (4).

<u>Bodovým jádrem kvadratické formy</u> (1) nazýváme množinu všech bodů v rovině jejichž uspořádané dvojice souřadnic $[x_1, x_2]$ náležejí do jádra kvadratické formy (1).

Souvislost kvadratických forem s kuželosečkami

Elipsa se středem $S = [m,n]$ má rovnici

$$\frac{(x_1 - m)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - n)^2}{b^2} = 1.$$

Její úpravou dostáváme

$$b^2(x_1^2 - 2mx_1 + m^2) + (x_2^2 - 2nx_2 + n^2)a^2 - a^2b^2 = 0.$$

Levá strana této rovnice je speciálním případem kvadratické formy v proměnných x_1, x_2. Bodovým jádrem této kvadratické formy je kuželosečka /elipsa/. Položme si tedy otázku: Co je bodovým jádrem kvadratické formy (1) v obecném případě?

Protože na tuto otázku nedovedeme odpovědět, pokusíme se jinou, vhodnou volbou souřadné soustavy zjednodušit rovnici (4) tak, aby z transformované rovnice odpověď vyplynula. Uvažovat budeme eukleidovskou rovinu s KASS. Abychom nemuseli používat indexy, zavedeme v kvadratické formě (1) nové označení. Rovnice (4) pak bude mít tvar

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad , \ (a, b, c) \neq (0, 0, 0). \qquad (5)$$

Dál viz M. Sekanina a kol.: Geometrie I, kap. 3.2, str. 174.

<u>Shrnutí výsledků</u>: Ke každé rovnici (5) lze zvolit novou KASS tak, že původní souřadnice bodu splňují rovnici (5) právě tehdy, když jeho nové souřadnice splňují rovnici F = 0, přičemž F = 0 má jeden z dále uvedených tvarů - ukaždého je vždy uvedeno označení množiny všech bodů, jejichž souřadnice x, y rovnici splňují.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ množina prázdná, imaginární elipsa
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ elipsa, pro a = b kružnice

3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ hyperbola

4. $y^2 - 2px = 0$ /$p>0$/ parabola

5. $y^2 - k^2x^2 = 0$ /$k>0$/ dvě různoběžky

6. $y^2 + k^2x^2 = 0$ /$k>0$/ bod

7. $y^2 - r^2 = 0$ /$r>0$/ dvě různé rovnoběžky

8. $y^2 = 0$ přímka /splývající rovnoběžky/

9. $y^2 + r^2 = 0$ /$r>0$/ množina prázdná

Bodovým jádrem každé kvadratické formy je tedy právě jedna z uvedených devíti množin bodů. Protože všechny tyto bodové množiny můžeme dostat jako průnik roviny s kruhovou kuželovou plochou, rozumíme kuželosečkou každou z devíti uvedených množin.
V případech 8 a 9 uvažujeme kuželovou plochu s nevlastním vrcholem-tj. kruhovou válcovou plochu.

Rovnici (4) ev. (5) nazýváme <u>obecnou rovnicí kuželosečky</u>.

<u>Poznámky</u>:

1. Rovnicím $F = 0$ /č. 1 - 9/ říkáme <u>kanonické nebo též normální rovnice kuželosečky</u>.
2. Kuželosečky uvedené pod č. 1 a 9 nazýváme formálně reálné - jsou určeny rovnicemi s reálnými koeficienty, ale neobsahují žádné reálné body, tj. body, jejichž souřadnice jsou reálná čísla.
3. Kuželosečky uvedené pod č. 1 až 4 jsou tzv. <u>regulární</u> /jednoduché/. Kuželosečky uvedené pod č. 5 až 9 jsou tzv. <u>singulární</u> /složené/.

