Literatura: Svoboda, K.: Geometrie kvadrik. SPN, Praha 1983.

K V A D R I K Y

Pojmy

<u>Nehomogenní kvadratická forma</u> ve třech proměnných x, y, z :

$$f(x,y,z)= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} \quad , \qquad (1)$$

kde a_{ij} /$1 \leq i \leq j \leq 4$/ jsou libovolná reálná čísla splňující podmínku

$$(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}) \neq (0,0,0,0,0,0) \quad .$$

<u>Kvadratická plocha</u>, krátce <u>kvadrika</u> = bodové jádro kvadratické formy (1).

<u>Rovnice kvadriky</u>: $f(x,y,z) = 0$ (2)

<u>Matice kvadratické formy</u> (1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Matice A je symetrická.

Rovnici kvadriky $f(x,y,z) = 0$ lze zapsat ve tvaru:

$$X^T A X = 0, \text{ kde } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} .$$

<u>Diskriminant</u> /velký/ <u>kvadratické formy</u> $D = |A|$.

<u>Malý diskriminant kvadratické formy</u> = diskriminant kvadratických členů

$$D_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad .$$

$D_{44} = |A_{44}|$, kde A_{44} se nazývá matice kvadratických členů.

<u>Lineární invariant</u> kvadratické formy (1):

$$J_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad .$$

<u>Kvadratický invariant</u> kvadratické formy (1):

$$J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = (D_{33})_{44} + (D_{22})_{44} + (D_{11})_{44},$$

kde $(D_{ij})_{44}$ = minor prvku a_{ij} v A_{44}.

<u>Ortogonální invarianty</u> kvadratické formy /nemění se při transformaci KASS/ : D, D_{44}, J_1, J_2 .

<u>Semiinvarianty</u> /nemění se při transformaci KASS otočením/:

$$S_3 = D_{33} + D_{22} + D_{11} ,$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} .$$

<u>Charakteristická rovnice kvadratické formy</u> /je třetího stupně/

$$|A_{44} - \lambda E| = 0$$

$$\lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - D_{44} = 0$$

Všechny kořeny charakteristické rovnice jsou reálné a jsou ortogonálními invarianty kvadratické formy (1).

<u>Lineární faktory</u> kvadratické formy:

Kvadratickou formu (1) lze vyjádřit následujícím způsobem:

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}$$

$$= x\underbrace{(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14})}_{L_1} + y\underbrace{(a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24})}_{L_2} +$$

$$+ z\underbrace{(a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z+a_{34})}_{L_3} + \underbrace{a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z+a_{44}}_{L_4} =$$

$$= \underline{L_1x + L_2y + L_3z + L_4}$$

Výrazy L_i, i = 1,2,3,4 nazýváme <u>lineární faktory</u> kvadratické formy $f(x,y,z)$ - koeficienty lineárního faktoru L_i jsou z i-tého řádku matice A.

Poznámka: Všechny uvedené pojmy vztahující se ke kvadratické formě (1) se vztahují též k rovnici kvadriky (2), ev. ke kvadrice, určené rovnicí (2) – tj. D nazýváme též diskriminantem rovnice (2), ev. kvadriky určené rovnicí (2), podobně D_{44} atd.

Kvadrika, jejíž diskriminant D je různý od nuly, se nazývá <u>regulární</u>, v opačném případě <u>singulární</u>.

Kvadrika, jejíž malý diskriminant D_{44} je různý od nuly se nazývá <u>středová</u>, v opačném případě <u>nestředová</u>.

Souřadnice středu $S = [x,y,z]$ středové kvadriky $f(x,y,z) = 0$ jsou řešením soustavy lineárních rovnic

$$L_1 = 0$$
$$L_2 = 0$$
$$L_3 = 0 .$$

<u>Úloha 1.</u> Je dána kvadrika Q rovnicí

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 18 = 0.$$

Určete, zda je kvadrika Q regulární a středová.

