DYNAMIKA, PEVNOST A PRUŽNOST

STROJE A ZAŘÍZENÍ – ČÁSTI A MECHANISMY STROJŮ

DYNAMIKA

Vedle statiky a kinematiky je dynamika další částí mechaniky, která řeší chování „idealizovaných“ mechanismů.

Dynamika se zabývá hlavně pohyby a vzájemnými interakcemi mezi tuhými tělesy pohybujícími se jako celek s nenulovým zrychlením.

V dynamických soustavách je nutno kromě „standardních“ působících silových účinků známých ze statiky uvažovat i silové účinky související s neinerciálností vztažné soustavy (*setrvačné síly a setrvačné momenty*).

DYNAMIKA – POHYBOVÉ ROVNICE

Doplnění rovnic stat. rovnováhy pohybovými rovnicemi.

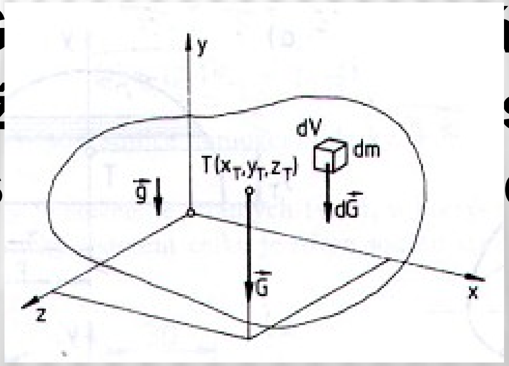
ROVNICE STATICKÉ ROVNOVÁHY	POHYBOVÉ ROVNICE
$\mathbf{\Sigma F_i=0}$ - silová podmínka statické rovnováhy $\mathbf{\Sigma M_{oi}=0}$ - momentová podmínka statické rovnováhy vzhledem k ose <u>*o*</u>	$\mathbf{\Sigma F_i}=m\mathbf{a}$ – pohybová rovnice pro translační pohyb tělesa $\mathbf{\Sigma M_{oi}=I}_o\boldsymbol{\alpha}$ - pohybová rovnice pro rotační pohyb tělesa kolem stálé osy otáčení

DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

Z hlediska dynamiky je hmotný bod modelem reálného tělesa, které koná translační pohyb pod působením centrální silové soustavy, jejíž výslednice prochází v těžištěm.

Hmotný bod nemá rozměry, hmotnost je soustředěna do těžiště.

Těžiště – V gravitačním poli země působí na každé hmotné těleso gravitační síla (G … ární tíhové síly tvoří soustavu rovnobě… sko ve kterém působí výsledná tíhová s… ěžiště.



POHYBOVÉ ZÁKONY

1. Newtonův pohybový zákon (zákon setrvačnosti).

Nepůsobí-li na těleso žádná vnější síla, zůstává těleso v relativním klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu.

$$\text{Je-li } \mathbf{F} = 0 \quad \text{je} \quad \mathbf{v} = \mathbf{konst}.$$

Matematické vyjádření:

Míru pohybu tělesa při translačním pohybu charakterizuje hybnost (součin hmotnosti a rychlos

$$\mathbf{h} = m \cdot \mathbf{v}.$$

2. Newtonův pohybový zákon

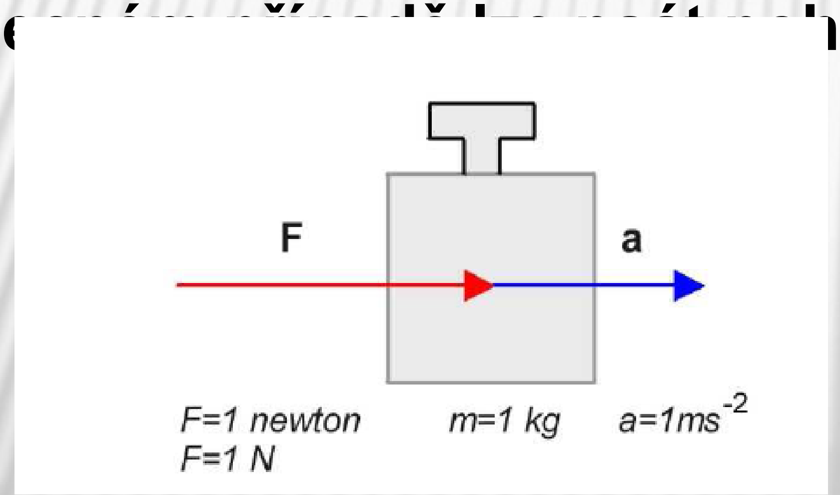
Těleso setrvává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, pokud není nuceno vnějšími silami tento stav změnit.