Cvičení:
Určete kanonickou rovnici kuželosečky dané rovnicí

$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0.$ * *

Rovnice pro otočení KASS : $\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}\right\}$ *

Určíme $\sin\alpha$, $\cos\alpha$:

$\cos 2\alpha = \frac{a - c}{\sqrt{4b^2+(a-c)^2}} = \frac{3}{5}$, $\sin 2\alpha = \frac{2b}{\sqrt{4b^2+(a-c)^2}} = -\frac{4}{5}$

$|\sin\alpha| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $|\cos\alpha| = \sqrt{\frac{1 + \cos 2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Zvolíme-li $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$ /$\sin 2\alpha < 0$/. Po dosazení do *

a odtud do * * po úpravách dostáváme:

$10x'^2 + 5y'^2 - 4\sqrt{5}\,x' + 2\sqrt{5}\,y' + 2 = 0.$

Po další úpravě /"doplnění na čtverce"/ a další transformaci KASS /posunutí počátku/ dostaneme:

$$\frac{x''^2}{0,1} + \frac{y''^2}{0,2} = 1,$$

což je normální rovnice elipsy.

2. Určete normální rovnici kuželosečky dané rovnicí

a/ $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$
   $\left[x^2 + \frac{y}{9} = 1 , \text{ elipsa}\right]$

b/ $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$
   $\left[\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 , \text{ hyperbola}\right]$

c/ $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$
   $\left[y^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}x, \text{ parabola}\right]$

d/ $2xy - 4x + 3y - 6 = 0$
   $\left[x^2 - y^2 = 0, \text{ dvojice různoběžek: } x + y = 0,\ x - y = 0\right]$

e/ $50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0$
   $\left[2x^2 + 3y^2 + 1 = 0, \text{ imaginární elipsa}\right]$

f/ $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$
   $\left[2x^2 + 3y^2 = 0, \text{ bod}\right]$

g/ $x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0$
   $\left[y^2 = 25, \text{ dvojice rovnoběžek: } y = 5,\ y = -5\right]$

h/ $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$
   $\left[x^2 = 0, \text{ dvojnásobná přímka}\right]$

i/ $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$
   $\left[y^2 = -1, \text{ prázdná množina}\right]$

Ortogonální invarianty kuželoseček

Pojmy:

Nehomogenní kvadratická forma

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \qquad (1)$$

Obecná rovnice kuželosečky

$$f(x,y) = 0 \qquad (2)$$

Maticový zápis (1) $X^TA\,X = f(x,y)$

Maticový zápis (2) $X^TA\,X = 0$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X^T = (\,x\ y\ 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$ = matice kvadratické formy (1)

Diskriminant kvadratické formy (1) $|A| = D$

$|A| = D$ též diskriminant rovnice (2) a kuželosečky určené rovnicí (2)

Diskriminant kvadratických členů

$$D_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \,,$$

též malý diskriminant kvadratické formy (1), malý diskriminant rovnice (2), malý diskriminant kuželosečky určené rovnicí (2).

Regulární kvadratická forma, regulární kuželosečka : $D \neq 0$,
Singulární - " - , singulární - " - : $D = 0$.

Věta 1 : Pro diskriminant D, malý diskriminant D_{33} kuželosečky určené rovnicí (2) a číslo $J = a_{11} + a_{22}$ platí, že jsou nezávislé na volbě KASS.

Poznámka: Protože se čísla D, D_{33}, J nemění při transformaci KASS /matice přechodu je ortogonální/, říkáme, že D, D_{33}, J jsou ortogonální invarianty rovnice kuželosečky.

Důkaz:

$$KASS_1: \langle P, x, y\rangle \longrightarrow KASS_2: \langle \bar{P}, \bar{x}, \bar{y}\rangle$$

Transformační rovnice

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha + m \\ y &= \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha + n \end{aligned} \qquad (3)$$

můžeme zapsat maticovou rovnicí

$$X = C\,\bar{X} \,, \qquad (4)$$

kde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \cos & -\sin & m \\ \sin & \cos & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

neboť po vynásobení matic CX dostaneme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}\cos - \bar{y}\sin + m \\ \bar{x}\sin + \bar{y}\cos + n \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Z (5) plynou rovnice (3) a rovnost 1 = 1, která může být chápána jako rovnice $0\bar{x} + 0\bar{y} + 1 = 1$ ⇒ soustavy (3) a (5) jsou ekvivalentní

a/ Transformací (4) přejde rovnice (2)

$$X^TA\,X = 0$$

v rovnici

$$(C\,\bar{X})^T A (C\,\bar{X}) = 0$$

$$\bar{X}^T\underbrace{(C^TA\,C)}_{B}\bar{X} = 0 .$$

Pro diskriminant $|B|$ transformované kuželosečky platí:

$|B| = |C^TA\,C| = |C^T||A||C| = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)|A|(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) =$
$= |A| = D$ ⇒ D je invariant.

b/ Transformací (4) se nezmění ani

$$D_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = |M| \text{, kde } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

matice M se obdobně jako v případě a/ transformuje v matici $\tilde{M}$ a platí

$$|\tilde{M}| = |C^TM\,C| = |C^T||M||C| = 1.|M|.\,1 = D_{33}.$$

c/ Invariantnost $J = a_{11} + a_{22}$ dokážeme takto:
Do rovnice (2) dosadíme za x, y, z transformačních rovnic (3) a určíme koeficienty u $\bar{x}^2$, $\bar{y}^2$, které označíme $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$:

$$a_{11}(\bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha + m)^2 + 2a_{12}(\bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha + m).$$
$$.\,(\bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha + n) + a_{22}(\bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha + n)^2 + \ldots = 0 \qquad (6)$$

Z (6) je zřejmé, že čísla m, n v závorkách nemohou ovlivnit koeficienty u kvadratických členů $\bar{x}^2$, $\bar{y}^2$, $\bar{x}\bar{y}$ - mohou ovlivnit pouze koeficienty ostatních členů, které nás nyní nezajímají. Při určování koeficientů $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$ můžeme proto předpokládat, že $m = n = 0$. Dalšími úpravami posléze dostaneme $\bar{a}_{11} + \bar{a}_{22} = a_{11} + a_{22}$.

Věta 2: /O semiinvariantu $D_{11} + D_{22}$ rovnice kuželosečky/

Pro kuželosečku určenou rovnicí (2), pro kterou je $D = D_{33} = 0$, je číslo

$$D_{11} + D_{22} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}$$

invariantem při transformaci KASS otočením.

Důkaz se provede obdobně jako v případě c/. Viz též Svoboda, K.: Analytická geometrie II, SPN Praha 1968, str. 124.

Poznámky:

1/ Je-li $f(x,y) = 0$ (2)
rovnice kuželosečky k a je-li $\ell \neq 0$ reálné číslo, je také
$\ell f(x,y) = 0$ (7)
rovnicí téže kuželosečky k.

2/ Pro diskriminanty D a D′ a malé diskriminanty D_{33} a D'_{33} pořadě rovnic (2) a (7) platí

$$D' = \ell^3 D, \quad D'_{33} = \ell^2 D_{33} . \qquad (8)$$

3/ Ze (8) a věty 1 plyne: Pokud je malý diskriminant rovnic (2) a (7) různý od nuly, je znaménko malého diskriminantu kuželosečky vyjádřené těmito rovnicemi nezávislé na tom, kterou z rovnic je kuželosečka vyjádřena.

4/ Pro diskriminanty rovnic (2) a (7) a čísla

$$J = a_{11} + a_{22}, \quad J' = \ell a_{11} + \ell a_{22} ,$$

pokud jsou různá od nuly, obdobné tvrzení neplatí, protože pro $\ell < 0$ mají čísla D a D′ i čísla J a J′ znaménka opačná.

5/ Ze 4/ ⇒ pokud jsou součiny DJ a D′J′ různé od nuly, pak mají stejná znaménka.

6/ Pro semiinvarianty $D_{11} + D_{22}$ a $D'_{11} + D'_{22}$ pořadě rovnic (2) a (7) platí $D'_{11} + D'_{22} = \ell^2 (D_{11} + D_{22})$. Proto - pokud je součet $D_{11} + D_{22} \neq 0$, nezávisí jeho znaménko na tom, jakou rovnicí je kuželosečka vyjádřena.

Závěry:

1/ Platnost některého z výroků (9)

$D = 0$, $D \neq 0$, $D_{33} < 0$, $D_{33} = 0$, $D_{33} > 0$, $DJ < 0$, $DJ = 0$, $DJ > 0$, $D_{11} + D_{22} < 0$, $D_{11} + D_{22} = 0$, $D_{11} + D_{22} > 0$ nezávisí na tom, jakou rovnicí je kuželosečka k vyjádřena, ale závisí pouze na kuželosečce k.

