ELEMENTÁRNÍ VÝKLAD BELLOVY NEROVNOSTI

Jan Novotný

K zájmu o Bellovu nerovnost mě kromě vlastní četby dovedli jednak studenti, jednak mí přátelé z řad filosofů. Zaujalo je, že na první pohled čistě filosofické spory o povahu reality může podstatně ovlivnit, ba snad přímo rozhodnout výsledek experimentu. Dožadovali se proto co nejprostšího a nejsrozumitelnějšího vysvětlení. Jeho základ jsem převzal z knihy Heinze Pagelse THE COSMIC CODE *(Bantam Books 1984). Výklad, který jsem svým studentům i přátelům podával, mi (a možná i jim) připadal uspokojivý do chvíle, než jsem se rozhodl jej zapsat. Tímto konstatováním omlouvám dlouhou dobu mezi přednáškou na semináři a dodáním textu a prosím, aby byl považován pouze za nultou aproximaci.*

JEHLY

Mějme mechanické zařízení, které vystřeluje dvojici stejných jehel v protichůdných směrech. Jehly jsou orientovány kolmo na směr pohybu pod náhodným, ale pro obě jehly stejným úhlem. Postavme do směru pohybu jehel detektory A, B obsahující štěrbinové polarizátory (viz obr. 1), které mohou jehly propustit nebo zachytit. Označme průchod jehly symbolem 1, zachycení symbolem 0. Pokud jsou polarizátory shodně orientovány, musí být v souladu s předchozím popisem výsledek "měření" na obou detektorech vždy stejný. Svírají-li polarizátory (jejich štěrbiny) jistý úhel, dojde při větším počtu pokusů k jistému počtu neshod. Jak se změní jejich počet, když úhel zdvojnásobíme?

Uvažujme takto: Směr jehel není ovlivněn nastavením polarizátorů (objektivita) a výsledek měření jednoho detektoru není ovlivněn výsledkem na druhém detektoru (lokálnost). Mějme nějakou sérii výsledků při shodně orientovaných polarizátorech (viz střední řádky tabulky). Kdybychom otočili polarizátor A o úhel τ, došlo by ve výsledcích k některým změnám zaznamenaným v horním řádku. V tabulce by se objevil jistý počet neshod, který označíme $E(\tau)$. Kdybychom ponechali A v původní poloze a otočili B o úhel τ v opačném směru, objevil by se při větším počtu pokusů zhruba stejný počet neshod, jak to ukazuje dolní řádek. Kdyby se otočily popsaným způsobem oba polarizátory, byly by střední řádky tabulky nahrazeny horním a dolním. Pokud se střední řádky neshodovaly s horním ani s dolním řádkem, obnovila by se shoda. Počet neshod by byl tedy menší (či nejvýše roven) dvojnásobku jejich počtu při otočení jediného polarizátoru.

A'	0	*1*	*1*	*0*	*1*	0	*0*	0	1	*1*	0	0	0	*1*	0	*1*	0	*1*	*1*	0	0	0	*1*	*1*	*0*	0	0	0	0	*1*
A	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
B	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
B'	0	0	0	*0*	0	0	1	0	*0*	0	*1*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*1*	*1*	0	0	*0*	0	0	0	*1*	0

Kurzíva v horním a dolním řádku upozorňuje na neshody se středními řádky, tučné písmo ve středních řádcích na shody neshod s horním a dolním řádkem. V daném případě $E(\tau) = 14$ *pro otočení prvního,* $E(\tau) = 7$ *pro otočení druhého polarizátoru,* $E(2\tau) = 17$, *a je tedy splněna nerovnost* $E_1(\tau) + E_2(\tau) \geq E(2\tau)$.