POHYBOVÉ ZÁKONY

Z 2. Newtonova zákona vyplývá (z hlediska dynamiky), že *časová změna hybnosti je úměrná působící síle a má stejný směr jako působící síla.*

Limitně lze psát, že $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ **, kde a je zrychlení tělesa.**

V obe hybovou rovn $\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$



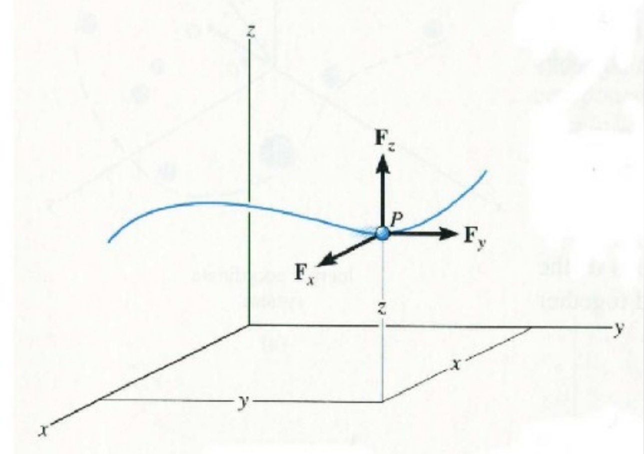
POHYBOVÉ ZÁKONY

3. Newtonův pohybový zákon (akce a reakce)

Každá síla působící na těleso z vnějšku (akce) vyvolává stejně velkou, opačně orientovanou sílu (reakci).

Pohybová rovnice pro bodové těleso:

$$\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$$



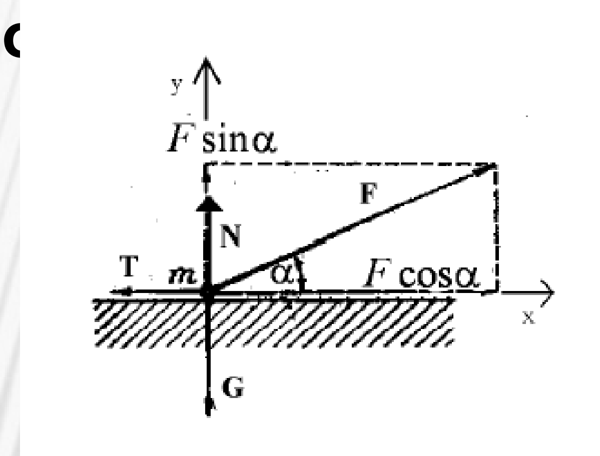
$$x: \sum F_{ix} = ma_x = m\ddot{x}$$

$$y: \sum F_{iy} = ma_y = m\ddot{y}$$

$$z: \sum F_{iz} = ma_z = m\ddot{z}$$

ZRYCHLENÍ BODU PŘI TRANSLAČNÍM POHYBU

Př. Výpočtu zrychlení hmotného bodu při translačním pohybu po



Vektorová pohybová rovnice: $\mathbf{F}+\mathbf{T}+\mathbf{N}+\mathbf{G}=m\mathbf{a}$.

Rozložíme-li sílu na složku kolmou a tečnou k rovině pak ve složkách platí

$$x\ :\ F\cos\alpha - T = ma$$

$$y\ :\ F\sin\alpha + N - G = 0$$

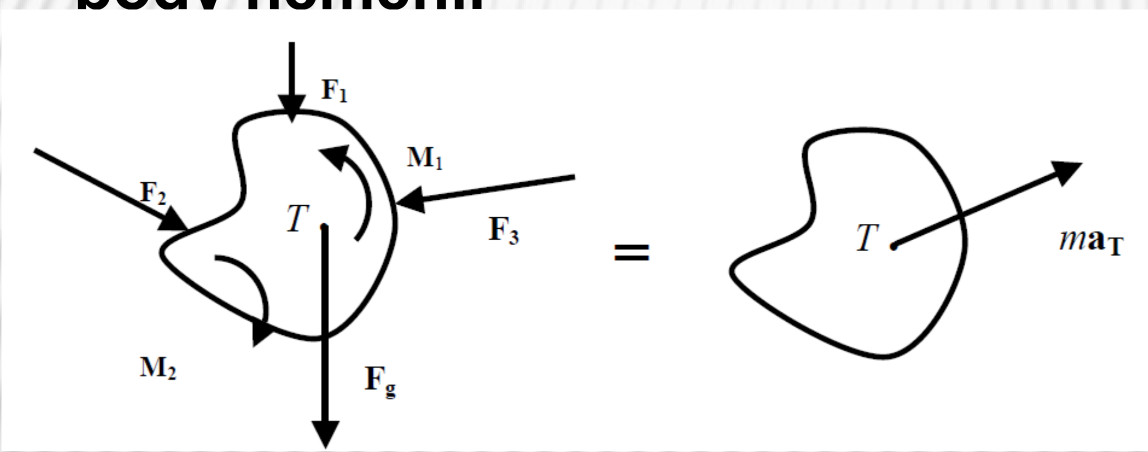
Pro normálovou sílu pak vychází: $N = G - F\sin\alpha$. Uvážíme-li že třecí síla: $T = Nf$

dostáváme pro zrychlení

$$a=\frac{F\cos\alpha \ -\left(G-F\sin\alpha\right)f}{m}.$$

DYNAMIKA TUHÉHO TĚLESA

Tuhé těleso chápeme jako zvláštní případ soustavy hmotných bodů, pro kterou platí, že bez ohledu na pohyb a působící síly se vzdálenost mezi jednotlivými body nemění.

