MASARYKOVA UNIVERZITA
Pedagogická fakulta

Bakalářská práce

Brno 2016 **Petra Zedníková**

MASARYKOVA UNIVERZITA
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce
Řešené příklady ze Základů matematiky

Vedoucí práce
doc. Mgr. Pavel Řehák, Ph.D.

Vypracovala
Petra Zedníková

Bibliografický záznam

Autor:	Petra Zedníková Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta Katedra matematiky
Název práce:	Řešené příklady ze Základů matematiky
Studijní program:	Specializace v pedagogice
Studijní obor:	Pedagogické asistentsví matematiky pro základní školy Pedagogické asistentství speciální pedagogiky pro základní školy
Vedoucí práce:	doc. Mgr. Pavel Řehák, Ph.D.
Akademický rok:	2015/2016
Počet stran:	$X + 87$
Klíčová slova:	výroky; matematické důkazy; teorie množin; relace; zobrazení; uspořádání; relace ekvivalence a rozklady; reálné funkce; elementární funkce

Bibliographic Entry

Author:	Petra Zedníková Masaryk University, Faculty of Education Department of Mathematics
Title of Thesis:	Fundamental of Mathematics: Examples
Degree Programme:	Specialization in Pedagogy
Field of Study:	Lower Secondary School Teacher Training in Mathematics Lower Secondary School Teacher Training in Special Education
Supervisor:	doc. Mgr. Pavel Řehák, Ph.D.
Academic Year:	2015/2016
Number of Pages:	$X+87$
Keywords:	fundamentals of logic and of set theory; types of proofs in mathematics; binary relations; mappings; ordered sets; equivalence relations; partitions; real functions of a real variable; elementary functions

Abstrakt

Bakalářská práce je souborem řešených příkladů do předmětu Základy matematiky, který je vyučován v rámci studijního oboru Pedagogické asistentství matematiky pro základní školy. Pro snadnější orientaci studentů je práce rozdělena do kapitol podle skript k tomuto předmětu. V každé kapitole jsou příklady různého stupně obtížnosti a na konci každé kapitoly je několik příkladů určených pro samostatnou práci studentů. Postup řešení a výsledky jsou doprovázeny komentáři, náčrtky a dalšími náměty na přemýšlení.

Abstract

The Bachelor thesis consists of a set of solved examples to subject Fundamentals of Mathematics that is taught annually within the field of study Lower Secondary School Teacher Training in Mathematics. The Batchelor thesis is divided into nine chapters according to the script for this subject. In each chapter there are examples of different level of difficulty and at the end of each chapter there are a few examples designed for individual student's work. Approaches and results are accompanied by noted, sketches and ideas to think about.

Poděkování

Na tomto místě bych velmi ráda poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce doc. Mgr. Pavlu Řehákovi, Ph.D, za odborné vedení práce a za cenné rady a připomínky, které obohatily tuto práci.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně a použila prameny uvedené v seznamu literatury.

Brno 30. března 2016 ....

Petra Zedníková

Obsah

Úvod

Jako téma své bakalářské práce jsem si vybrala vytvoření sbírky Řešené příklady ze Základů matematiky. K tomuto kroku mě přivedly jak mé vlastní zkušenosti, tak zkušenosti ostatních studentů se studiem předmětu Základy matematiky v rámci Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity v Brně. Bezproblémové zvládnutí tohoto předmětu je nezbytné k pochopení a úspěšnému osvojení dalších matematických disciplín, jako je matematická analýza, algebra a geometrie. V rámci studia jsem průběžně pomáhala některým studentům s přípravou a řešením jednotlivých úloh v rámci předmětu a tak jsem mohla vypozorovat, které oblasti činí studentům největší obtíže, a posléze se na tyto problematické oblasti zaměřit ve svojí bakalářské práci.

Cílem této bakalářské práce se tak stala snaha vytvořit sbírku řešených příkladů, která by usnadnila studentům přípravu a pomohla jim lépe si osvojit potřebné znalosti z předmětu Základy matematiky. Sbírka řešených příkladů by mohla sloužit zároveň jako doplněk skript k tomuto předmětu. Z toho důvodu je práce rozčleněna do kapitol odpovídajících kapitolám v uvedených skriptech. Jednotlivé kapitoly jsou sestaveny ze vzorových řešených příkladů a příkladů k procvičení, které slouží nejen jako návod k pochopení potřebných postupů, ale také k jejich lepšímu zafixování a samostatnému použití. Kapitoly jsou doplněny o potřebné komentáře, tabulky, graficky znázorněné výsledky a schémata, která opět slouží pro vyšší přehlednost a snazší zapamatování.

Původně jsem předpokládala, že obohatím tuto sbírku i o složitější příklady a úlohy, nicméně v průběhu přípravy a na začátku tvorby této sbírky jsem došla k závěru, že takové obohacení by bylo nad rámec rozsahu bakalářské práce a ve své podstatě by pro studenta, který by ze sbírky čerpal, nebylo až tak významným přínosem. Příklady v této práci jsou tedy sestaveny tak, aby umožnily studentům úspěšné zvládnutí a osvojení potřebných znalostí do předmětu Základy matematiky a korespondovaly se skripty pro uvedený předmět.

Základní použité symboly a označení

$\mathbb{N}$	přirození čísla
$\mathbb{N}_0$	nezáporná celá čísla
$\mathbb{Z}$	celá čísla
$\mathbb{Q}$	racionální čísla
$\mathbb{R}$	reálná čísla
$\mathbb{R}^+$	kladná reálná čísla
$\neg A$	negace výroku A
$A \vee B$	disjunkce výroků A, B
$A \wedge B$	konjunkce výroků A, B
$A \Rightarrow B$	implikace výroku B výrokem A
$A \Leftrightarrow B$	ekvivalence výroků A, B
$A \cup B$	průnik množin A a B
$A \cap B$	sjednocení množin A a B
$A \setminus B$	rozdíl množin A a B
A'	doplněk množiny A
$A \times B$	kartézský součin množin A a B
2^A	systém všech podmnožin množiny A
$\subseteq$	neostrá množinová inkluze
$\subset$	ostrá množinový inkluze
$(A, \leq)$	uspořádaná množina
$\sim$	relace ekvivalence na množině A
$A/\sim$	rozklad příslušný ekvivalenci $\sim$
M	rozklad na množině A

Kapitola 1

Základní pojmy matematické logiky

V kapitole Základní pojmy matematické logiky se budeme zabývat výroky, výrokovými formami a kvantifikovanými výroky. Ukážeme si, jak pracovat s logickými spojkami (negace, konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence), kvantifikátory (obecný a existenční) a s tabulkami pravdivostních hodnot.

Příklad 1.1 Rozhodněte, která z uvedených sdělení jsou výroky. Pokud se jedná o výrok, určete jeho pravdivostní hodnotu.

a) Kolik je hodin?

b) $x - 2 = 5$.

c) Číslo 3 je prvočíslo.

d) Tato květina je žlutá.

e) Květina je žlutá.

f) $3 + 6 = 10$.

g) Dan Brown je spisovatel.

h) Dan Brown je skvělý spisovatel.

Řešení:

a) Nejedná se o výrok. Sdělení nesplňuje definici výroku (intuitivně se nejedná o oznamovací větu).

b) Nejedná se o výrok. Sdělení nesplňuje definici výroku. Z tohoto sdělení by se mohl stát výrok vhodnou kvantifikací. Jak by vypadal kvantifikovaný výrok, si rozmyslete sami.

c) Jedná se o výrok. Sdělení plně splňuje definici výroku. U tohoto výroku umíme také rozhodnout, jestli je výrok pravdivý nebo nepravdivý. Tvrzení číslo 3 je prvočíslo je pravdivý výrok, protože číslo 3 má pouze triviální dělitele $(1,3)$.

d) Jedná se o výrok. Sdělení je smysluplné tvrzení, o kterém umíme rozhodnout, zda je pravdivé či nepravdivé. Zajímá nás pouze jedna konkrétní květina.

e) Nejedná se o výrok, protože ve sdělení není řečeno, o které konkrétní květině mluvíme.

f) Jedná se o výrok. Sdělení neobsahuje žádné proměnné, proto můžeme říct, že se jedná o nepravdivý výrok.

g) Jedná se o výrok, protože sdělení splňuje definici výroku (intuitivně se jedná o oznamovací větu). Dále umíme rozhodnout o pravdivosti výroku. Můžeme proto říct, že se jedná o pravdivý výrok.

h) Nejedná se o výrok, neboť se jedná o subjektivní tvrzení (někdo považuje tvrzení za pravdivé, někdo za nepravdivé).