Vzhledem k náhodnosti orientace jehel platí tento výsledek při libovolné poloze polarizátorů, pokud se jejich sklony liší o úhel τ či 2τ. Platí tedy Bellova nerovnost

$$2E(\tau) \geq E(2\tau) .$$

POLARIZACE FOTONŮ

Existují experimenty, při nichž se v protichůdných směrech pohybuje pár fotonů s náhodnými, avšak vzájemně shodnými polarizacemi. Detektory jsou spojeny s polarizátory, které mohou foton propustit (pak má polarizaci paralelní s polarizátorem) anebo zachytit (pak má polarizaci kolmou na polarizátor). Nakloníme polarizátor B o úhel τ. Označme pořadě P, resp. Z stav druhého fotonu pro případ, že první foton polarizátorem prošel, resp. byl jím zachycen; dále označme P', resp. Z' stav druhého fotonu pro případ, že prochází, resp. je zachycen druhým polarizátorem. Platí

$$P = \cos(\tau)\, P' + \sin(\tau)\, Z' \quad , \quad Z = \sin(\tau)\, P' + \cos(\tau)\, Z' .$$

Neshodným výsledkům odpovídá koeficient $\sin\ \tau$, podle pravidel kvantové mechaniky je kvadrát tohoto koeficientu roven pravděpodobnosti daného výsledku. Je tedy $E(\tau) = K \sin^2\tau$ a protože $2 \sin^2\tau < \sin^2 2\tau$ čili $1/2 < \cos^2\tau$ pro $\tau < \pi/4$, dochází k porušení Bellovy nerovnosti.

SPINY ELEKTRONŮ

Existují experimenty, při nichž se v protichůdných směrech pohybují elektrony s náhodnými spiny, které však mají nulový součet. Nechť detektory registrují složky spinů ve směru jisté osy kolmé na směr pohybu. Výsledkem může být hodnota spinu 1/2 nebo -1/2. Jsou-li oba detektory shodně orientovány, jsou výsledky měření na nich opačné, což považujeme za shodu.

Zjistil-li detektor A např. spin 1/2 a je-li detektor B pootočen o úhel τ, je střední hodnota průmětu spinu do jeho osy rovna $-1/2 \cos \tau$. Platí

$$-1/2 \cos \tau = -1/2\ (w_- - w_+) \quad ,$$

kde w_-, resp. w_+ jsou pravděpodobnosti záporné a kladné hodnoty příslušné složky spinu. Protože je zřejmě

$$w_- + w_+ = 1 \quad ,$$

dostáváme řešením příslušné soustavy rovnic

$$w_- = \cos^2(\tau/2) \quad , \quad w_+ = \sin^2(\tau/2) \ .$$

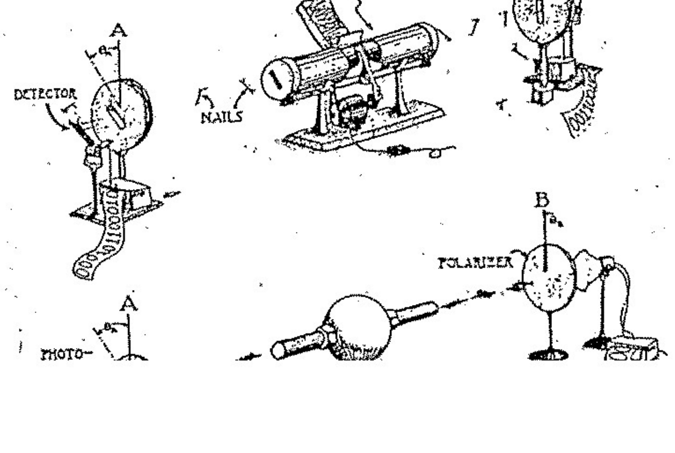
Počet neshod je $E(\tau) = K \sin^2(\tau/2)$. Platí $2 \sin^2(\tau/2) < \sin^2\tau$ čili $1/2 < \cos^2(\tau/2)$ pro $\tau < \pi/2$, takže Bellova nerovnost je opět porušena.