2/ Pro každou z devíti kuželoseček uvedených v tab. 1 jsou v pravé části této tabulky uvedeny příslušné pravdivé výroky typu (9).

KUŽELOSEČKY

D	D_{33}	DJ	$D_{11}+D_{22}$	Kuželosečka		Normální rovnice	Speciální případy	Rovnice po transformaci
$\neq 0$	$= 0$	parabola				$y^2 = 2px$; $p>0$		$Jy^2 = \pm 2\sqrt{\frac{-D}{J}}\, x$
	> 0	< 0	elipsa		reálná	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$a = b$ kružnice $r = a$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{D}{D_{33}} = 0$
		> 0			Ø imaginární	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$		
	< 0	hyperbola				$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$a = b$ rovnoosá	
$= 0$	< 0	dvě různoběžky				$y^2 = k^2x^2$; $k>0$		
	> 0	bod				$y^2 = -k^2x^2$; $k>0$		
	$= 0$		< 0	dvě různé rovnoběžky		$y^2 = r^2$; $r>0$		$y^2 \pm \frac{D_{11} + D_{22}}{J^2} = 0$
			> 0	Ø		$y^2 = -r^2$; $r>0$		
			$= 0$	přímka		$y^2 = 0$		

Tabulka 1

Z této tabulky je zřejmé, že podle těchto výroků lze rozhodnout o tom, o jakou kuželosečku se jedná, bez ohledu na to, jakou rovnicí je vyjádřena. Viz též tabulku 2.

<table>
<tr><td colspan="9">Kuželosečka</td></tr>
<tr><td colspan="4">$D \neq 0$
regulární</td><td colspan="5">$D = 0$
singulární</td></tr>
<tr><td colspan="3">$D_{33} \neq 0$
středová</td><td>$D_{33} = 0$
nestředová</td><td colspan="2">$D_{33} \neq 0$
středová</td><td colspan="3">$D_{33} = 0$
nestředová</td></tr>
<tr><td colspan="2">$D_{33} > 0$
elipsa</td><td rowspan="2">$D_{33} < 0$
hyperbola</td><td rowspan="2">parabola</td><td rowspan="2">$D_{33} < 0$
dvě různoběžky</td><td rowspan="2">$D_{33} > 0$
bod</td><td rowspan="2">$D_{11}+D_{22} < 0$
dvě různé rovnoběžky</td><td rowspan="2">$D_{11}+D_{22} = 0$
přímka</td><td rowspan="2">$D_{11}+D_{22} > 0$
$\emptyset$</td></tr>
<tr><td>$DJ > 0$
imaginární
$\emptyset$</td><td>$DJ < 0$
reálná</td></tr>
</table>

Tabulka 2

Poznámka: Kuželosečka, pro kterou je $D_{33} \neq 0$ se nazývá středová. Pro středové kuželosečky vyjádřené normální rovnicí /viz. tab. 1/ platí: Pro každý bod $X = [x,y]$, jehož souřadnice jsou řešením rovnice kuželosečky platí, že také souřadnice bodu souměrného s ním dle počátku KASS, tj. bodu $X' = [-x,-y]$, jsou řešením rovnice kuželosečky. Pro imaginární elipsu tento výrok rovněž platí, neboť množina bodů X, jejichž souřadnice splňují její rovnici, je prázdná. Počátek KASS je tedy středem, přesněji středem souměrnosti uvažovaných kuželoseček. Podobně lze ukázat, že souřadné osy x, y jsou osami souměrnosti těchto kuželoseček. Uvažujte reálné středové kuželosečky /tj. všechny, kromě imag. elipsy/ a dokažte, že každá má právě jeden střed.