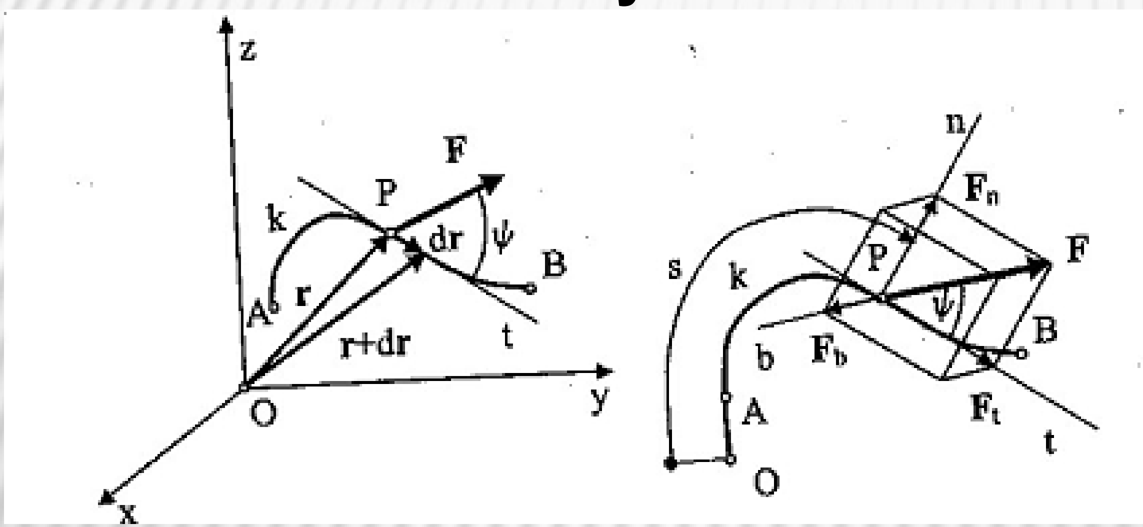


$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_T$$
$$\mathbf{M}_T = 0$$

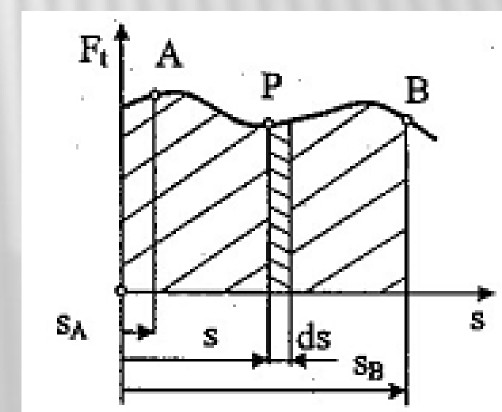
$$\sum_i F_{ix} = m a_{Tx}\,,\ \sum_i F_{iy} = m a_{Ty}\,,\ \sum_i \left(M_{Ti}\right)_z = \sum_i \left(x_i F_{yi} - y_i F_{xi}\right) = 0$$

MECHANICKÁ PRÁCE A ENERGIE

Mechanická práce - při posouvání působiště síly ve směru jejího působení koná síla mechanickou práci. Tento účinek síly vede ke **změně energií** ve zkoumané



$$\mathrm{d}W = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = F \cos\psi \,\mathrm{d}s$$



Pokud známe závislost síly na

Proběhnuté dráze lze práci vyjádřit jako

Plochu pod diagramem závislosti

VÝKON A ÚČINNOST

Výkon je definován jako množství práce za čas. Vyjadřuje intenzitu konání práce.

Okamžitý výkon je definován jako podíl elementární práce dW a elementárního času:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

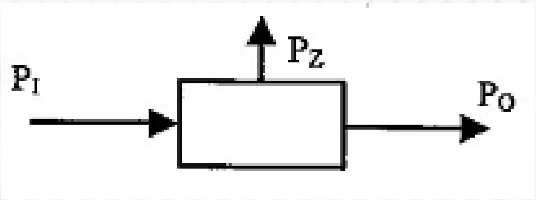
Jednotkou výkonu je 1 W (watt) = N.m.s^{-1} = J. s^{-1}

Okamžitý výkon je proměnný v čase:

$$P_{\text{stř.}} = \frac{W}{t}$$

VÝKON A ÚČINNOST

Účinnost – v každém reálném zařízení dochází ke ztrátám (Pz - ztráty), které představují pasívní odpory.



Základní energetická bilance systému je da $P_O = P_I - P_Z$

kde Po je výkon, P_I je příkon, Pz jsou ztráty (nejčastěji ve formě tepla).

Platí, že Pz > 0

pak $P_0 < P_I$

Definujeme pojem okamžitá účinnost.