Řešení:

$$D = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & 5 & 9 \\ -3 & -12 & 9 & 18 \end{vmatrix} = -2916 \neq 0 \Rightarrow \text{kvadrika Q je regulární.}$$

$$D_{44} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 162 \neq 0 \Rightarrow \text{kvadrika Q je středová}$$

Souřadnice středu S = x,y,z :

$$\begin{aligned} 7x - 2y - 3 &= 0 \\ -2x + 6y - 2z - 12 &= 0 \\ -2y - 5z + 9 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení: $x = 1,\ y = 2,\ z = -1 \quad \Rightarrow S = [1, 2, -1]$.

<u>Hlavní směry a hlavní průměrové roviny kvadriky</u>

<u>Věta:</u> Je-li dána kvadrika $Q \equiv f(x,y,z) = 0$ a vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, pak pro každou přímku rovnoběžnou s vektorem $\vec{u}$, která protíná Q ve dvou bodech A, B platí: střed tětivy AB leží v rovině

$$\sigma \equiv u_1L_1 + u_2L_2 + u_3L_3 = 0 .$$

<u>Definice:</u> Rovina σ z předcházející věty se nazývá průměrová rovina sdružená s vektorem $\vec{u}$.

<u>Definice:</u> Je-li vektor $\vec{u}$ kolmý k průměrové rovině s ním sdružené vzhledem k dané kvadrice, říkáme, že vektor $\vec{u}$ určuje <u>hlavní směr</u> této kvadriky. Průměrová rovina s ním sdružená se nazývá <u>hlavní průměrová rovina</u>.

<u>Poznámky:</u>

1. Z předchozích definic plyne, že hlavní průměrová rovina kvadriky je její osou souměrnosti.
2. Průsečnice hlavních průměrových rovin kvadriky /pokud existují/ jsou osami souměrnosti kvadriky.

<u>Věta:</u> Směr generovaný vektorem $\vec{u}$ je hlavním směrem kvadriky tehdy a jen tehdy, je-li charakteristickým vektorem matice A_{44} jejích kvadratických členů.

<u>Poznámky:</u>

1. Všechny charakteristické kořeny matice A_{44} jsou <u>reálné</u>, charakteristické vektory příslušné <u>ke dvěma různým</u> charakteristickým kořenům <u>jsou navzájem kolmé</u>.
2. Vzhledem k tomu, že charakteristická rovnice matice A_{44} je třetího stupně, může mít
   a/ <u>tři různé</u> charakteristické kořeny – jim odpovídají tři různé hlavní směry kvadriky, které určují směry jejích os /souměrnosti/. Každými dvěma /kolmými/ osami je určena hlavní průměrová rovina, která je rovinou souměrnosti kvadriky. /např. nerotační elipsoid./
   b/ jeden <u>dvojnásobný</u> kořen $\lambda_{1,2}$ – k němu přísluší charakteristický podprostor dimenze 2, který můžeme považovat za zaměření jisté roviny ϱ . Každý vektor $\vec{u} \in Z(\varrho)$ určuje hlavní směr. Těchto hlavních směrů je nekonečně mnoho a jim přísluší nekonečně mnoho hlavních průměrových rovin. K charakteristickému kořenu λ_3 přísluší charakteristický vektor $\vec{u}_3 \perp \varrho$, který určuje směr osy, která leží ve všech hlavních průměrových rovinách příslušných

k hlavním směrům rovnoběžným se $Z(\varrho)$./Příklady: rotační elipsoid, rotační hyperboloid, rotační kuželová a rotační válcová plocha./

c/ trojnásobný kořen ⇒ každý směr v $Z(E_3)$ je hlavním směrem. Kvadrika má nekonečně mnoho os a rovin souměrnosti. /Příklad: kulová plocha./

Věta: Hlavní průměrová rovina

$$u_1L_1 + u_2L_2 + u_3L_3 = 0$$

je vlastní rovinou tehdy a jen tehdy, když vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, určující hlavní směr, přísluší charakteristickému kořenu různému od nuly.