Příklad 1.2 Rozhodněte, zda výroková forma V definována jako $(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A]$ je tautologie.

Řešení: Výroková forma V není tautologie.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow \neg B$	$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$	V
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1

Příklad 1.3 Pomocí pravdivostní tabulky hodnot dokažte, že výroková forma V, která je definována jako $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, je tautologie.

Řešení: Výroková forma V je pravdivá, je tedy tautologií.

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	V
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1

Příklad 1.4 Udejte podmínku pro to, aby číslo x bylo dělitelné 6 v oboru $\mathbb{N}$, která je

a) dostatečná, ale není nutná,

b) nutná, ale není dostatečná,

c) nutná i dostatečná.

Řešení:

a) Pokud hledáme podmínku, která je dostatečná, ale není nutná, stačí najít konkrétní příklad, který splňuje uvedenou vlastnost. V našem případě to je jakékoliv číslo dělitelné 6, tedy 6, 12, ...

b) Při hledání podmínky, která je nutná, ale ne dostatečná, musíme už pracovat obecněji. Postačí nám, pokud zformulujeme některou z podmínek, kterou musí číslo x splňovat, aby bylo dělitelné 6. Díky kritériím dělitelnosti víme, že číslo x je dělitelné 6, pokud je dělitelné zároveň 2 a 3. Máme proto na výběr z několika nutných podmínek. Jednou možností nutné, ale ne dostatečné podmínky pro to, aby číslo x bylo dělitelné 6 je tvrzení, že číslo x je dělitelné 3. Další možností je tvrzení: číslo x je dělitelné 2. Sami si rozmyslete, jak by mohly vypadat další možnosti.

c) Nutnou i dostatečnou podmínkou, pro to aby číslo x bylo dělitelné 6, může být např. kritérium dělitelnosti 6. Podmínka zní tedy takto: číslo x je dělitelné 6 právě tehdy, pokud je dělitelné 2 a zároveň 3.

Příklad 1.5 Utvořte negaci následujících výroků (bez použití slovního obratu: „není pravda, že ...").

a) Při písemce opisovala Lucie nebo Tereza.

b) Dnes je úterý a zítra nebude pondělí.

c) Při fotbalovém utkání padnou alespoň 3 góly.

d) Zdeněk udělal v diktátu 3 chyby.

e) Každý den je důvod k radosti.

f) Jestliže nebude pršet, půjdu na vycházku.

g) Jestliže budu chodit na brigádu, vydělám si na nový telefon.

h) Číslo je dělitelné 9 právě tehdy, když jeho ciferný součet je dělitelný 9.

Řešení:

a) Jedná se o negaci disjunkce ($A \vee B$; výrok A: při písemce opisovala Lucie, výrok B: při písemce opisovala Tereza). Negace disjunkce je tvaru $\neg A \wedge \neg B$, proto negace výroku je tvrzení: Při písemce neopisovala ani Lucie, ani Tereza.

b) Složený výrok je tvaru konjuknce ($A \wedge B$; výrok A: dnes je úterý, výrok B: zítra nebude pondělí). Negace konjukce je tvaru $\neg A \vee \neg B$, negace tohoto výroku tedy zní: Dnes není úterý nebo zítra bude pondělí.

c) Výrok je kvantifikován, proto ho negujeme podle pravidel pro negování kvantifikovaných výroku. Negací musíme pokrýt všechny ostatní možnosti, než které jsou v původním výroku (podobně jako u množin, když hledáme doplněk množiny). Ve výroku mají při fotbalovém utkání padnout alespoň 3 góly, tedy 3, 4, 5, a více gólů. Negace kvantifikovaného výroku je následující: Při fotbalovém utkání padnou nejvýše dva góly.

d) Zdeněk udělal v diktátu nejvýše 2 nebo alespoň 4 chyby (použijeme stejný postup jako v c)).

e) Při hledání negace takového typu kvantifikovaného výroku, stačí uvést jeden protipříklad. Negace výroku je tvaru: Alespoň jeden den důvod k radosti není.

f) Výrok je tvaru implikace ($A \Rightarrow B$; výrok A: nebude pršet, výrok B: půjdu na vycházku) a negací implikace je výrok: $A \wedge \neg B$, proto je negace následující: Nebude pršet a nepůjdu na vycházku.

g) Výrok je implikací ($A \Rightarrow B$; výrok A: budu chodit na brigádu, výrok B: vydělám si na nový telefon) a negace implikace je tvaru: Budu chodit na brigádu a nevydělám si na nový telefon.

h) Složený výrok je ekvivalencí ($A \Leftrightarrow B$; výrok A: číslo je dělitelné 9, výrok B: ciferný součet čísla je dělitelný 9.), obecně je negací ekvivalence složený výrok: $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$, proto je negace následující: Číslo je dělitelné 9 a jeho ciferný součet není dělitelný 9 nebo číslo není dělitelné 9 a jeho ciferný součet je dělitelný 9.

Příklad 1.6 Udejte podmínku pro to, aby rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ měla jeden reálný dvojnásobný kořen, která je

a) dostatečná, nikoliv nutná,

b) nutná, nikoliv dostatečná,

c) nutná a dostatečná.

Řešení:

a) Při hledání dostatečné, nikoliv však nutné podmínky, stačí najít jeden konkrétní příklad kvadratické rovnice, která má jeden dvojnásobný kořen. Např. $x^2+2x+1=0$ $(x_{1,2}=-1)$.

b) Nutnou, ale ne dostatečnou podmínkou pro to, aby kvadratická rovnice měla reálný kořen, je tvrzení, že diskriminant je větší nebo roven 0, protože právě tehdy má kvadratická rovnice buď jeden dvojnásobný reálný kořen, nebo dva reálné různé kořeny. Nutná, ale ne dostatečná podmínka je tvaru: $b^2-4ac\geq 0$

c) Kvadratická rovnice má jeden reálný dvojnásobný kořen právě tehdy, pokud je diskriminant roven 0. Nutnou i dostatečnou podmínkou je proto tvrzení: $b^2-4ac=0$

Příklad 1.7 Na definičním oboru $D=\{1,2,\ldots,12\}$ jsou dány výrokové formy $U(x):1+x\leq 7$ a $V(x):x|12$. Určete obor pravdivosti následujících výrokových forem:

a) $U(x)\wedge V(x)$,

b) $U(x)\vee V(x)$,

c) $U(x)\Rightarrow V(x)$,

d) $\neg U(x)$.

Řešení: Nejdříve musíme určit obor pravdivosti výrokových forem $U(x)$ a $V(x)$. Obor pravdivosti výrokové formy $U(x)$ na D najdeme tak, že najdeme řešení nerovnice na daném definičním oboru, proto obor pravdivosti $U(x)=\{1,2,3,4,5,6\}$. Obor pravdivosti výrokové formy $V(x)$ na D nalezneme tak, že z definičního oboru vybereme ta čísla, která splňují podmínku $x|12$ (tj. dělitelé čísla 12). Obor pravdivosti výrokové formy $V(x)$ je tvaru $V(x)=\{1,2,3,4,6,12\}$. Nyní můžeme hledat pravdivostní obory složených výrokových forem.

a) Pravdivostní obor složené výrokové formy $U(x)\wedge V(x)$ nalezneme tak, že zjistíme, v kterých hodnotách z D je pravdivá výroková forma $U(x)$ i $V(x)$. Pravdivostní obor je tedy tvaru $U(x)\wedge V(x)=\{1,2,3,4,6\}$.

b) Pravdivostní obor této složené výrokové formy najdeme tak, že z D vybereme ty hodnoty, ve kterých je splněna podmínka výrokové formy $U(x)$ nebo $V(x)$ (tzn. je pravdivá výroková forma $U(x)$, $V(x)$, nebo obě společně), proto pravdivostní obor složené výrokové formy je tvaru $U(x)\vee V(x)=\{1,2,3,4,5,6,12\}$.

c) Při hledání oboru pravdivosti složené výrokové formy tvaru implikace využijeme tabulku, ve které je vidět, kdy je složená výroková forma $U(x)\Rightarrow V(x)$ pravdivá. Tabulka je tvaru:

$U(x)$	$V(x)$	$U(x) \Rightarrow V(x)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Z tabulky vidíme, že obor pravdivosti budeme hledat ve třech krocích. Nejdříve najdeme obor pravdivosti složené výrokové formy $U(x) \wedge V(x)$ (viz. druhý řádek tabulky) tzn. hledáme čísla z D tak, aby splňovala podmínku z $U(x)$ i z $V(x)$, tedy $U(x) \wedge V(x) = \{1,2,3,4,6\}$. Následně budeme hledat obor pravdivosti složené výrokové formy $U(x) \setminus V(x)$ (viz. třetí řádek tabulky), tzn. hledáme hodnoty z D tak, aby splňovaly podmínku z $U(x)$ a nesplňovaly podmínku z $V(x)$, tedy $U(x) \setminus V(x) = \{5\}$. Nakonec budeme hledat obor pravdivosti složené výrokové formy $\neg U(x) \vee \neg V(x)$ (viz. čtvrtý řádek tabulky), tzn. hledáme hodnoty z D tak, aby nesplňovaly podmínku ani z $U(x)$, ani podmínku z $V(x)$, tedy $\neg U(x) \vee \neg V(x) = \{7,8,9,10,11\}$. Výsledný obor pravdivosti je sjednocením hodnot z jednotlivých kroků. Obor pravdivosti složeného výroku $U(x) \Rightarrow V(x)$ je tvaru $U(x) \Rightarrow V(x) = \{1,2,3,4,6,5,7,8,9,10,11\}$.

d) Obor pravdivosti $U(x) = \{1,2,3,4,5,6\}$. Obor pravdivosti $\neg U(x)$ nalezneme tak, že určíme obor pravdivosti $D \setminus U(x)$. Obor pravdivosti $\neg U(x)$ je proto tvaru $\neg U(x) = \{7,8,9,10,11,12\}$.