1. Středové kuželosečky- určení norm. rovnice užitím ortog. invariantů

Poznali jsme, že vhodnou transformací KASS lze dosáhnout toho, že střed kuželosečky k,

$$k \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1_s)$$

a její dvě osy splynou s počátkem a s osami nové KASS. Po provedení této transformace je

$$a_{12}' = a_{13}' = a_{23}' = 0,$$

takže rovnicí kuželosečky k v nové KASS je rovnice

$$k \equiv a_{11}'x'^2 + a_{22}'y'^2 + a_{33}' = 0. \qquad (2_s')$$

Abychom se vyhnuli čárkám a dvojitým indexům, označme

$$a_{11}' = \lambda_1, \quad a_{22}' = \lambda_2, \quad a_{33}' = \lambda_3.$$

Rovnici $(2_s')$ budeme psát ve tvaru

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 = 0. \qquad (2_s)$$

Důsledek věty 1:

Rovnice (1_s) a (2_s) mají tytéž ortogonální invarianty; proto platí:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \qquad (3_s)$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \qquad (4_s)$$

$$J = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad (5_s)$$

Z (3_s) a (4_s) plyne

$$\frac{D}{D_{33}} = \lambda_3 \qquad (6_s)$$

Z (5_s) plyne $\quad \lambda_2 = J - \lambda_1 \qquad 7_s$

Po dosazení ze (7_s) do (4_s) dostaneme:

$$\lambda_1 (J - \lambda_1) = D_{33}$$

$$\lambda_1 J - \lambda_1^2 = D_{33} \quad /.(-1)$$

$$\lambda_1^2 - J\lambda_1 + D_{33} = 0 \qquad (8_s)$$

Když do (4_s) dosadíme $\lambda_1 = J - \lambda_2$ /plyne z (5_s)/, dostaneme

$$\lambda_2^2 - J\lambda_2 + D_{33} = 0. \qquad (9_s)$$

Z (8_s) a (9_s) plyne, že λ_1, λ_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$\lambda^2 - J\lambda + D_{33} = 0.$$

Z provedené úvahy plyne

Věta 3 : /O normálním tvaru rovnice středové kuželosečky/

Rovnici každé středové kuželosečky lze vhodnou transformací KASS upravit na tvar

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{D}{D_{33}} = 0 , \qquad (\mathrm{I})$$

kde λ_1, λ_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$\lambda^2 - J\lambda + D_{33} = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

2. Charakteristická rovnice kuželosečky

Rovnici (II) můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (\mathrm{II}')$$

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{J}\lambda + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}_{D_{33}} = 0 .$$

Protože (II′) je charakteristická rovnice matice

$$A_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} ,$$

/což je matice kvadratických členů kvadratické formy (1), ev. rovnice kuželosečky (2)/ můžeme ji zapsat ve tvaru

$$|A_{33} - \lambda E| = 0 . \qquad \mathrm{II}'$$

Definice: Rovnice (II′) se nazývá charakteristická rovnice kuželosečky určené rovnicí (2)/též kvadratické formy (1) /.

Věta 4: Kořeny charakteristické rovnice kuželosečky určené rovnicí (2) jsou ortogonálními invarianty rovnice (2).

Důkaz: Tvrzení plyne z věty 1, neboť D_{33} a J jsou ortogonálními invarianty rovnice (2) .

Věta 5: Všechny kořeny charakteristické rovnice kuželosečky jsou reálné.

Důkaz:

a/ Středové kuželosečky: Pro diskriminant d kvadratické rovnice (II) platí

$$d = J^2 - 4D_{33} = \ldots\ldots = /a_{11} - a_{22}/^2 + 4a_{12}^2 \geq 0 \qquad (10)$$

Pro kružnici, jejíž rovnici lze psát ve tvaru $x^2 + y^2 = r^2$, je $a_{11} = a_{22}$ a $a_{12} = 0$. Je tedy $d = 0$ a příslušná charakteristická rovnice má v tomto případě dvojnásobný kořen.

b/ Nestředové kuželosečky: V tomto případě je $D_{33} = 0$, a tedy charakteristická rovnice (II) je v tomto případě ryze kvadratická. Je tedy jeden její kořen např. $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = J$.

Úloha 1. Určete druh a normální rovnici kuželosečky k, určené rovnicí $2x^2 + 12xy - 3y^2 + 20x - 24y - 40 = 0$

Poznámka

Určení normální rovnice kuželosečky užitím transformace KASS má výhodu v tom, že pomocí transformačních rovnic můžeme určit souřadnice významných bodů /např. středu, ohnisek, vrcholů/ kuželosečky v původní KASS. Řešení téhož úkolu pomocí ortogonálních invariantů je pohodlnější a rychlejší, ale vše máme vyjádřeno pouze v nové KASS. Tuto nevýhodu pro středové kuželosečky částečně odstraňuje věta 6.