Jinak řečeno: k charakteristickému kořenu 0 přísluší hlavní směr, k němuž příslušná hlavní rovina je nevlastní. Příklad: eliptický paraboloid.

Středové kvadriky: $D_{44} \neq 0$

J_2, J_1D_{44}	D	Kvadrika		Normální rovnice	Speciální případy	Rovnice po transformaci
obě kladné	<0	elipsoid	reálný	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	a=b rotační a=b=c kulová plocha, r=a	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+\frac{D}{D_{44}}=0$
	>0		imaginární	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$		
	$=0$	bod (imaginární kuželová plocha)		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$		
aspoň jedno záporné	<0	hyperboloid	dvojdílný	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	a=b rotační	
	>0		jednodílný	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		
	$=0$	kuželová plocha (reálná)		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	a=b rotační	

Nestředové kvadriky: $D_{44} = 0$

D	J_2	J_1S_3	S_3	S_2	Kvadrika		Normální rovnice	Speciální případy	Rovnice po transformaci
<0	paraboloid				eliptický		$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$	p=q rotační paraboloid	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2\pm2\sqrt{-\frac{D}{J_2}}\,z=0$
>0					hyperbolický		$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$		
$=0$	>0	<0			eliptická válcová plocha	reálná	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	a=b rotační válcová plocha	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{S_3}{J_2}=0$
		>0				imaginární	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$		
		$=0$	$=0$		přímka (reálná)		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$		
	<0		$\neq0$		hyperbolická válcová plocha		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		
			$=0$		dvě různoběžné roviny (reálné)		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$		
	$=0$		$\neq0$		parabolická válcová plocha		$x^2-2py=0$		$\lambda_1x^2\pm2\sqrt{-\frac{S_3}{J_1}}\,y=0$
			$=0$	<0	dvojice rovnoběžných rovin: různých	reál.	$x^2-a^2=0$		$\lambda_1x^2+\frac{S_2}{J_1}=0$
				>0		imag.	$x^2+a^2=0$		
				$=0$	splývajících (reálných)		$x^2=0$		

Určení normální rovnice kvadriky transformací KASS

1) Určíme kořeny charakteristické rovnice kvadriky.

2) Určíme k nim příslušné charakt. vektory - tj. hlavní směry kvadriky (vybereme 3 navzájem kolmé hlavní směry).
(Má-li charakt. rovnice tři různé kořeny, pak k nim přísluší tři navzájem kolmé hlavní směry kvadriky.
Má-li charakt. rovnice jeden dvojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2$, přísluší k němu charakt. vektorový podprostor dim 2 - můžeme jej považovat za zaměření nějaké roviny ϱ. Každý vektor $\vec{u} \in Z(\varrho)$ určuje hlavní směr kvadriky. Vybereme z nich dva navzájem kolmé - užijeme např. Gramm-Schmidtův ortog. proces*. Charakteristický vektor $\vec{u}_3$, který přísluší k charakt. kořenu λ_3, je kolmý na každý vektor $Z(\varrho)$. Získáme tak tři navzájem kolmé hlavní směry kvadriky.
Má-li charakt. rovnice trojnásobný kořen, je každý směr v $Z(E_3)$ hlavním směrem kvadriky. Určíme pak tři libovolné navzájem kolmé hlavní směry - opět užijeme *.)

3) Jsou-li $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ vektory, které určují tři navzájem kolmé hlavní směry kvadriky, normujeme je. Dostaneme tak vektory $\vec{u}_1', \vec{u}_2', \vec{u}_3'$, které zvolíme za základní vektory nové KASS = $KASS_2$.

4) Napíšeme transformační rovnice pro přechod od původní KASS = $KASS_1$ ke $KASS_2$:

$$X = AX',$$

kde A je matice přechodu od báze $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (zákl. vektory $KASS_1$) k bázi $\vec{u}_1', \vec{u}_2', \vec{u}_3'$.

