Pády a výstupy na rotující Zemi

Novotný Jan:

Neinerciální systémy zůstávají stranou zájmu, fiktivní síly jsou pro studenty obtížně pochopitelné. Na druhé straně pobyt v neinerciální soustavě je náš každodenní zážitek. Příspěvek ukáže na případy, kdy popis v NIS je výhodnější než v IS (např. vesmírný výtah) a na zdroje možných nepřesností a omylů při analýze pohybu.

Pohyb hmotného bodu (fakticky tělesa malých rozměrů) v tíhovém poli Země je (zanedbáme-li odpor prostředí) určen vektorovou pohybovou rovnicí

s počátečními podmínkami

Druhý člen napravo představuje Coriolisovo zrychlení, které je důsledkem působení Coriolisovy síly. Předpokládejme, že pracujeme v malé oblasti prostoru, kde lze považovat g za homogenní (na souřadnicích nezávislé) pole. Pak lze uvedenou diferenciální rovnici druhého řádu integrovat, čímž obdržíme rovnici prvního řádu

Nultá aproximace řešení je pohyb v homogenním poli bez vlivu Coriolisovy síly

Dosazením do předchozí rovnice dostaneme rovnici

z ní můžeme integrací určit první aproximaci

Tu opět dosadíme do rovnice a dostáváme

Její integrací dostáváme druhou aproximaci

Tak by se dalo pokračovat a získávat aproximace libovolného řádu. Je ovšem zřejmé, že vyšší aproximace ztrácejí souvislost s realitou. V dalším se omezíme na první aproximaci a budeme se věnovat jen případu volného pádu a svislého vrhu

Strana /3

Zvolíme počáteční podmínky pro pád a vrh v zeměpisné šířce φ

Pád

Vrh

$$\ldots \cos\varphi, \omega \sin\varphi)$$

$$\ldots g)$$

$$\ldots \omega \cos\varphi, 0, 0)$$

$$\ldots \omega^2 g \sin\varphi \cos\varphi, \omega^2 g \cos^2\varphi)$$

$$\ldots \varphi - \omega^2 V \cos^2\varphi)$$

Dosazením do výsledku v první aproximaci dostaneme

$$x = \frac{1}{3} g \omega t^3 \cos\varphi$$
$$y = \underline{-\frac{1}{6} g t^4 \omega^2 \sin\varphi \cos\varphi}$$
$$z = H - \frac{1}{2} g t^2 + \underline{\frac{1}{6} \omega^2 g t^4 \cos^2\varphi}$$

$$x = -\omega V t^2 \cos\varphi + \frac{1}{3} g \omega t^3 \cos\varphi$$
$$y = \underline{\frac{2}{3} \omega^2 V t^3 \sin\varphi \cos\varphi} - \underline{\frac{1}{6} \omega^2 g t^4 \sin\varphi \cos\varphi}$$
$$z = V t - \frac{1}{2} g t^2 - \underline{\frac{2}{3} \omega^2 V t^3 \cos^2\varphi} + \underline{\frac{1}{6} \omega^2 g t^4 \cos^2\varphi}$$

Podtržené členy vznikají až v druhé aproximaci. V dalším tyto členy zanedbáme a máme

Strana /4

První aproximace pádu a vrhu na rotující Zemi

Pád

$$x = \frac{1}{3} g \omega t^3 \cos\varphi$$
$$y = 0$$
$$z = H - \frac{1}{2} g t^2$$

Doba pádu $T_p = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

Odtud

$x_P = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\omega \sqrt{\frac{H^3}{g}} \cos\varphi$ východní odchylka při dopadu

Vrh

$$x = -\omega V t^2 \cos\varphi + \frac{1}{3} g \omega t^3 \cos\varphi$$
$$y = 0$$
$$z = Vt - \frac{1}{2} g t^2$$