1.1 Příklady k procvičení

Cvičení 1.1.1 Dokažte, že se jedná o tautologii:

a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$,

b) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$,

c) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

d) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A]$,

e) $[(\neg A \Leftrightarrow \neg B) \wedge A] \Rightarrow \neg B$.

Cvičení 1.1.2 Utvořte negace následujících výroků:

a) Existuje prvočíslo, které je sudé.

b) Žádná krychle nemá 7 stěn.

c) Půjdu do kina s Danou nebo s Filipem.

d) Nikdy se nemusím učit do školy.

e) Jestliže nevrátím knížku do knihovny, zaplatím pokutu alespoň 5 Kč.

f) $\sqrt{10} \geq 3$.

Cvičení 1.1.3 Na definičním oboru $D = \{5, 6, 7, \ldots, 15\}$ jsou definovány výrokové formy $U(x)$: $3 \leq x < 10$ a $V(x)$: $7 \geq \frac{x+1}{2} \geq 4$. Nalezněte obor pravdivosti následujících výrokových forem:

a) $\neg U(x) \wedge V(x)$,

b) $U(x) \vee \neg V(x)$,

c) $U(x) \Rightarrow V(x)$,

d) $U(x) \Rightarrow \neg V(x)$,

e) $U(x) \Leftrightarrow V(x)$.

Cvičení 1.1.4 Určete obor pravdivosti výrokové formy $U(x)$, pokud víte, že definičním oborem výrokové formy jsou všechna reálná čísla.

a) $U(x) : |2x+1| > |3-5x|$,

b) $U(x) : x^2 - x - 15 > 5 - 2x$,

c) $U(x) : x - 6 \geq x(x-3)$.

Kapitola 2

Matematické důkazy

V této kapitole se zaměříme na nejrůznější typy matematických důkazů. Začneme důkazem přímým, který budeme řešit pomocí řady platných implikací, dále budeme pracovat také s důkazem nepřímým, ve kterém využijeme obměněné implikace. Dokazovat tvrzení budeme i pomocí sporu a matematické indukce. Neopomeneme ani důkaz jednoznačnosti a důkaz existence.

2.1 Důkaz přímý

Příklad 2.1.1 Dokažte, že součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný 3.

Důkaz. V přímém důkazu hledáme řadu platných implikací, díky kterým dokážeme, že tvrzení platí. My se snažíme dokázat, že $(n)+(n+1)+(n+2)$ je výraz dělitelný 3.

$$n+n+1+n+2 \Rightarrow 3n+3 \Rightarrow 3(n+1)$$

Vidíme tedy, že výraz $3(n+1)$ je jiné vyjádření pro součet tří po sobě následujících přirozených čísel, a také že je dělitelný 3.

□

Příklad 2.1.2 Dokažte, že rozdíl libovolného trojciferného čísla a čísla zapsaného opačným pořadím cifer je dělitelný 9 a 11.

Důkaz. Trojciferné číslo si zapíšeme ve tvaru *abc* a číslo s opačným pořadím cifer ve tvaru *cba*. Obě čísla si rozepíšeme jako součet jednotek, desítek a stovek a v tomto tvaru budeme s čísly pracovat.

$$abc - cba \Rightarrow 100a+10b+c-(100c+10b+a) \Rightarrow 100a+10b+c-100c-10b-a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 99a-99c \Rightarrow 99(a-c) = 9 \cdot 11(a-c)$$

Číslo $9 \cdot 11(a-c)$ je dělitelné 9 a 11, proto i původní číslo $abc - cba$ je dělitelné 9 a 11.

□

Příklad 2.1.3 Dokažte, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $6|(n^3 - n)$.

Důkaz. Budeme hledat řadu platných implikací, díky které dokážeme, že výraz $6|(n^3 - n)$ platí.

$$6|(n^3 - n) \Rightarrow 6|n(n^2 - 1) \Rightarrow 6|n(n+1)(n-1) \Rightarrow 6|(n-1)n(n+1)$$

Číslo, které je dělitelné 6, je dělitelné 2 a zároveň 3. Výraz $(n-1)n(n+1)$ je obecné vyjádření pro součin tří po sobě jdoucích čísel, z nichž je vždy alespoň jedno číslo sudé a jedno číslo násobkem 3. Např. $1 \cdot 2 \cdot 3, 20 \cdot 21 \cdot 22, 51 \cdot 52 \cdot 53, \ldots$ Výraz $n^3 - n$ je tedy dělitelný 6.

□

Příklad 2.1.4 Dokažte, že čísla tvaru *ababab* (např. 353 535, 424 242, 111 111, ...) jsou dělitelná čísly 3, 7, 13 a 37.

Důkaz. Číslo *ababab* rozepíšeme na součet jednotek, desítek, stovek, ... V tomto tvaru se nám bude s číslem lépe pracovat a řadou platných implikací zjistíme, jestli je dělitelné čísly: 3, 7, 13, 37.

$$100000a + 10000b + 1000a + 100b + 10a + b \Rightarrow 101010a + 10101b \Rightarrow 10101(10a+b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 \cdot 3367(10a+b) \Rightarrow 3 \cdot 7 \cdot 481(10a+b) \Rightarrow 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37(10a+b)$$

Číslo $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37(10a+b)$ je dělitelné 3, 7, 13 a 37.

□

Příklad 2.1.5 Dokažte, že součet dvou lichých po sobě jdoucích čísel je vždy dělitelný 4.

Důkaz. První liché číslo si vyjádříme jako $2n-1$ a následující liché číslo vyjádříme jako $2n+1$. Řadou platných implikací se pokusíme dokázat, jestli je součet těchto dvou čísel dělitelný 4.

$$2n - 1 + 2n + 1 \Rightarrow 4n$$

Číslo $4n$ je jiným vyjádřením součtu dvou po sobě následujícíh lichých čísel, které je zřejmě dělitelné 4.

□

2.2 Důkaz nepřímý

Příklad 2.2.1 Dokažte, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $2|n^2 \Rightarrow 2|n$.

Důkaz. V nepřímém důkazu využíváme vztahu $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (tzv. obměněná implikace). Pokud máme dokázat, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $2|n^2 \Rightarrow 2|n$, tak v nepřímému důkazu budeme dokazovat následující tvrzení, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $2 \nmid n \Rightarrow 2 \nmid n^2$. Dále víme, že pokud číslo není dělitelné dvěma, tak je liché, proto důkaz přepíšeme do tvaru: pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $n = 2k+1 \Rightarrow n^2$ je liché. Řadou platných implikací dokážeme tento vztah.

$$n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 2k + 1$$

Číslo $4k^2 + 2k + 1$ je liché, protože součet dvou sudých čísel a čísla lichého je vždy číslo liché (můžete zkusit dokázat sami). Dokázali jsme tedy, že platí obměněná implikace, a proto platí i původní zvrzení.

□

Příklad 2.2.2 Dokažte, že pro $\forall n \in \mathbb{N} : 5|(n^2+1) \Rightarrow 5 \nmid n$.

Důkaz. Snažíme se dokázat implikaci tvaru $5|n \Rightarrow 5 \nmid (n^2+1)$ (tedy $\neg B \Rightarrow \neg A$). Pokud je n dělitelné 5, jeho poslední číslicí je 0 nebo 5. Přirozené číslo n^2 končí také číslicí 0 nebo 5, a pokud přičteme 1, dostaneme číslo, které končí číslicí 1 nebo 6 a takové číslo určitě není dělitelné 5. Dokázali jsme, že platí obměněná implikace, a proto platí i původní tvrzení.