5) Dosadíme za x, y, z z těchto rovnic do rovnice kvadriky (po úpravě „vypadnou" smíšené členy).

6) Pak „doplníme na čtverce" a po příslušných úpravách dostaneme normální rovnici kvadriky (realizujeme posunutí KASS).

Příklad:

$$Q \equiv 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$$

charakt. kořeny: $\lambda_1 = 6$ $\vec{u}_1 = (1, -2, -1)$, $\vec{u}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$

$\lambda_2 = 3$ $\vec{u}_2 = (1, 1, -1)$, $\vec{u}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\lambda_3 = 0$ $\vec{u}_3 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Transf. rovnice: $X = AX'$, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}(x' + y'\sqrt{2} + z'\sqrt{3})$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2x' + y'\sqrt{2})$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{6}}(-x' - y'\sqrt{2} + z'\sqrt{3})$$

Dosazení do rovnice Q:

$$\frac{2}{6}(x' + y'\sqrt{2} + z'\sqrt{3})^2 + \frac{5}{6}(-2x' + y'\sqrt{2})^2 + \frac{1}{6}(-x' - y'\sqrt{2} + z'\sqrt{3})^2 - \dots = 0$$

Po úpravě dostaneme:

$$6x'^2 + 3y'^2 + \frac{24}{\sqrt{6}}x' - \frac{6}{\sqrt{3}}y' - 1 = 0$$

Doplnění na čtverce + posunutí

$$6\left(x'^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}x'\right) + 3\left(3y'^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}y'\right) = 1$$

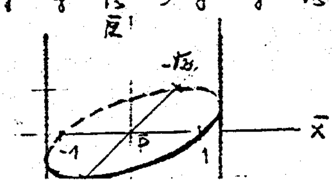
$$6\left(x' + \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + 3\left(y' - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 + \frac{24}{6} + 1$$

$$6\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 = 6 \quad |:6$$

$$\frac{\bar{x}^2}{1} + \frac{\bar{y}^2}{2} = 1 \quad \text{normální rovnice}$$

$\bar{x} = x' + \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow x' = \bar{x} - \frac{2}{\sqrt{6}}$ Posun

$\bar{y} = y' - \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y' = \bar{y} + \frac{1}{\sqrt{3}}$



Svoboda, K.: Analytická geometrie II. SPN, Praha 1969, str. 170 - 182.

8.2. Metrická klasifikace kvadrik

Podobně jako u kuželoseček najdeme nejjednodušší tvary rovnice kvadriky v kartézské soustavě souřadnic.

Věta 8.2.1. Rovnici každé kvadriky lze vhodnou volbou kartézské soustavy souřadnic uvést na právě jeden z těchto tvarů:

(K1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$ imaginární elipsoid

(K2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$ reálný elipsoid

(K3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$ jednodílný hyperboloid

(K4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$ dvojdílný hyperboloid

(K5) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0$ $(p > 0,\ q > 0)$, eliptický paraboloid

(K6) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0$ $(p > 0,\ q > 0)$, hyperbolický paraboloid

(K7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$ imaginární kužel

(K8) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$ reálný kužel

(K9) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0,$ imaginární eliptický válec

(K10) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$ reálný eliptický válec

(K11) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$ hyperbolický válec

(K12) $x^2 - 2pz = 0$ $(p > 0)$, parabolický válec

(K13) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$ dvojice imag. sdružených různoběžných rovin

(K14) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$ dvojice reálných různoběžných rovin

(K15) $x^2 + a^2 = 0,$ dvojice imag. sdružených rovnoběžných rovin

(K16) $x^2 - a^2 = 0,$ dvojice reálných rovnoběžných rovin

(K17) $x^2 = 0.$ dvojná reálná rovina

Důkaz. V podstatných rysech je důkaz obdobný jako důkaz věty 7.4.1. Podrobněji se jím proto nebudeme zabývat.