$V = g\frac{T_V}{2} = \sqrt{2gH}$ $\quad T_V = \frac{2V}{g} = 2T_P$ doba od vyhození po dopad

$$x_V = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) g \omega T_V^3 \cos\varphi = -\frac{1}{6} g \omega T_V^3 \cos\varphi = -\frac{4}{3} g \omega T_P^3 \cos\varphi$$

Což je západní odchylka při dopadu

Při stejné výšce je tedy v první aproximaci $x_V = -4x_P$

Symetrii křivky podle svislé osy dokážeme posunutím časového počátku do okamžiku dosažení maximální výšky $t^* = t - \frac{V}{g}$, pak

$$z = V\left(t^* + \frac{V}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(t^* + \frac{V}{g}\right)^2 = -\frac{1}{2}g t^{*2} + \frac{V^2}{2g}$$

Strana 5

A, Řešení v IS se snahou vyhnout se integraci

V inerciální soustavě, v níž je na počátku v klidu pata věže, jde o vodorovný vrh s počáteční rychlostí Vo. Východní odchylka se počítá jako

$$T_p \cos\varphi = H\omega\sqrt{\frac{2H}{g}}\cos\varphi = \sqrt{2}\,\omega\sqrt{\frac{H^3}{g}}\cos\varphi$$

Potíž je v tom, že pak se neshodujeme s výše uvedeným výsledkem první aproximace

V čem je chyba?

Odpověď:

Ani v naší IS nelze zanedbat pohyb vrcholu věže. Spolu s věží se v IS otáčí vodorovná rpovina a tedy i vektor tíhového zrychlení g. Srovnejme situace v časech $t=0, t=T_p$. Během pádu narůstá „přídavné“ zrychlení ve vodorovném (z hlediska použité inerciální soustavy) směru

Obrázky

Toto přídavné zrychlení je v 1. aproximaci

$$g_r = -g\omega t\cos\varphi$$

a jeho dvojí integrací dostáváme

$$v_r = -g\omega\frac{t^2}{2}\cos\varphi$$

$$x_r = -g\omega\frac{t^3}{6}\cos\varphi = -\frac{1}{3}\omega\sqrt{2}\sqrt{\frac{H^3}{g}}\cos\varphi$$

Tedy

$$x_P = \frac{2}{3}\omega\sqrt{2}\sqrt{\frac{H^3}{g}}\cos\varphi$$

jak mělo být.

B Chybný je ovšem i následující v literatuře uvedený postup v neinerciální soustavě (uváděný pro pád na rovníku)

$$\ldots = \int_0^{T_P} a_c t\,dt = \int_0^{T_P} 2\omega g t^2\,dt = 4\frac{\sqrt{2}}{3}\ldots\sqrt{\frac{H}{g}} = 2x_P$$

Zde se zapomnělo na to, že Corilolisovo zrychlení je v čase proměnné a je třeba je integrovat, tedy

$$\int_0^{T_P}\left(\int \ldots d\tau\right)dt = \int_0^{T_P} \omega g t^2\,dt = x_P$$

Přesné řešení rovnic pro pohyb rotující soustavy

Rovnice $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ldots$, kde $\ldots$

Po rozepsání do složek $\ldots g), \ldots \cos\varphi, \omega\sin\varphi)$.

$\ldots 2\omega\ldots$

$\ldots$

$\ldots -2\omega\ldots$

Zderivováním první rce dostaneme

$\ldots$

Kterou lze řešit substitucí $\ldots$, pro případ volného pádu dostaneme

$$x = \frac{g\cos\varphi}{2\omega^2}\left(\omega t - \sin\omega t\cos\omega t\right)$$

$$y = -\frac{g\sin\varphi\cos\varphi}{2}\left(t^2 - \frac{\sin^2\omega t}{\omega^2}\right)$$

$$z = H - \frac{g}{2}\left(t^2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\frac{\sin^2\omega t}{\omega^2}\right)$$