□

2.3 Důkaz sporem

Příklad 2.3.1 Dokažte, že číslo $\log 5$ je iracionální.

Důkaz. Při důkazu sporem, se snažíme dokázat, že negace původního tvrzení je nepravdivá. Budeme proto dokazovat, že tvrzení: číslo $\log 5$ je racionální, je nepravdivé. Víme, že pokud je $\log 5$ racionální číslo, potom existují přirozená čísla r, s taková, že platí $\log 5 = \frac{r}{s}$. Z tohoto vztahu budeme vycházet a pokusíme se ho upravit do tvaru, ve kterém bude zřejmé, že tvrzení je nepravdivé.

$$\log 5 = \frac{r}{s} \Rightarrow 5 = 10^{\frac{r}{s}} \Rightarrow 5 = \sqrt[s]{10^r} \Rightarrow 5 = \left(\sqrt[s]{10}\right)^r \Rightarrow \sqrt[r]{5} = \sqrt[s]{10} \Rightarrow \sqrt[r]{5^s} = 10 \Rightarrow 5^s = 10^r$$

Výrok, který jsme získali řadou platných implikací. je nepravdivý, protože číslo 5^s končí číslicí 5 pro $\forall s \in \mathbb{N}$ a číslo 10^r končí číslicí 0 pro $\forall r \in \mathbb{N}$. Dokázali jsme tedy, že negace původního tvrzení neplatí a došli jsme ke sporu. Proto platí původní tvrzení, že číslo $\log 5$ je iracionální.

□

Příklad 2.3.2 Jsou dány body $A = [3,0], B = [4,1], C = [2,3]$. Dokažte, že tyto body jsou vrcholy trojúhelníku.

Důkaz. Budeme předpokládat, že body leží na jedné přímce, a pokud dojdeme ke sporu s naším předpokladem, dokážeme, že platí původní tvrzení (tzn. body jsou vrcholy trojůhelníku). Z bodů vytvoříme vektory, a budeme se snažit dokázat, že tyto vektory jsou lineárně závislé.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (4-3, 1-0) = (1,1)$$
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (2-3, 3-0) = (-1,3)$$

Aby byly vektory lineárně závislé, musí existovat $k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$.

$$(1,1) = k(-1,3) \Rightarrow k = -1 \wedge k = \frac{1}{3}$$

Došli jsme ke sporu, protože číslo k nemůže nabývat dvě různé hodnoty. Vektory $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{v}$ jsou lineárně nezávislé, a proto body A, B a C jsou v obecné poloze, tzn. tvoří vrcholy trojúhelníku.

□

2.4 Důkaz jednoznačnosti a existence

Příklad 2.4.1 Konference se zúčastnilo 40 delegátů z 13 různých zemí. Dokažte, že delegace alespoň jedné země měla víc než tři členy.

Důkaz. V tomto příkladu se jedná o ryze existenční důkaz, proto existenci delegace, která má alespoň tři členy dokážeme přímo bez jakéhokoliv určení. Pro důkaz použijeme silnější verzi Dirichletova principu, který tvrdí, že pokud je $kn + 1$ předmětů rozdělených do n skupin ($n \in \mathbb{N}$), potom alespoň v jedné skupině se nachází $k + 1$ předmětů.

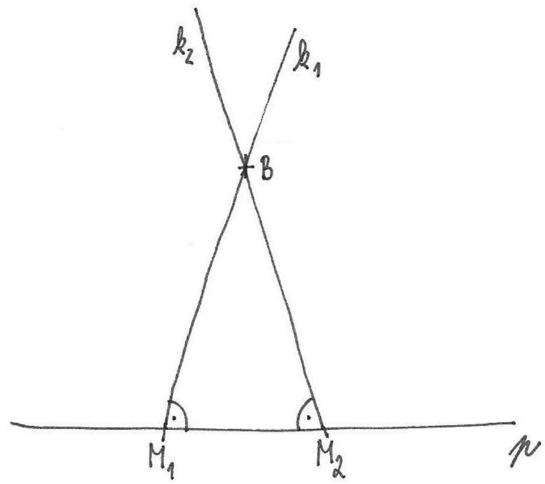
Delegáty rozdělíme do skupin podle zemí, z kterých přijeli (tzn. v každé skupině jsou delegáti ze stejné země). Máme tedy 13 skupin a pokud by v každé skupině byli pouze tři delegáti, konference by se mohlo účastnit pouze $3 \cdot 13$ delegátů, tzn. 39 delegátů. V zadání ovšem je, že konference se účastnilo 40 delegátů, proto alespoň v jedné skupině musí být čtyři delegáti.

□

Příklad 2.4.2 Dokažte, že z bodu B lze vést právě jednu přímku k kolmou na přímku p.

Důkaz. Budeme předpokládat, že existují dvě kolmice k_1, k_2 na přímku p procházející bodem B. Paty kolmic na přímce p označíme M_1 a M_2. Věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku říká, že tento součet je roven 180°. Součet vnitřních úhlů v $\triangle BM_1M_2$ je ale větší než 180° a tím dostáváme spor. Dokázali jsme, že náš předpoklad je nepravdivý, a proto platí původní tvrzení, že z bodu B lze vést právě jednu přímku k kolmou na přímku p.

□



Obrázek 2.1: $\triangle BM_1M_2$

Příklad 2.4.3 Dokažte, že pro $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ má rovnice $ax = b$ právě jedno řešení.

Důkaz. Budeme předpokládat, že rovnice má dva různé kořeny x_1 a x_2, tzn. $x_1 \neq x_2$. Platí tedy

$$ax_1 = b \quad \wedge \quad ax_2 = b$$

Tyto dvě rovnice můžeme přepsat do jedné rovnice, kterou upravíme.

$$\begin{aligned} ax_1 &= ax_2 \\ ax_1 - ax_2 &= 0 \\ a(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Je zřejmé, že rovnice je splněna, pokud $x_1 - x_2 = 0$, tzn. $x_1 = x_2$. Došli jsme ke sporu s předpokladem, že kořeny rovnice x_1 a x_2 jsou různé, tzn. $x_1 \neq x_2$. Platí proto původní tvrzení, že rovnice $ax = b$ má právě jedno řešení.

□

2.5 Důkaz matematickou indukcí

Příklad 2.5.1 Dokažte, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

1) Dokážeme rovnost pro $n=1$

$$L=1 \qquad P=\frac{1\cdot 2}{2}=1 \qquad \Rightarrow \qquad L=P$$

2) Předpokládáme, že pro $n=k, k\in\mathbb{N}$ platí

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Za tohoto předpokladu dokážeme, že rovnost platí i pro $n=k+1$

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Budeme vycházet z levé strany rovnice a postupnými algebraickými úpravami se budeme snažit získat pravou stranu rovnice.

$$L=\boxed{1+2+\cdots+k}+k+1=\boxed{\frac{k(k+1)}{2}}+k+1=\frac{k(k+1)+2k+2}{2}=\frac{k^2+k+2k+2}{2}=$$
$$=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=P$$

Příklad 2.5.2 Dokažte, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$$

1) Dokážeme rovnost pro $n=1$

$$L=1\cdot 1!=1 \qquad P=(1+1)!-1=2-1=1 \qquad \Rightarrow \qquad L=P$$

2) Předpokládáme, že pro $n=k, k\in\mathbb{N}$ platí

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1$$

Za tohoto předpokladu dokážeme, že rovnost platí i pro $n=k+1$

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+k\cdot k!+(k+1)(k+1)!=(k+2)!-1$$

Budeme vycházet z levé strany rovnice a postupnými algebraickými úpravami se budeme snažit získat pravou stranu rovnice.

$$L=\boxed{1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+k\cdot k!}+(k+1)(k+1)!=\boxed{(k+1)!-1}+(k+1)(k+1)!=$$
$$=(k+1)!(1+k+1)-1=(k+1)!(k+2)-1=(k+2)!-1=P$$

Příklad 2.5.3 Dokažte, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

1) Dokážeme rovnost pro $n = 1$

$$L = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \qquad P = \frac{1.2.3.4}{4} = \frac{24}{6} = 6 \qquad \Rightarrow \qquad L = P$$

2) Předpokládáme, že platí pro $n = k, k \in \mathbb{N}$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

Za tohoto předpokladu dokážeme, že rovnost platí i pro $n = k+1$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

Budeme vycházet z levé strany rovnice a postupnými algebraickými úpravami se budeme snažit získat pravou stranu rovnice.

$$L = \boxed{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2)} + (k+1)(k+2)(k+3) =$$

$$= \boxed{\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}} + (k+1)(k+2)(k+3) =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} = P$$

Příklad 2.5.4 Utvořte hypotézu toho, jak vypadá n-tý částečný součet S_n (tj. $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$), a hypotézu ověřte pomocí matematické indukce.

a) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 1$,

b) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$.