Věta 6: /o souřadnicích středu středové kuželosečky/

Nechť $S = [m,n]$ je střed středové kuželosečky k určené rovnicí

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Pak pro čísla m, n platí

$$a_{11}m + a_{12}n + a_{13} = 0,$$
$$a_{12}m + a_{22}n + a_{23} = 0. \qquad (11)$$

Důkaz: Protože jde o středovou kuželosečku, je $D_{33} \neq 0$, což pro soustavu lineárních rovnic (11) v proměnných m, n znamená, že má jediné řešení. Z věty 3 plyne, že rovnici středové kuželosečky lze užitím vhodné transformace KASS upravit na tvar (I). Střed S kuželosečky pak splývá s počátkem a $a_{13}' = a_{23}' = 0$. Pro bod $S = [0,0]$ tedy platí, že jeho souřadnice jsou řešením soustavy (11). Je-li střed kuželosečky v bodě $S = [m,n]$ a $(m,n) \neq (0,0)$, provedeme posunutí KASS tak, aby nový počátek byl v bodě S. Rovnice kuželosečky se transformuje na tvar

$$a_{11}/x+m/^2 + 2a_{12}/x+m//y+n/ + a_{22}/y+n/^2 + 2a_{13}/x+m/ + 2a_{23}/y+n/ + a_{33} = 0.$$

Při této transformaci je

$$2a'_{13} = 2a_{11}m + 2a_{12}n + 2a_{13}$$
$$2a'_{23} = 2a_{12}m + 2a_{22}n + 2a_{23}\ .$$

Je-li však počátek nové KASS v bodě S, je $a'_{13} = a'_{23} = 0$. Čísla m, n jsou tedy řešením soustavy (11).

Úloha 2. Určete souřadnice středu kuželosečky /hyperboly/ z ulohy 1.

3. Nestředové kuželosečky - určení normální rovnice užitím ortogonálních invariantů

a/ regulární kuželosečky, tj. parabola

Ukázali jsme, že užitím vhodné transformace KASS lze parabolu vyjádřit rovnicí

$$y^2 = 2px \ , \quad p>0. \qquad (1)$$

Je-li $\ell \neq 0$ reálné číslo, je také rovnice

$$\ell y^2 = 2p\ell x$$

rovnicí téže paraboly. Úpravou dostáváme:

$$\ell y^2 - 2p\ell x = 0.$$

V této rovnici je koeficient $a_{22} = \ell$, $a_{13} = -p\ell$, všechny ostatní koeficienty jsou rovny nule.
Platí:

$$D = |A| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p\ell \\ 0 & \ell & 0 \\ -p\ell & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| \Rightarrow D = -p^2\ell^3 \ , \quad D_{33} = 0 \qquad (2)$$

$$D = -p^2J^3 \ / \ (-1)$$
$$-D = p^2J^3$$
$$J = 0 + \ell = \ell \qquad p^2 = \frac{-D}{J^3}$$
$$p = \sqrt{\frac{-D}{J^3}} = \frac{1}{|J|}\sqrt{\frac{-D}{J}} = \pm\frac{1}{J}\sqrt{\frac{-D}{J}}\ .$$

Po dosazení za p do rovnice (1) dostáváme

$$y^2 = \pm\frac{2}{J}\sqrt{\frac{-D}{J}}\,x \qquad (III)$$

Úloha 3. Určete normální rovnici kuželosečky k,
$k \equiv x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0.$

b/ singulární kuželosečky

Ukázali jsme, že užitím vhodné transformace KASS lze každou z těchto kuželoseček vyjádřit některou z rovnic

$$y^2 \pm r^2 = 0 \ , \ \text{kde } r \geq 0. \qquad (3)$$

Je-li $\ell \neq 0$ reálné číslo, jsou rovnice

$$\ell y^2 + \ell r^2 = 0, \ \ell y^2 - \ell r^2 = 0 \quad , \ r \geq 0,$$

rovnicemi těchže kuželoseček.

