

## Binární relace II

### (binární relace v množině – uspořádání, ekvivalence)

**Binární relace v množině M** je kterákoliv podmnožina kartézského součinu  $M \times M$ .

*Příklad:*

1. Je dána množina  $M = \{1,2,3,4,5\}$ . Zapište následující relace výčtem prvků.

$$R_1 = \{[x,y] \in M \times M; x + 2 = y\}$$

(zápis čteme: „Relace  $R_1$  je množina všech uspořádaných dvojic  $[x,y]$  z kartézského součinu  $M \times M$ , pro které platí, že  $x + 2 = y$  - tedy druhá složka je o 2 větší než první složka.“)

$$R_2 = \{[x,y] \in M \times M; x > y\}$$

$$R_3 = \{[x,y] \in M \times M; x < y \wedge x + y = 4\}$$

$$R_4 = \{[x,y] \in M \times M; x \text{ je násobkem } y\}$$

$$R_5 = \{[x,y] \in M \times M; x = y\}$$

$$R_6 = \{[x,y] \in M \times M; x \text{ dává při dělení dvěma stejný zbytek jako } y \text{ při dělení dvěma}\}.$$

Je některá z uvedených relací zobrazení v množině M? Pokud ano, určete přesně typ zobrazení.

2. Uvažujte množinu O všech osob v dané místnosti (posluchárně, v sále kina) a na této množině binární relace  $S_1 - S_5$ . Uvažujte o tom, z jakých uspořádaných dvojic osob se tyto relace skládají.:

$$S_1 = \{[x,y] \in O \times O; x \text{ je v abecedě před } y\}$$

$$S_2 = \{[x,y] \in O \times O; x \text{ je narozen ve stejném měsíci jako } y\}$$

$$S_3 = \{[x,y] \in O \times O; x \text{ je starší než } y\}$$

$$S_4 = \{[x,y] \in O \times O; x \text{ je na mateřské dovolené a } y \text{ neviděl film Vratné lahve}\}$$

$$S_5 = \{[x,y] \in O \times O; x \text{ má stejný počet dětí jako } y\}$$

Binární relace  $S_1, S_3, R_2$  jsou tzv. relace **uspořádání**. Určují pořadí prvků v množině, na níž jsou definovány. Uveďte výčtem prvků takto uspořádané množiny - nyní již záleží na pořadí. Např.

$[M] = [5,4,3,2,1]$ , je množina M uspořádaná relací  $R_2$ .

$[O1]$  je množina osob O uspořádaných podle abecedy (tedy uspořádáním  $S_1$ ),

$[O2]$  je množina osob O uspořádaných podle stáří od nejstaršího (tedy uspořádáním  $S_3$ ).

Binární relace  $S_2, S_5$  jsou tzv. **relace ekvivalence** na množině O.

Relace  $R_5, R_6$  jsou **ekvivalence** na množině M.

Jsou to takové relace, které vytvářejí **rozklad** množiny, na níž jsou definované. Tato množina se rozpadá na podmnožiny (říkáme třídy rozkladu). Přitom do téže třídy rozkladu patří ty prvky z původní množiny, které „jsou spolu v uspořádané dvojici“, tedy jsou vázány vztahem popsáním v příslušné relaci)

**Rozklad množiny A** je systém neprázdných podmnožin množiny A, tzv. tříd rozkladu, takových, že každý prvek z množiny A patří právě do jedné třídy rozkladu.

(Jinak můžeme také říci, že žádné dvě třídy rozkladu nemají společné prvky a současně sjednocení všech tříd rozkladu je původní množina.)

*Příklad:*

- Rozklad množiny M vytvořený relací  $R_6$ :  $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\}$  .
- Rozklad množiny M vytvořený relací  $R_5$ :  $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$
- V každé třídě rozkladu množiny O vytvořeného relací  $S_2$  budou osoby, které se narodily ve stejném měsíci. Tzn., že rozklad bude obsahovat nejvýše 12 tříd rozkladu.
- Rozklad množiny O vytvořený relací  $S_5$  bude obsahovat třídu osob, které nemají žádné dítě, další třídu osob, které mají 1 dítě, další třídu osob, které mají 2 děti atd. (jako třídy rozkladu neuvažujeme prázdné množiny).