Řešení:

a) Nejdříve si vypočítáme $S_1, S_2, S_3, \ldots$ a pomocí těchto částečných součtů se pokusíme odhadnout, jak bude vypadat S_n.

$$S_1 = 1 \qquad S_2 = 1 + 3 = 4 \qquad S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 \qquad S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

Z vypočítaných částečných součtů, si můžeme povšimnout, že každý částečný součet je roven druhé mocnině: $S_1 = 1^2, S_2 = 2^2, S_3 = 3^2, S_4 = 4^2, \ldots$ Hypotéza pro n-tý částečný součet je tvaru $S_n = n^2$.

Nyní dokážeme platnost hypotézy pomocí matematické indukce. Snažíme se dokázat, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 1 = n^2$$

1) Dokážeme rovnost pro $n = 1$

$$L = 1 \qquad P = 1^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad L = P$$

2) Předpokládáme, že platí pro $n = k, k \in \mathbb{N}$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2k - 1 = k^2$$

Za tohoto předpokladu dokážeme, že rovnost platí i pro $n = k + 1$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2k - 1 + 2(k+1) - 1 = (k+1)^2$$

Budeme vycházet z levé strany rovnice a postupnými algebraickými úpravami se budeme snažit získat pravou stranu rovnice.

$$L = \boxed{1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2k - 1} + 2(k+1) - 1 = \boxed{k^2} + 2k + 2 - 1 = k^2 + 2k + 1 =$$
$$= (k+1)^2 = P$$

b) Při hledání hypotézy začneme opět tím, že si vypočítáme několik částečných součtů $S_1, S_2, S_3, \ldots$

$$S_1 = 2 \qquad S_2 = 2 + 4 = 6 \qquad S_3 = 2 + 4 + 6 = 12 \qquad S_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

Můžeme si povšimnout pravidelnosti u částečných součtů, konkrétně následující pravidelnosti: $S_1 = 1 \cdot 2, S_2 = 2 \cdot 3, S_3 = 3 \cdot 4, S_4 = 4 \cdot 5, \ldots$ Hypotéza pro n-tý částečný součet je tvaru $S_n = n(n+1)$

Platnost hypotézy ověříme pomocí matematické indukce. Chceme dokázat, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$$

1) Dokážeme rovnost pro $n = 1$

$$L = 2 \qquad P = 1(1+1) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad L = P$$

2) Předpokládáme, že rovnost platí pro $n = k, k \in \mathbb{N}$

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k+1)$$

Za tohoto předpokladu dokážeme, že rovnost platí i pro $n = k + 1$

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

Budeme vycházet z levé strany rovnice a postupnými algebraickými úpravami se budeme snažit získat pravou stranu rovnice.

$$L = \boxed{2 + 4 + 6 + \cdots + 2k} + 2(k+1) = \boxed{k(k+1)} + 2k + 2 = k^2 + k + 2k + 2 =$$
$$= k^2 + 3k + 2 = (k+1)(k+2)$$

2.6 Příklady k procvičení

Cvičení 2.6.1 Dokažte, že čísla: $\sqrt{2}$, $\log 2$ a $\sqrt{3}$ jsou iracionální.

Cvičení 2.6.2 Dokažte, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

a) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$,

b) $\dfrac{1^2}{1.3} + \dfrac{2^2}{3.5} + \cdots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$,

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Cvičení 2.6.3 Dokažte, že platí

a) součet dvou lichých čísel je číslo sudé,

b) součet sudého čísla a lichého čísla je číslo liché,

c) součin dvou sudých čísel je číslo sudé a je dělitelné 3,

d) součet lichého čísla a sudého čísla je číslo sudé.

Cvičení 2.6.4 Dokažte, že pro $\forall n \in \mathbb{N} : 3|(n^2+1) \Rightarrow 6 \nmid n$.

Cvičení 2.6.5 Dokažte, že pro $\forall n \in \mathbb{N} : 3|n^2 \Rightarrow 3|n$.

Cvičení 2.6.6 Na vysokou školu přijali do prvního ročníku 120 studentů, kteří maturovali na 84 různých středních školách. Dokažte, že se v prvním ročníku vysoké školy potkají alespoň dva studenti, kteří se znají již ze střední školy.

Kapitola 3

Základy teorie množin

V kapitole Základy teorie množin budeme pracovat se základními množinovými vztahy a operacemi, jako je množinová inkluze, sjednocení, průnik, rozdíl a doplněk. Ukážeme si také, jak můžeme množiny znázorňovat a jak lze dokazovat množinové rovnosti a další vztahy. Osvětlíme si také pojmy uspořádaná a neuspořádaná dvojice.

Příklad 3.1 Dokažte, že platí:

a) $A' \cup (B \cap C') = (A' \cup B) \cap (A \cap C)'$,

b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$,

c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Řešení:

a) Použijeme metodu neurčitého prvku. Nejdříve budeme vycházet z levé strany rovnice a budeme se snažit získat pravou stranu rovnice. Platí tedy

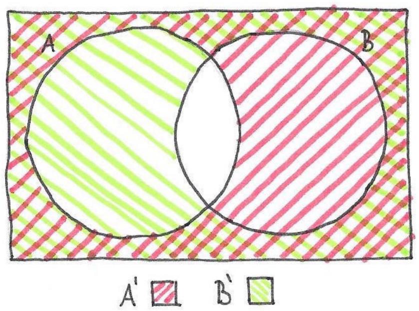
$$\begin{aligned} x \in L &\Rightarrow x \notin A \vee (x \in B \wedge x \notin C) \Rightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \wedge x \notin C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in A' \vee x \in B) \wedge (x \in A' \wedge x \in C') \Rightarrow x \in (A' \cup B) \cap x \in (A \cap C)' \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in (A' \cup B) \cap (A \cap C)' \Rightarrow x \in P \Rightarrow L \subseteq P \end{aligned}$$

Nyní se pokusíme dokázat rovnost naopak, tedy budeme vycházet z pravé strany rovnice a pokusíme se získat levou stranu rovnice. Získáme následující řadu implikací

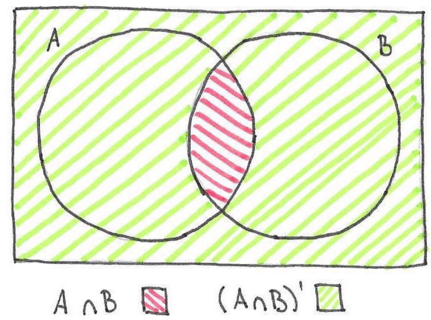
$$\begin{aligned} x \in P &\Rightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \wedge x \notin C) \Rightarrow x \notin A \vee (x \in B \wedge x \notin C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in A' \cup (B \cap C') \Rightarrow x \in L \Rightarrow P \subseteq L \end{aligned}$$

Z výše uvedeného plyne, že $P = L$, a proto rovnost platí.

b) Pro dokázání tohoto vztahu využijeme Vennovy diagramy.



Obrázek 3.1: $A' \cup B'$



Obrázek 3.2: $(A \cap B)'$

c) Použijeme metodu neurčitého prvku. Vezmeme si libovolnou uspořádanou dvojici z levé strany a pomocí vhodných implikací se pokusíme dokázat, že náleží i pravé straně rovnice.

$$\begin{aligned}(x,y) \in L \Rightarrow (x,y) \in (A \cap B) \times C \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C \Rightarrow \\ \Rightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C) \Rightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x,y) \in P \Rightarrow L \subseteq P\end{aligned}$$

Nyní se pokusíme dokázat, že libovolná uspořádaná dvojice z pravé strany rovnice náleží také levé straně rovnice.

$$\begin{aligned}(x,y) \in P \Rightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C) \Rightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C \Rightarrow (x,y) \in (A \cap B) \times C \Rightarrow (x,y) \in L \Rightarrow P \subseteq L\end{aligned}$$

Odtud tedy plyne, že $P = L$ a rovnost platí.

Příklad 3.2 Udejte příklad podmínky pro to, aby $A \subset B$ která je

a) nutná, ale ne dostatečná,

b) dastatečná, ale ne nutná,

c) nutná i dostatečná.