Pro koeficienty v těchto rovnicích platí: $a_{22} = \ell$, $a_{33} = \pm\ell r^2$, všechny ostatní jsou rovny nule, tj.

$$D = |A| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell & 0 \\ 0 & 0 & \pm\ell r^2 \end{pmatrix}\right| \Rightarrow D = D_{33} = 0, \quad J = \ell\ . \qquad (4)$$

Pro součet $D_{11} + D_{22}$ platí:

$$D_{11} + D_{22} = \pm\ell^2r^2$$
$$D_{11} + D_{22} = \pm J^2r^2$$
$$r^2 = \pm\frac{D_{11} + D_{22}}{J^2}$$

Po dosazení do (3) dostaneme normální rovnici nestředové singulární kuželosečky

$$y^2 \pm \frac{D_{11} + D_{22}}{J^2} = 0 \ , \qquad (IV)$$

ve které zvolíme znaménko + nebo - podle tab. 1 vzhledem k součtu $D_{11} + D_{22}$.

Úloha 4. Určete normální rovnice kuželosečky k,
$k \equiv x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 6 = 0$

Určení os regulární kuželosečky

Středem elipsy a hyperboly je vlastní bod, jedná se o středové kuželosečky. Parabola nemá vlastní střed, proto je kuželosečkou nestředovou. Za nevlastní střed paraboly můžeme považovat nevlastní bod její osy.

Průměrem kuželosečky budeme rozumět každou přímku, která prochází jejím středem /pro parabolu nevlastním/.

Poznámka: Z konstrukční geometrie známe definici sdružených průměrů elipsy. Obdobně se definují i sdružené průměry hyperboly. Protože všechny průměry paraboly jsou navzájem rovnoběžné, nelze pro ni obdobně definovat sdružené průměry. Zavedeme tedy pojem sdružené směry kuželosečky.

Pro sdružené směry platí:
Tečny elipsy a hyperboly sestrojené v jejích průsečících s průměrem, který není asymptotou, jsou rovnoběžné s průměrem s ním sdruženým. Sdružené průměry elipsy a hyperboly určují jejich sdružené směry.

Tečna paraboly v jejím daném bodě má směr sdružený s průměrem paraboly, který tímto bodem prochází.

Definice: Směr, který je vzhledem ke kuželosečce sdružen se směrem k němu kolmým, se nazývá hlavní směr kuželosečky.

O hlavních směrech kuželosečky platí tato tvrzení:

1. Každá kuželosečka má aspoň jednu dvojici navzájem kolmých hlavních směrů /elipsa, hyperbola a parabola právě jednu, kružnice nekonečně mnoho /.
2. Víme, že všechny kořeny charakteristické rovnice jsou reálné. Dále platí, že charakteristické vektory, příslušné ke dvěma různým charakteristickým kořenům této rovnice jsou ortogonální.
3. Charakteristické vektory příslušné ke dvěma různým charakteristickým kořenům charakteristické rovnice kuželosečky určují hlavní směry kuželosečky /elipsy, hyperboly, paraboly/.
4. Charakteristická rovnice kružnice má dvojnásobný charakteristický kořen /viz. str. 12/, kterému odpovídají všechny směry jako hlavní. Kružnice má nekonečně mnoho dvojic hlavních směrů.

5. Vlastní průměr sdružený s hlavním směrem se nazývá osa kuželosečky. Každá osa kuželosečky je její osou souměrnosti.
6. Průměr sdružený s hlavním směrem kuželosečky je její osou tehdy a jen tehdy, když příslušný kořen charakteristické rovnice je nenulový /proto má parabola pouze jednu osu - viz str. 12/.

Úloha 5. Určete osy hyperboly z úlohy 1.

Geometrie

Literatura:

Sekanina, M. a kol.: Geometrie I. SPN, Praha 1986.

Sekanina, M. a kol.: Geometrie II. SPN, Praha 1988.

Svoboda, K.: Analytická geometrie II, skriptum. SPN, Praha 1969.

Hejný, M. a kol.: Geometria I. SPN, Bratislava 1985.

Klapka, J.: Analytická geometrie. SNTL, Praha 1960.

Budinský, B., Charvát, J.: Matematika I. SNTL/ALFA, Praha 1987.

Menšík, M., Setzer, O.: Deskriptivní geometrie I. SNTL, Praha 1976.