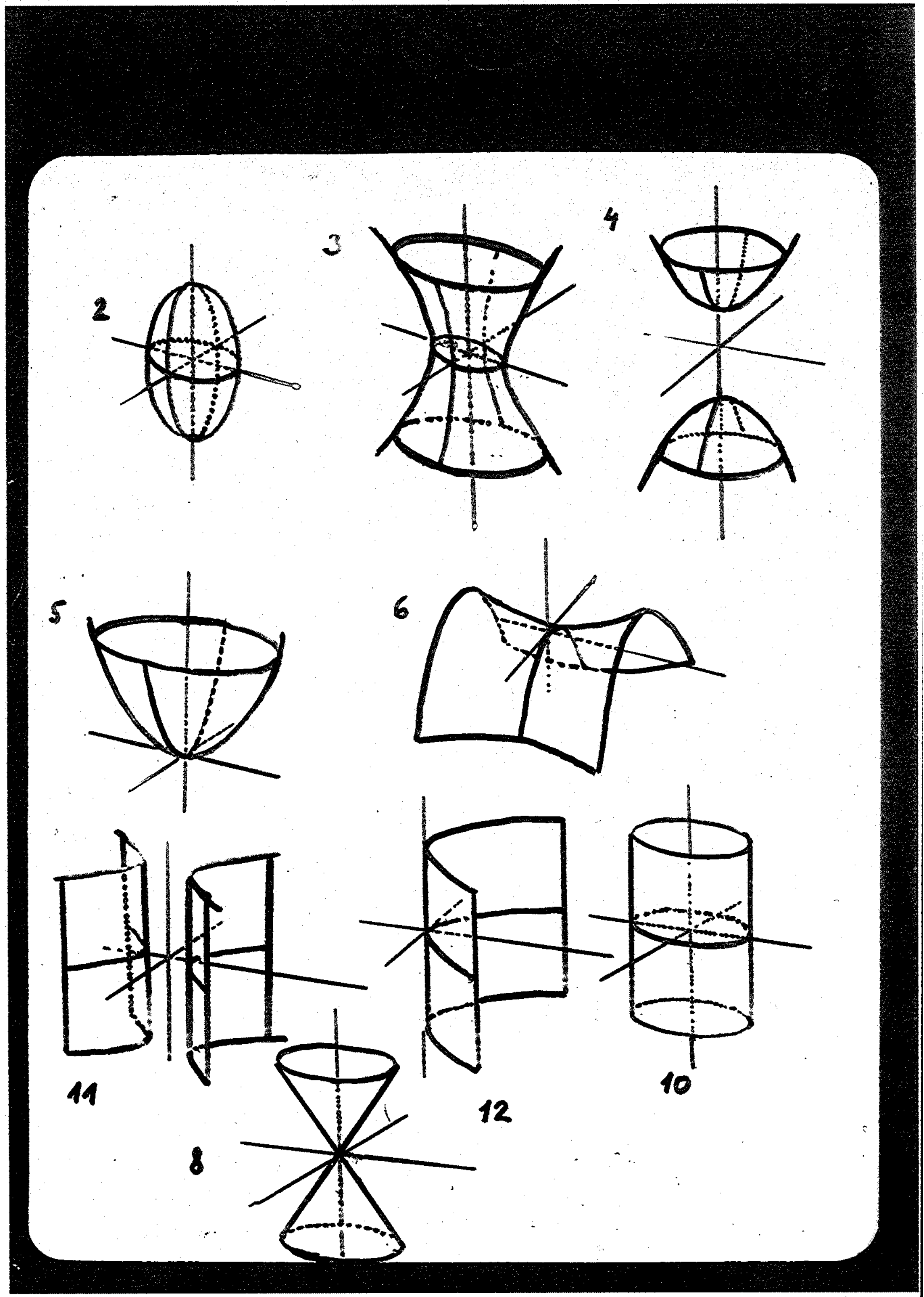
Poznámka 1. Rovnicím (K1) až (K17) se říká kanonické nebo normální rovnice kvadriky v kartézské soustavě souřadnic.