Řešení:

a) Pokud má být A vlastní podmnožina B, musí platit např. $A \neq B$

b) Stačí uvést jakýkoli příklad množin A a B, které splňují uvedený vztah. Např. $A = \{4,5,6\}, B = \mathbb{R}; A = \mathbb{N}, B = \mathbb{R}; \dots$

c) Stačí si rozmyslet, co musí obecně platit pro vlastní podmnožinu. Množiny A a B jsou různé, a pokud patří prvek do množiny A, potom patří i do množiny B (neboli $A \neq B \wedge x \in A \Rightarrow x \in B$)

Příklad 3.3 Nechť $A = \{x,y,z\}$. Rozhodněte o pravdivosti nebo nepravdivosti následujících výroků:

a) $\{y\} \in A$,	c) $z \in A$,	e) $\{\emptyset\} \subseteq A$,	g) $\{\emptyset\} \in A$,
b) $\emptyset \in A$,	d) $\{z\} \subseteq A$,	f) $x \subseteq A$,	h) $\emptyset \subseteq A$.

Řešení:

a) Množina A má pouze prvky: x,y,z. Proto $\{y\} \notin A$.

b) Množina A má prvky: x,y,z. Proto $\emptyset \notin A$.

c) Množina A má prvky: x,y,z. Proto $z \in A$.

d) Podmnožiny množiny A jsou: $\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{y,z\}, \{x,z\}, \{x,y,z\}$. Tvrzení $\{z\} \subseteq A$ je pravdivé.

e) Množina A má 8 podmnožin: $\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{y,z\}, \{x,z\}, \{x,y,z\}$. Tvrzení $\{\emptyset\} \subseteq A$ je proto nepravdivé.

f) Množina A má podmnožiny: $\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{y,z\}, \{x,z\}, \{x,y,z\}$. Tvrzení $x \subseteq A$ je zřejmě nepravdivé.

g) Množina A má prvky: x,y,z. Proto $\{\emptyset\} \notin A$.

h) Množina A má tyto podmnožiny: $\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{y,z\}, \{x,z\}, \{x,y,z\}$. Tvrzení $\emptyset \subseteq A$ je tedy nepravdivé.

Sami si rozmyslete, jak upravit jednotlivá tvrzení, aby byla všechna pravdivá.

Příklad 3.4 Jsou dány množiny: $A = \{1,3,5,7\}, B = \{z \in \mathbb{Z} : |z-3| \leq 2\}, C = \{n \in \mathbb{N} : n < 4\}, D = \{x \in \mathbb{N} : \frac{x-6}{-3} > 0\}$. Určete, jak budou vypadat množiny:

a) $A \setminus B$,
b) $A \cup B$,
c) $D \setminus A$,
d) $A \cap B$,
e) $C' \cap B$,
f) 2^c.

Řešení: Nejprve si vyjádříme všechny množiny výčtem prvků, stejně jako máme vyjádřenou množinu A. Množiny budou tvaru: $A = \{1,3,5,7\}, B = \{1,2,3,4,5\}, C = \{1,2,3\}, D = \{1,2,3,4,5\}$. V tomto tvaru se nám s množinami bude lépe pracovat, a proto můžeme začít řešit příklad.

a) V množině A odebereme prvky, které má společné s množinou B, a dostaneme řešení $A \setminus B = \{7\}$.

b) Do sjednocení množin A a B patří všechny prvky z obou množin a řešení je následující: $A \cup B = \{1,2,3,4,5,7\}$.

c) Postupujeme analogicky jako u a) (z množiny D odeberu prvky, které jsou v množině A), tedy $D \setminus A = \{2,4\}$.

d) Průnik množiny A a množiny B určíme tak, že najdeme společné prvky obou množin, tedy $A \cap B = \{1,3,5\}$.

e) Nejprve zjistíme, jak vypadá doplněk množiny C, tedy $C' = \mathbb{N} - \{1,2,3\} = \{4,5,6,\dots\}$. Když už víme, jak vypadá doplněk, stačí pouze najít společné prvky množin C' a B, proto $C' \cap B = \{4,5\}$.

f) Určíme systém podmnožin množiny C. Množina C má 3 prvky, proto má systém podmnožin $2^3 = 8$ prvků, které jsou tvaru: $2^c = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Příklad 3.5 Rozhodněte, ve kterých případech se jedná o uspořádanou dvojici a kdy nikoli.

a) $\{\{3\}\}$,
b) $\{\{3\},\{3,4\}\}$,
c) $\{\{1\},\{2,1\}\}$,
d) $\{\{3,3\}\}$,
e) $\{\{1\},\{3,4\}\}$,
f) $\{\{3,5\},\{6\}\}$.

Řešení: Nejdříve si připomeneme definici uspořádané dvojice. Uspořádanou dvojici definujeme takto: $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$. Proto příklad vyřešíme tak, že se pokusíme upravit jednotlivé množiny do tohoto tvaru.

a) Množinu $\{\{3\}\}$ si můžeme rozepsat jako $\{\{3\},\{3\}\}$, protože v množině se prvky mohou opakovat. Množinu $\{\{3\},\{3\}\}$ si také můžeme dále upravit $\{\{3\},\{3,3\}\}$. Z definice je tedy zřejmé že se jedná o uspořádanou dvojici tvaru $(3,3)$.

b) Množinu $\{\{3\},\{3,4\}\}$ nemusíme ani upravovat a přímo z definice vidíme, že se jedná o uspořádanou dvojici tvaru $(3,4)$.

c) Množinu $\{\{1\},\{2,1\}\}$ si můžeme upravit do tvaru $\{\{1\},\{1,2\}\}$, protože v množině nezáleží na pořadí prvků. Z definice je tedy zřejmé, že se jedná o uspořádanou dvojici tvaru $(1,2)$.

d) Množinu $\{\{3,3\}\}$ si můžeme upravit do tvaru $\{\{3\}\}$, protože v množině stačí napsat prvek, který se opakuje pouze jednou. Množina $\{\{3\}\}$ se upraví do tvaru $\{\{3\},\{3,3\}\}$ (viz a)), a proto se jedná o uspořádanou dvojici $(3,3)$.

e) Množinu $\{\{1\},\{3,4\}\}$ nemůžeme upravit do tvaru, jaký je v definici uspořádané dvojice, proto se v tomto případě o uspořádanou dvojici nejedná.

f) Množinu $\{\{3,5\},\{6\}\}$ neupravíme do tvaru, jaký je v definici, proto se nejedná o uspořádanou dvojici.

3.1 Příklady k procvičení

Cvičení 3.1.1 Jsou dány množiny $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 3\}, B = \{x \in \mathbb{Z} : -1 < x \leq 5\}$. Určete, jak budou vypadat množiny:

a) $A \cap B$, b) $A \cup B$, c) $B \setminus A$.

Cvičení 3.1.2 Najděte takové množiny A a B, pro které platí: $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g\}, A \cap B = \{c,d\}, B \setminus A = \{e,f,g\}$.

Cvičení 3.1.3 Dokažte, že následující vztahy platí:

a) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$,

b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Cvičení 3.1.4 Určete, za jakých podmínek mohou platit následující rovnosti:

a) $A \cap B = A$, b) $A \cup B = A$.

Cvičení 3.1.5 Je dána množina $A = \{a, b, c\}$ a množina $B = \{1, 2\}$. Určete, jak budou vypadat množiny:

a) $A \times B$,

b) $B \times A$,

c) $B \times 2^B$,

d) $A \times A$.

Cvičení 3.1.6 Dokažte, že platí následující vztahy:

a) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$,

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,

c) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,

d) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$.

Cvičení 3.1.7 Rozhodnětě, zda platí následující vztahy:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$,

c) $A \setminus B = B \setminus A$,

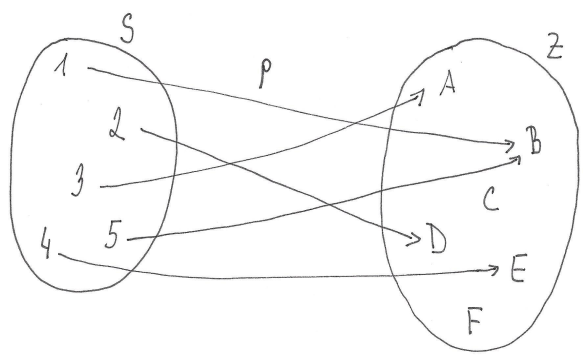
d) $(A \setminus B) \cup (A \cap C) = A \setminus (B \setminus C)$.

Kapitola 4

Relace

V této kapitole budeme pracovat s pojmy relace mezi množinami a relace na množině. Seznámíme se se základními vlastnostmi relace na množině a ukážeme si, jak tyto vlastnosti poznáme z tabulky relace či z uzlového grafu relace. Je velmi důležité ovládat látku z této kapitoly, protože s pojmem relace na množině a jejími vlastnostmi budeme pracovat i v dalších kapitolách.