VÝKON A ÚČINNOST

Okamžitá mechanická účinnost – je poměr okamžitého výkonu (P_0) a okamžitého příko

$$\eta = \frac{P_O}{P_I}$$

platí, že η < 1

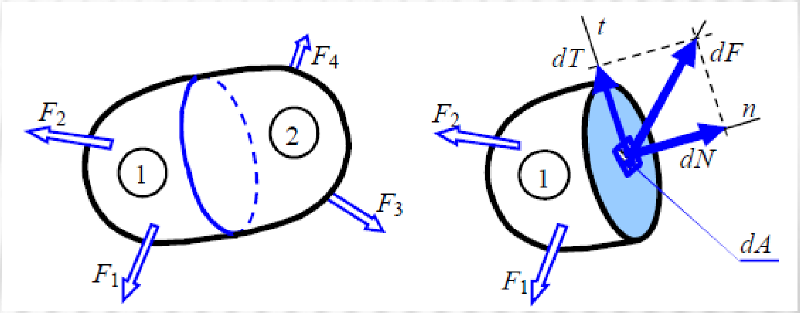
Okamžitou účinnost , lze vypočíst také dosazením elementárních prací soustavy – vstupního stavu a výstupního stavu.

$$\eta = \frac{\mathrm{d}W_O}{\mathrm{d}W_I}$$

PEVNOST A PRUŽNOST – ZÁKL. POJMY

SÍLY

Vnější (zatěžující) | **Vnitřní**



Pevnost tělesa– schopnost tělesa odolávat porušení.

Pružnost tělesa– schopnost tělesa vrátit se po odlehčení do výchozího stavu.

Tuhost tělesa - odolnost tělesa proti deformaci.

STATICKÁ PEVNOST A DEFORMACE

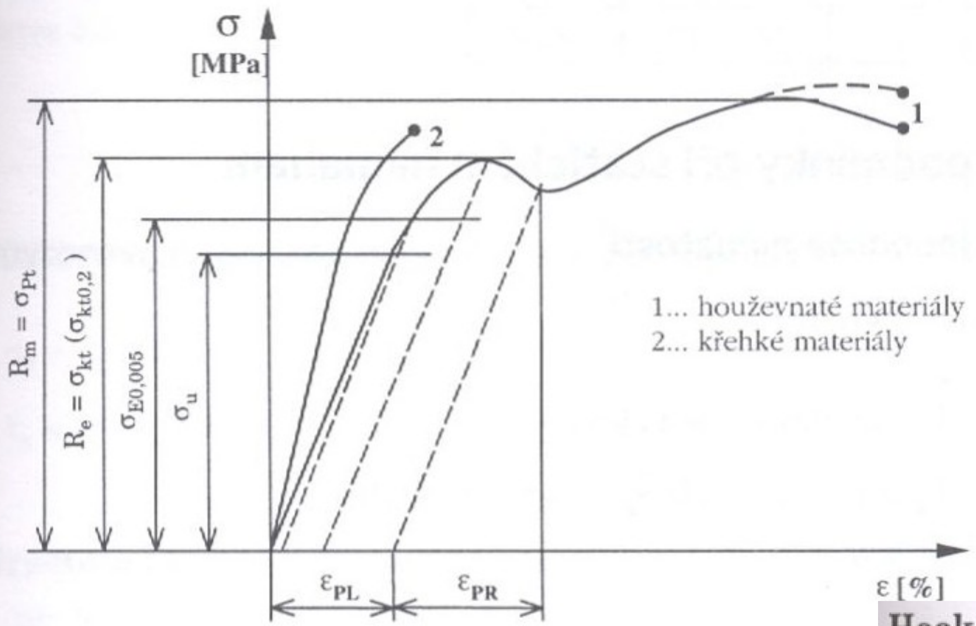
Reálné strojní součásti jsou charakterizovány materiálem z kterého jsou vyrobeny. Předchozí části technické mechaniky (statika, kinematika, ..), tyto vlastnosti těles zanedbávaly!

Vlastnosti každého technického materiálu (ocel, litina, plast, ..) jsou popsány materiálovými charakteristikami jako jsou mez pevnosti (R_m), mez kluzu (R_e), prodloužení, modul pružnosti (E, G) apod.

Tyto charakteristiky lze zjistit z pracovního diagramu např. tahového.

STATICKÁ PEVNOST A DEFORMACE

Př. Tahového diagramu



$\sigma_{kt} \cong (0{,}6 \div 0{,}8).\ \sigma_{Pt}$

pro nižší σ_{Pt} pro vyšší σ_{Pt}

$R_m = \sigma_{Pt}$ … smluvní mez pevnosti

$R_e = \sigma_{kt}$ ($\sigma_{kt0,2}$) … mez kluzu (smluvní mez kluzu)

$\sigma_{E0,005}$ … smluvní mez pružnosti

σ_u … mez úměrnosti

Hookeův zákon

pro tah:

$$\sigma = \frac{F}{S} = E.\ \varepsilon = E.\ \frac{\Delta l}{l} \quad \rightarrow \quad \Delta l = \frac{F.l}{F.S}\ ; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

pro smyk:

$$\tau = \frac{F}{S} = G.\ \gamma = G.\ \frac{\Delta \varphi}{l} \quad \rightarrow \quad \Delta \varphi = \frac{F.l}{G.S}\ ; \quad \gamma = \frac{\Delta \varphi}{l}$$