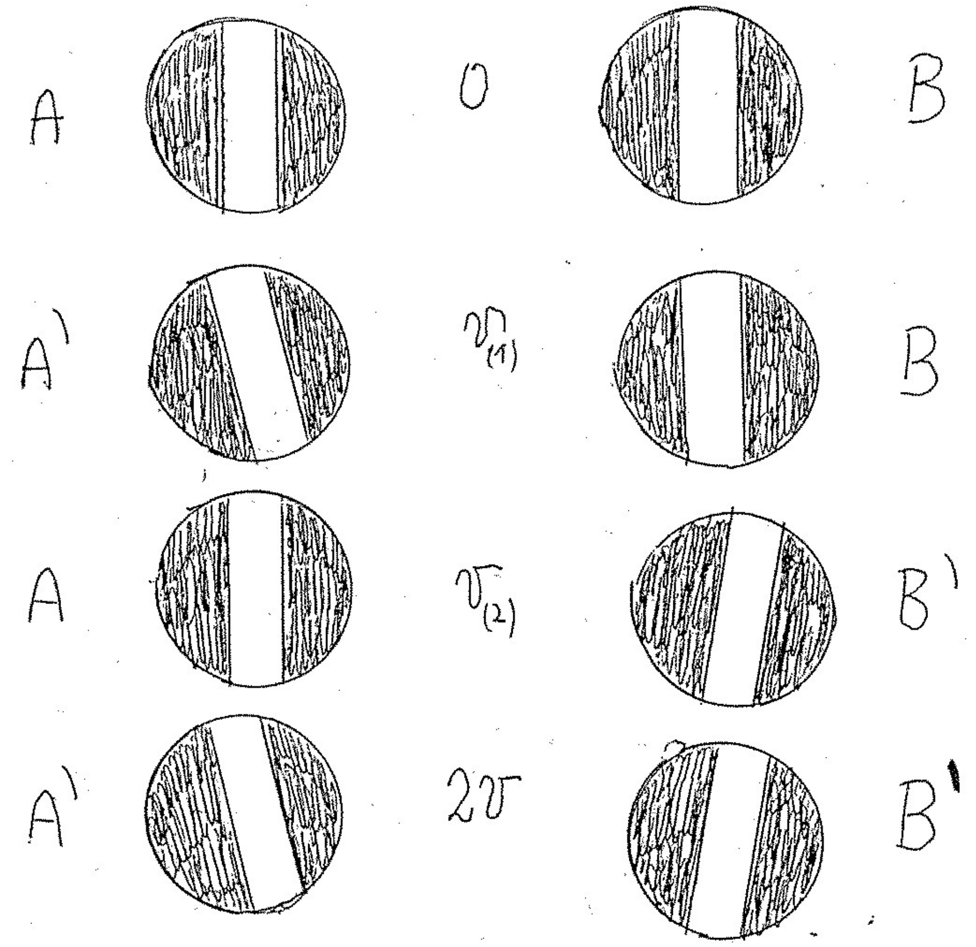
ZÁVĚR

Předpokládejme s Einsteinem a jeho druhy, že polarizaci, popř. spinu částice odpovídá jistý element reality, předurčující, jak dopadne výsledek měření. To znamená, že při měření se polarizace fotonu zachová jako jehla na polarizátoru, jaký je zobrazen na obr. 2, a spin částice jako šipka na polarizátoru, jaký je zakreslen na obr. 3. Pak by ovšem musela být splněna Bellova nerovnost. Jestliže tomu tak není, znamená to, že musíme opustit alespoň jeden z předpokladů, za nichž byla nerovnost odvozena, tj. předpoklad objektivity, předpoklad lokálnosti, popřípadě obojí.

Obr. 1

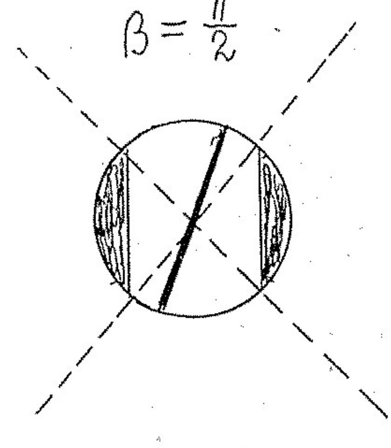
ZAŘÍZENÍ Z PAGELSOVY KNIHY





Srovnávané polohy polarizátorů

„Dělič"
polarizací-jehel
(klasická
představa)



„Dělič"
„spinů-šipek
(klasická