Příklad 4.1 Pět studentů psalo test. Na schématu vidíte, že student 1 získal z testu známku B, student 2 známku D, student 3 známku A, student 4 známku E a student 5 známku B.

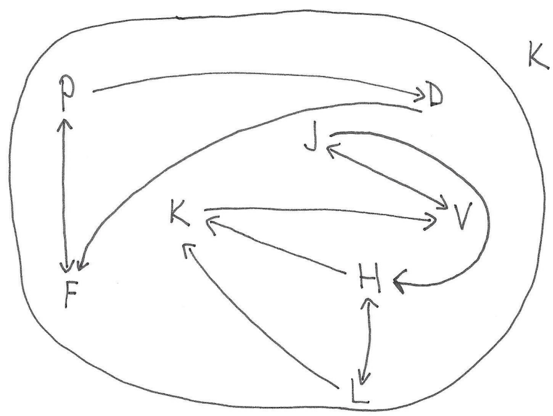


Obrázek 4.1: Schéma studentů a jejich získaných známek

Ze schématu je zřejmé, že se jedná o dvě množiny, kdy první je množina studentů $S = \{1,2,3,4,5\}$ a druhá je množina známek $Z = \{A,B,C,D,E,F\}$. Obě množiny jsou v určitém vztahu, který nazýváme relace (v tomto příkladu ji můžeme popsat jako "získal"). Tato relace přiřazuje každému studentovi známku, kterou získal v testu. Tímto přiřazením vznikají uspořádané dvojice, např. $(\text{student}\,1,B)$, $(\text{student}\,4,E)$, … Obecně jsou v tomto příkladu uspořádané dvojice tvaru (student, známka). Tyto uspořádané dvojice jsou prvky nové množiny $\rho = \{(1,A),(2,D),(3,A),(4,E),$ $(5,B)\}$. Množina ρ je relace mezi množinami S a Z a můžeme ji znázorňovat několika způsoby - množinami, tabulkou, graficky. Sami si zkuste relaci ρ znázornit i jinými způsoby.

Příklad 4.2 V předchozím příkladu jsme vytvářeli relaci mezi dvěma různými množinami A a B. Nyní se zamysleme, co nastane, pokud $A = B$.

Je dána množina $K = \{$Petr, Jana, Hana, Viktor, Dan, Lucie, Karel, Filip$\}$. Relace ρ znázorňuje, kdo se chce s kým ve skupině dětí kamarádit. Vidíme tedy, že pro utvoření relace nám stačí i jedna množina.



Obrázek 4.2: Schéma vztahů mezi kamarády

Petr se chce kamarádit s Filipem a také Filip se chce kamarádit s Petrem, proto spojíme obě jména obousměrnou šipkou. Jana se chce kamarádit s Hanou, ale Hana se nechce kamarádit s Janou, proto jde šipka pouze směrem k Haně. Vznikla relace $\rho = \{(P,F),(F,P),(D,F),(P,D),$ $(J,H),(H,K),(K,V),(V,J),(J,V),(L,H),(H,L),(L,K)\}$ vztahů v této skupině dětí.

Příklad 4.3 Je dána množina $A = \{a,b,c\}$. Kolik různých relací je možné vytvořit:

a) mezi 2^A a A,

b) na A,

c) mezi A a $\emptyset$,

d) na $A \times A$.

Řešení:

a) Relace mezi množinami 2^A a A je libovolná podmnožina kartézského součinu $2^A \times A$. Množina 2^A má 2^3 prvků a množina A má 3 prvky. Kartézský součin $2^A \times A$ má tedy $8 \cdot 3$ prvků. Počet podmnožin kartézského součinu $2^A \times A$ je 2^{24}, můžeme tedy vytvořit 2^{24} různých relací mezi množinami 2^A a A.

b) Relace na množině A je libovolná podmnožina kartézského součinu A $\times$ A, který má 3·3 prvků. Podmnožin tohoto kartézského součinu je 2^9.

c) Relace mezi množinou A a prázdnou množinou je libovolná podmnožina kartézského součinu $A \times \emptyset$. Tento kartézský součin je prázdnou podmnožinou, má proto 0 prvků. Počet podmnožin $A \times \emptyset$ je 2^0 a je právě jedna možnost, jak relaci utvořit.

d) Relace na množině $A \times A$ je libovolná podmnožina kartézského součinu $(A \times A) \times (A \times A)$. Kartézský součin $A \times A$ má 9 prvků, proto kartézský součin $(A \times A) \times (A \times A)$ má $9 \cdot 9$ prvků. Počet podmnožin kartézského součinu $(A \times A) \times (A \times A)$ je 2^{81}.

Příklad 4.4 Je dána množina $A = \{1,2,3\}$. Relace (A,ρ) je zadána takto: $x\rho y \Leftrightarrow 2x - y \geq 3$. Určete, jak bude vypadat tabulka a uzlový graf relace ρ.

Řešení: Při řešení tohoto příkladu budeme postupovat tak, že ověříme u všech dvojic prvků, zda jsou spolu v relaci či nikoli. Díky tomu zjistíme, jak bude vypadat tabulka relace ρ, a následně nakreslíme uzlový graf relace ρ.

Jako první např. ověříme, jestli $1\rho 1$. Do nerovnice $2x - y \geq 3$ dosadíme $x = 1$ a $y = 1$ a zjistíme, jestli tato dvojice splňuje nerovnici.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 - 1 &\geq 3 \\ 1 &\geq 3 \end{aligned}$$

Tato nerovnice neplatí, a proto $(1,1) \notin \rho$ a do tabulky napíšeme 0.

ρ	**1**	**2**	**3**
1	0		
2			
3			

Dále ověříme, jestli platí $2\rho 1$. Do nerovnice $2x - y \geq 3$ dosadíme $x = 2$ a $y = 1$ a zjistíme, jestli tato dvojice splňuje nerovnici.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 - 1 &\geq 3 \\ 3 &\geq 3 \end{aligned}$$

Nerovnice je splněna, tedy $(2,1) \in \rho$ a do tabulky napíšeme 1.

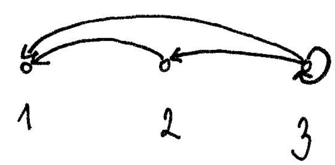
ρ	**1**	**2**	**3**
1	0		
2	1		
3			

Takto postupně ověříme všechny uspořádané dvojice a dojdeme k následujícímu řešení:

ρ	**1**	**2**	**3**
1	0	0	0
2	1	0	0
3	1	1	1

Ekvivalentní zápis je $\rho = \{(2,1),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

Uzlový graf relace ρ vytvoříme tak, že prvky, které jsou spolu v relaci, spojíme šipkou. Pokud je $(2,1) \in \rho$, půjde šipka z bodu 2 do bodu 1. Pokud je $(3,1) \in \rho$, půjde šipka z bodu 3 do bodu 1. Dvojici prvků $(3,2) \in \rho$ znázorníme do uzlového grafu tak, že šipku povedeme z bodu 3
do bodu 2. Pokud je prvek v relaci sám se sebou, jako v případě $(3,3) \in \rho$, nakreslíme kolem něj tzv. smyčku (šipka, která začíná i končím v jednom bodě).



Obrázek 4.3: Uzlový graf relace ρ

Příklad 4.5 Je dána množina $A = \{a,b,c,d\}$. Udejte tabulkou a uzlovým grafem příklad relace:

a) ρ_1, která je reflexivní,

b) ρ_2, která je symetrická,

c) ρ_3, která je antisymetrická,

d) ρ_4, která je tranzitivní,

e) ρ_5, která je úplná.

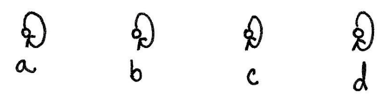
Řešení:

a) ρ_1 je reflexivní

Aby byla relace reflexivní, musí platit: jestliže $x \in A \Rightarrow x\rho x$. Tato vlastnost se v tabulce projeví tak, že v hlavní diagonále jsou pouze 1. Políčka mimo hlavní diagonálu nemají na reflexivitu žádný vliv, pro názornost je vyplníme 0.

Reflexivita se z uzlového grafu pozná tak, že každý prvek relace ρ_1 má kolem sebe smyčku.