STATICKÁ PEVNOST A DEFORMACE

Pevnostní podmínky při statickém zatěžování (jednoosá napjatost).

a) pro houževnaté materiály:

$$\sigma_{max} \leq \sigma_D = \frac{\sigma_{kt}}{k_k}$$ kde orientačně požadováno:

$k_k \cong 1{,}5 \div 2{,}5$ … bezpečnost k mezi kluzu

b) pro křehké materiály:

$$\sigma_{max} \leq \sigma_D = \frac{\sigma_{pt}}{k_p}$$ kde orientačně požadováno:

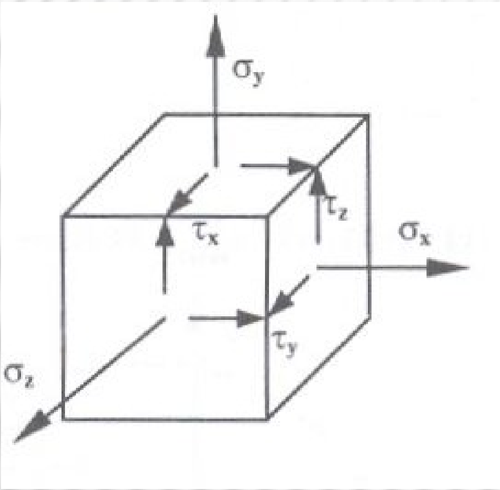
$k_p \cong 2{,}5 \div 3{,}5$ – pro oceli … bezpečnost k mezi pevnosti

$k_p \cong 4{,}0 \div 5{,}0$ – pro šedou litinu … bezpečnost k mezi pevnosti

PEVNOSTNÍ HYPOTÉZY

V praxi jsou tělesa namáhána tahovým nebo smykovým napětím či jejich kombinací.

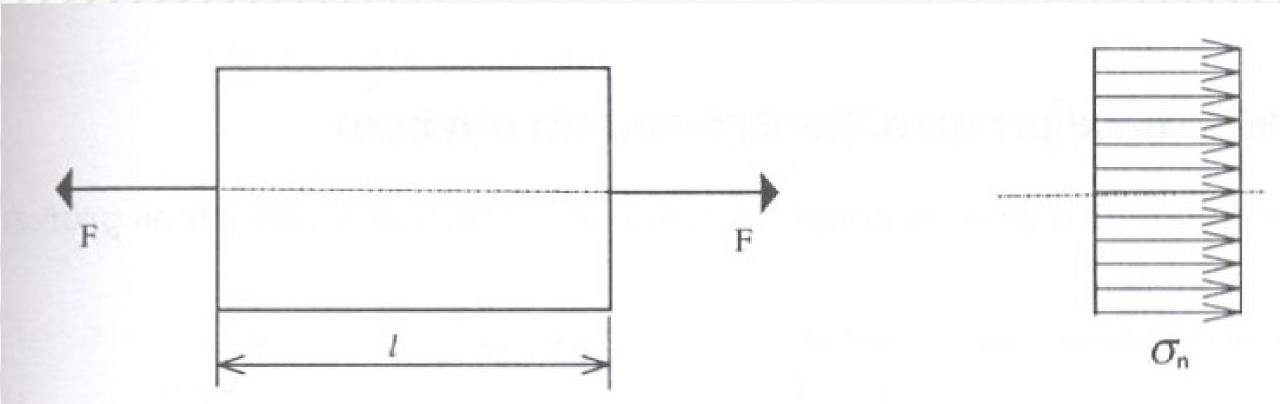
Obecná trojoosá napjatost je znázorněna na obrázku.



$$\sigma_{red} = \text{složitá funkce } f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z,)$$

U strojních součástí namáhaných staticky se nejčastěji řeší charakteristiky napětí a deformace při namáhání tahem, tlakem, smykem, ohybem, krutem.