Poznámka 2. Pro kvadriku (K4) se častěji používá kanonické rovnice

(K4) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

která vznikne z příslušné rovnice uvedené ve větě 8.2.1 vhodnou záměnou označení. Podobně pro kvadriku (K12) lze použít kanonické rovnice

(K12) $$y^2 - 2px = 0.$$


2
3
4
5
6
11
12
10
8

Cvičení

(1) Určete průniky kvadriky se souřadnými rovinami a osami souřadnými:

a) $x^2+2y^2+3z^2=6$

b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}-\frac{z^2}{9}=1$

c) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{1}=1$

d) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-2z=0$

e) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}-2z=0$.

Vyšetřete též její průniky s rovinami rovnoběžnými se souřadnými rovinami. Načrtněte obrázek.

(2) Užitím transformace KASS určete normální rovnici a typ kvadriky Q,

$Q\equiv 6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+1=0$

[$\frac{\bar{x}^2}{\frac{5}{8}}+\frac{\bar{y}^2}{\frac{5}{4}}-\frac{\bar{z}^2}{\frac{5}{2}}=1$, jednodílný hyperboloid]

(3) Určete hlavní směry kvadriky Q,

$Q\equiv 7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-18=0$

[$\lambda_1=3$, $\vec{u}_1\in\langle(1,2,2)\rangle$; $\lambda_2=6$, $\vec{u}_2\in\langle(2,1,-2)\rangle$; $\lambda_3=9$, $\vec{u}_3\in\langle(2,-2,1)\rangle$]

Dále určete, zda jde o středovou kvadriku a určete příp. její střed, osy a hlavní průměrové roviny.

[$S=[0,0,0]$, $o_1\equiv X=[0,0,0]+t(1,2,2)$, $\sigma_1\equiv x+2y+2z=0$; ....]

Určete též typ a normální rovnici kvadriky Q (využijte tabulku).

[Q: reálný elipsoid, normální rovnice $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{2}=1$]

(4) Určete typ a normální rovnici kvadriky

a) $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz+6=0$, $(\lambda_3=6)$

b) $x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-2yz-4x+8y-12z+14=0$, $(\lambda_3=-$

c) $2xy+2yz-2xz-4x+1=0$, $(\lambda_1=1)$

d) $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$ $(\lambda_1=-3)$

Je-li středová, určete její střed, je-li rotační, určete parametrickou rovnici osy rotace a obecnou rovnici k ní kolmé roviny souměrnosti (pokud existují). Není-li rotační, určete parametrickou rovnici jedné její osy a obecnou rovnici k ní kolmé roviny souměrnosti (pokud existují).

Výsledky:

a) rotační jednodílný hyperboloid $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{1}=1$,
$S=[0,0,0]$, osa rotace $o\equiv X=[0,0,0]+t(2,1,-2)$,
k ní kolmá rovina souměrnosti: $2x+y-2z=0$

b) dvojdílný hyperboloid $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{3}=-1$,
$S=[1,0,1]$ $o_1\equiv X=[1,0,1]+t(1,-2,2)$, $\sigma_1\equiv x-y+2z-3=0$
$o_2\equiv X=[1,0,1]+t(-1,1,1)$, $\sigma_2\equiv x-y-z=0$
$o_3\equiv X=[1,0,1]+t(1,1,0)$, $\sigma_3\equiv x+y-1=0$

c) jednodílný rotační hyperboloid $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{\frac{1}{2}}=1$
$S=[1,1,-1]$, osa rotace $o\equiv X=[1,1,-1]+t(1,-1,1)$,
k ní kolmá rovina souměrnosti: $x-y+z+1=0$

d) rotační kuželová plocha $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-z^2=0$
Střed - vrchol $V=[1,1,-1]$
osa rotace $o\equiv X=[1,1,-1]+t(2,1,-2)$,
k ní kolmá rovina souměrnosti:
$2x+y-2z-5=0$.