NAMÁHÁNÍ TAHEM/TLAKEM

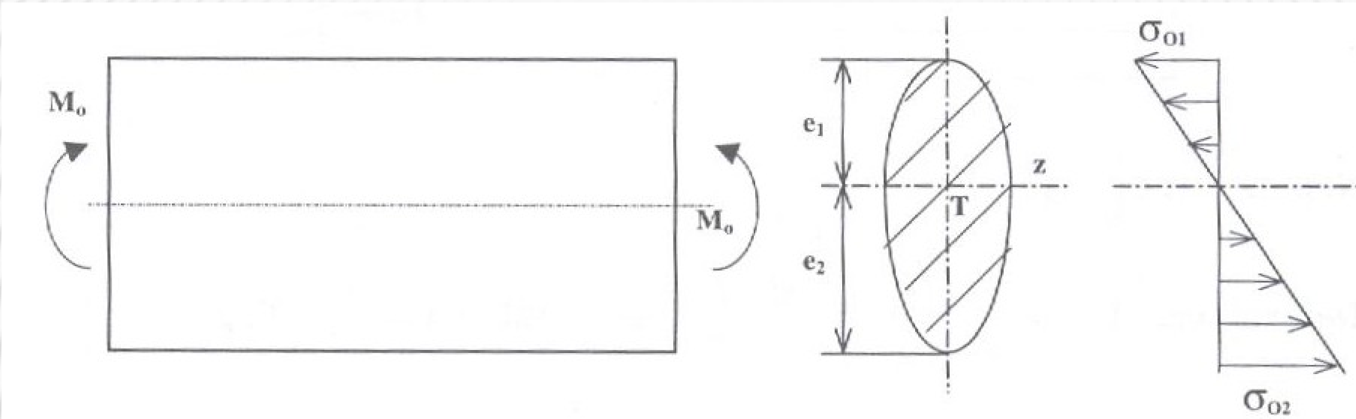


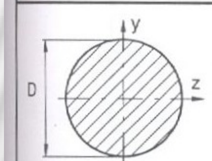
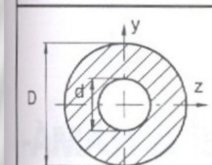
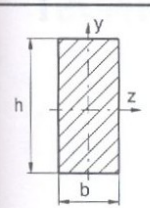
a) **Napětí:** $\sigma = \frac{F}{S} \leq \sigma_{Dt}$

b) **Deformace:** $E.\,\varepsilon = \frac{F}{S} \rightarrow E\,.\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{S} \rightarrow (\Delta l =)\ y = \frac{F.l}{E.S} = F.\,p$

Poddajnost: $p = \frac{y}{F} = \frac{l}{E.S}$ Tuhost: $k = \frac{l}{p}$

NAMÁHÁNÍ OHYBEM



Tvar průřezu	Kvadratický moment průřezu J [mm⁴]		Průřezový modul v ohybu W_0 [mm³]	
	J_z	J_y	W_{oz}	W_{oy}
	$\frac{\pi D^4}{64}$		$\frac{\pi D^3}{32}$	
	$\frac{\pi(D^4-d^4)}{64}$		$\frac{\pi(D^4-d^4)}{32D}$	
	$\frac{b.h^3}{12}$	$\frac{h.b^3}{12}$	$\frac{b.h^2}{6}$	$\frac{h.b^2}{6}$

a) **Napětí:** $\sigma_{0\,max} = \dfrac{M_0}{W_{0\,min}} \leq \sigma_D$

Napětí v krajních vláknech:

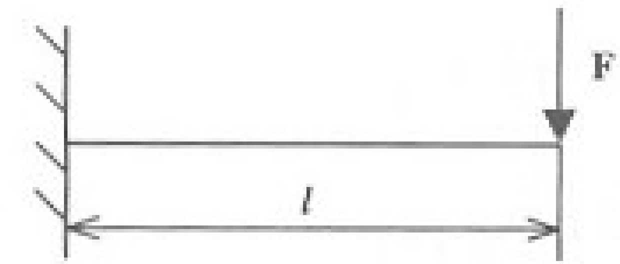
$$\sigma_{01} = \frac{M_0}{W_{01}} \qquad W_{01} = \frac{J_z}{e_1}$$

$$\sigma_{02} = \frac{M_0}{W_{02}} \qquad W_{02} = \frac{J_z}{e_2}$$

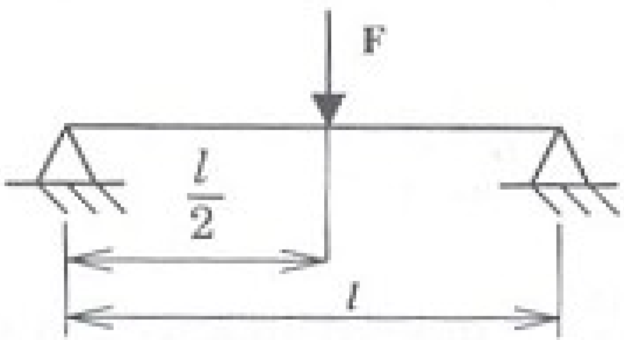
b) **Deformace:** $y''(x) = -\dfrac{M_0(x)}{E.J_z}$

NAMÁHÁNÍ OHYBEM - NOSNÍK

Pro nosník stálého průřezu se průhyb (y) vypočte:



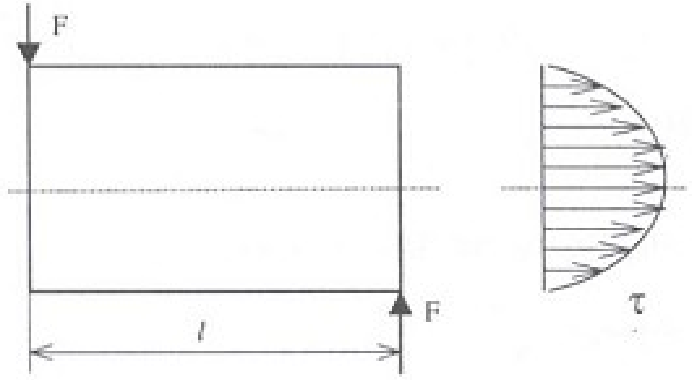
$$y = \frac{F \cdot l^3}{3EJ} \quad ; \quad \varphi = \frac{F \cdot l^2}{2EJ} \quad \text{... v místě F}$$



$$y = \frac{F \cdot l^3}{48EJ} \quad ; \quad \varphi = 0 \quad \text{... v místě F}$$

NAMÁHÁNÍ SMYKEM (ZA OHYBU)

V praxi jsou tělesa namáhána smykem v kombinaci s ohybem



Napětí: $\tau_{max} = \frac{F}{S} \leq \tau_D$

a) **Napětí:** $\tau_{max} = \alpha.\frac{F}{S} \leq \tau_D$

$\alpha = \frac{4}{3}$ … pro kruhový průřez

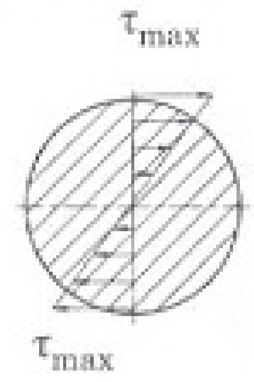
$\alpha = \frac{3}{2}$ … pro obdélníkový průřez

b) **Deformace:** $G.\gamma = \beta\frac{F}{S} \rightarrow G.\frac{\Delta\varphi}{l} = \beta\frac{F}{S} \rightarrow \Delta\varphi = \beta\frac{F \cdot l}{G \cdot S}$

$\beta \cong \frac{10}{9}$ … pro kruhový průřez

$\beta \cong \frac{6}{5}$ … pro obdélníkový průřez

NAMÁHÁNÍ KRUTEM



a) **Napětí:** $$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_D$$

b) **Deformace:**

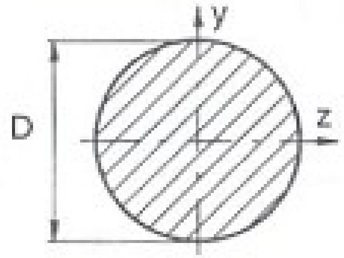
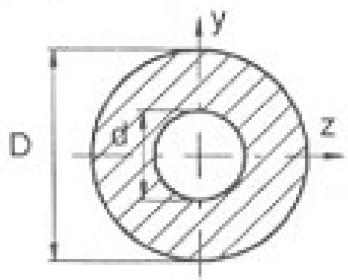
$$G \cdot \vartheta = \frac{M_k}{J_k}, \quad \rightarrow \quad G \cdot \frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{M_k}{J_k}, \quad \rightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{M_k \; l}{G \cdot J_k}$$

Pro n úseků konstantního průřezu:

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{n} \Delta\varphi_i = \frac{M_k}{G} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{J_{ki}}$$

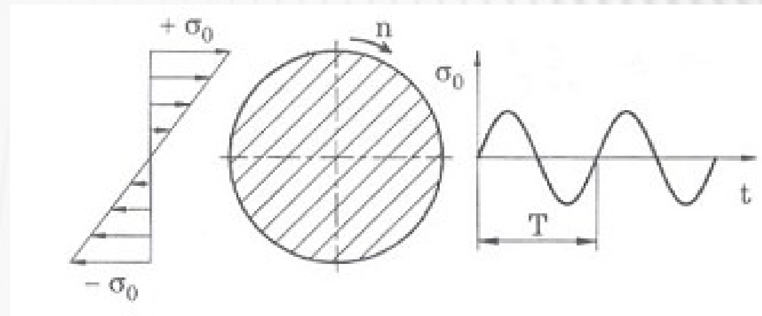
NAMÁHÁNÍ KRUTEM

Moment tuhosti a model průřezu v krutu.

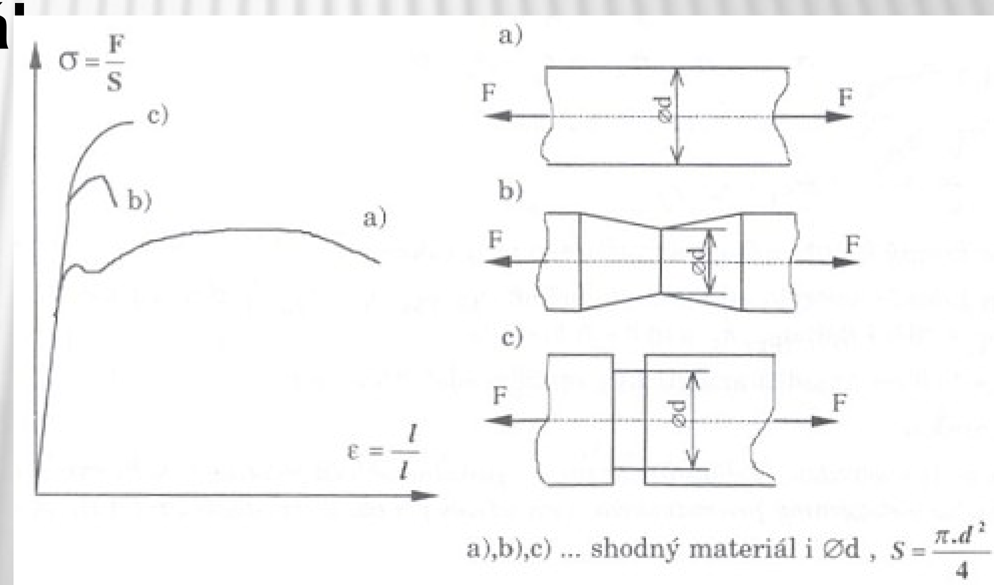
Tvar průřezu	Moment tuhosti v krutu J_k [mm⁴]	Modul průřezu v krutu W_k [mm³]
	$J_k = \frac{\pi D^4}{32} = 2J_0$	$W_k = \frac{\pi D^3}{16} = 2W_0$
	$J_k = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32} = 2J_0$	$W_k = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D} = 2W_0$

DALŠÍ FAKTORY OVLIVŇUJÍCÍ PEVNOST

1) Dynamické zatěžování.



2) Vliv vrubu. Vrub – koncentrátor napětí, snižuje pevnost a houževnatost materiál

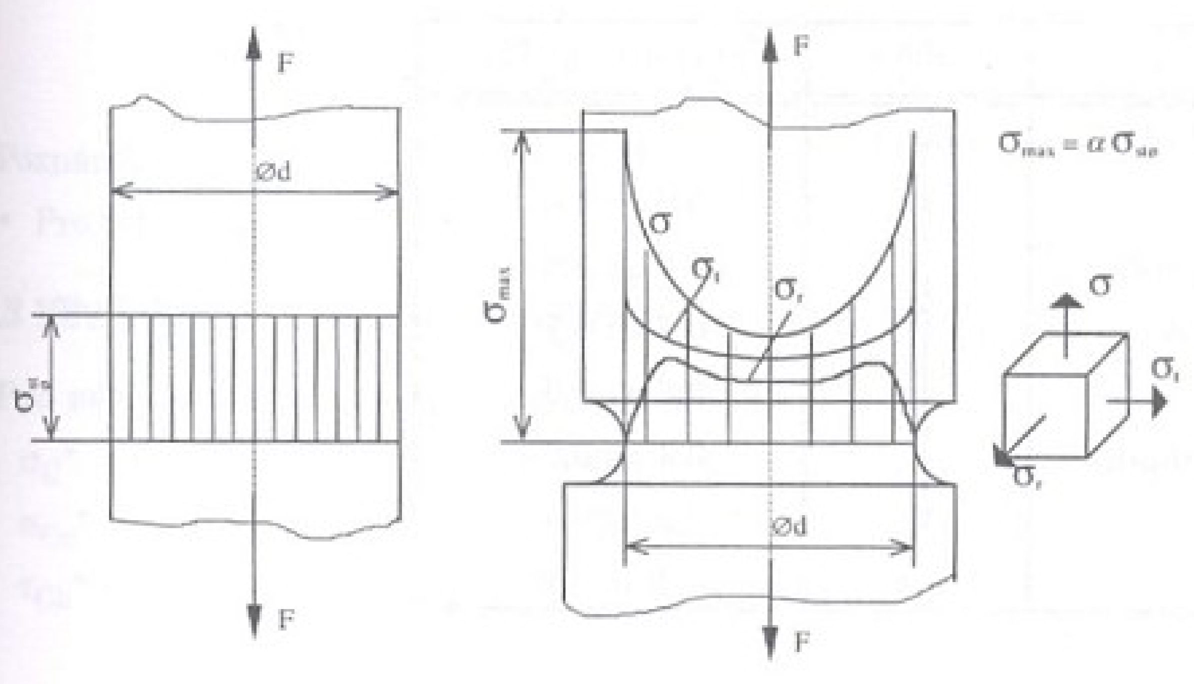


DALŠÍ FAKTORY OVLIVŇUJÍCÍ PEVNOST

Vrub

	při stat. zatížení	*při dynam. zatížení*
Uvažování vrubů u houževnatých materiálů:	*běžně NE*	*ANO*
Uvažování vrubů u křehkých materiálů:	*ANO*	*ANO*

Vliv tvaru vrubu – součinitel tvaru vrubu α



σ_{max}

max. napětí vrubu

σ_{stat}

napětí při statickém

ZÁVĚR

Literatura:

[1] Stejskal, V. a kol. *Mechanika 1.* ČVUT, 1998, 163 s.

[2] Mechanika - skripta. 2003,

[3] Hosnedl, S., Krátký, J. *Příručka strojního inženýra 1*, Computer press, 1999, 313 s.

[4] Zelený, J. Stavba strojů, Cpress, 2007, 2. vydání, 157 s.