ρ_1	**a**	**b**	**c**	**d**
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

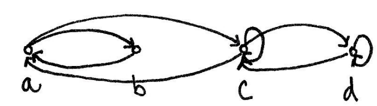


Obrázek 4.4: Tabulka relace ρ_1 Obrázek 4.5: Uzlový graf relace ρ_1

b) ρ_2 je symetrická

Pro symetrickou relaci musí platit: jestliže $x, y \in A \wedge x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$. Symetrii poznáme z tabulky tak, že je symetrická podle hlavní diagonály. Tabulka může být např. tvaru:

ρ_2	**a**	**b**	**c**	**d**
a	0	1	1	0
b	1	0	0	0
c	1	0	1	1
d	0	0	1	1



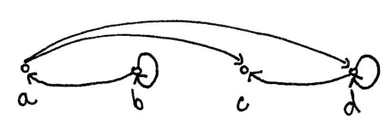
Obrázek 4.6: Tabulka relace ρ_2 Obrázek 4.7: Uzlový graf relace ρ_2

V uzlovém grafu se symetrie projeví tak, že mezi dvěma různými body jsou buď dvě šipky nebo žádná šipka (lze odvodit i z tabulky). V uzlovém grafu symetrické relace proto nemůže nastat taková situace, aby byl prvek spojen s jiným prvkem pouze jednou šipkou.

c) ρ_3 je antisymetrická

Antisymetrická relace musí splňovat vztah: jestliže $x, y \in A \wedge x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$. Z tabulky antisymetrii poznáme tak, že dvě různá políčka symetrická podle hlavní diagonály obsahují nejvýše jednu 1.

ρ_3	**a**	**b**	**c**	**d**
a	0	0	1	1
b	1	1	0	0
c	0	0	0	0
d	0	0	1	1



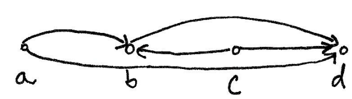
Obrázek 4.8: Tabulka relace ρ_3 Obrázek 4.9: Uzlový graf relace ρ_3

Antisymetrie se v uzlovém grafu projeví tak, že mezi dvěma různými body je nejvýše jedna šipka (jedna šipka nebo žádná).

d) ρ_4 je tranzitivní

Tranzitivní relace je definována takto: jestliže $x,y,z \in A \land x\rho y \land y\rho z \Rightarrow x\rho z$. Tranzitivní relaci z tabulky nepoznáme na první pohled, protože není žadné jasně dané pravidlo jako u ostatních vlastností. U toho příkladu postačí, když si vymyslíme jakoukoliv tranzitivní relaci. Můžeme proto např. říct, že: $a\rho b \land b\rho d \Rightarrow a\rho d$. Pokud by relace ρ_4 obsahovala pouze tyto tři uspořádané dvojice, už bychom mohli říct, že je relace ρ_4 tranzitivní. Pro názornost ale doplníme ještě další trojici uspořádaných dvojic např. $c\rho b \land b\rho d \Rightarrow c\rho d$.

ρ_4	**a**	**b**	**c**	**d**
a	0	1	0	1
b	0	0	0	1
c	0	1	0	1
d	0	0	0	0



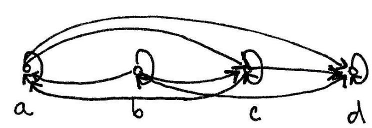
Obrázek 4.10: Tabulka relace ρ_4 Obrázek 4.11: Uzlový graf relace ρ_4

Pokud hledáme uzlový graf tranzitivní relace, tak stejně jako v případě tabulky není žádné pravidlo, které musí platit, aby byla relace tranzitivní. Budeme muset postupovat stejně jako v případě tabulky.

e) ρ_5 je úplná

Úplná relace je definována vztahem: jestliže $x,y \in A \Rightarrow x\rho y \lor y\rho x$. Úplnou relaci poznáme z tabulky tak, že v hlavní diagonále jsou samé 1 a dvě různá políčka symetrická podle hlavní diagonály obsahují alespoň jednu 1.

ρ_5	**a**	**b**	**c**	**d**
a	1	0	1	1
b	1	1	1	1
c	1	0	1	1
d	0	0	0	1



Obrázek 4.12: Tabulka relace ρ_5 Obrázek 4.13: Uzlový graf relace ρ_5

Z uzlového grafu poznáme úplnou relaci tak, že každý bod je opatřen smyčkou a každé dva různé body jsou spojeny alespoň jednou šipkou.

Poznámka. Relace, které jsou v tomto příkladu uvedeny, jsou pouze jednou z mnoha možností. Příklad je zde zařazen proto, aby bylo zřejmé, jak se jednotlivé vlastnosti projeví v tabulce a v uzlovém grafu.

Příklad 4.6 Je dána množina $A = \{a,b,c,d,e\}$ a relace $\rho = \{(a,a),(b,b),(a,d),(d,b),(b,e)\}$. Nakreslete tabulku relace ρ a doplňte relaci ρ nejmenším možným způsobem tak, aby byla:

a) reflexivní,
b) symetrická,
c) antisymetrická,
d) tranzitivní,
e) úplná.

Řešení: Příklad začneme řešit tak, že si nakreslíme tabulku relace ρ.

ρ	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
a	1	0	0	1	0
b	0	1	0	0	1
c	0	0	0	0	0
d	0	1	0	0	0
e	0	0	0	0	0

a) Aby relace ρ byla reflexivní musí platit: jestliže $x \in A \Rightarrow x\rho x$, což se v tabulce projeví tak, že v hlavní diagonále budou samé 1.

ρ	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
a	1	0	0	1	0
b	0	1	0	0	1
c	0	0	1	0	0
d	0	1	0	1	0
e	0	0	0	0	1

Relace ρ proto doplníme takto: $\rho = \{(a,a),(b,b),(a,d),(d,b),(b,e),(c,c),(d,d),(e,e)\}$

b) Pro relaci, která je symetrická, musí platit: $x,y \in A \wedge x\rho y \Rightarrow y\rho x$. Tato vlastnost se v tabulce projeví tak, že tabulka bude symetrická podle hlavní diagonály.

ρ	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
a	1	0	0	1	0
b	0	1	0	1	1
c	0	0	0	0	0
d	1	1	0	0	0
e	0	1	0	0	0

Relaci ρ proto doplníme následujícím způsobem: $\rho = \{(a,a),(b,b),(a,d),(d,b),(b,e),(d,a),(b,d),(e,b)\}$

c) Antisymetrická relace je definována takto: jestliže $x,y \in A \wedge x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$. Antisymetrii poznáme z tabulky tak, že dvě různá políčka symetrická podle hlavní diagonály obsahuje nejvýše jednu 1.

ρ	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
a	1	0	0	1	0
b	0	1	0	0	1
c	0	0	0	0	0
d	0	1	0	0	0
e	0	0	0	0	0

Z tabulky je zřejmé, že relaci ρ doplňovat nemusíme, protože již je antisymetrická.

d) Relace, která je tranzitivní splňuje vztah: jestiže $x,y,z \in A \wedge x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$. V relaci ρ, kterou je třeba doplnit vidíme, že je $a\rho d \wedge d\rho b$, proto musíme doplnit $a\rho b$. Dále vidíme, že $d\rho b \wedge b\rho e$, je tedy třeba doplnit $d\rho e$. Pokud doplníme $a\rho e$, protože $a\rho b \wedge b\rho e$, získáváme relaci, která je tranzitivní.

ρ	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
a	1	1	0	1	1
b	0	1	0	0	1
c	0	0	0	0	0
d	0	1	0	0	1
e	0	0	0	0	0

Relaci ρ, která je tranzitivní, je tvaru: $\rho = \{(a,a),(b,b),(a,d),(d,b),(b,e),(a,b),(a,e),(d,e)\}$.

e) Aby byla relace úplná, musí splňovat tuto definici: jestliže $x,y \in A \Rightarrow x\rho y \vee y\rho x$. Tato vlastnost se projeví v tabulce tak, že v hlavní diagonále jsou samé 1 a dvě různá políčka symetrická podle hlavní diagonály obsahují alespoň jednu 1.

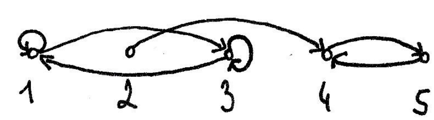
ρ	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
a	1	0	0	1	0
b	1	1	0	0	1
c	1	1	1	0	0
d	0	1	1	1	0
e	1	0	1	1	1

Aby byla relace ρ úplná, musíme ji proto doplnit následujícím způsobem: $\rho = \{(a,a),(b,b),(a,d),(d,b),(b,e),(c,c),(d,d),(e,e),(b,a),(c,a),(c,b),(d,c),(e,a),(e,c),(e,d)\}$

Sami si zkuste ke každé z možností nakreslit také uzlový graf relace. Sami posuďte, zda je snazší jednotlivé vlastnosti poznat z tabulky či z uzlového grafu.

Příklad 4.7 Je dána množina $A = \{1,2,3,4,5\}$. Nakreslete uzlový graf relace $\rho = \{(1,1),(1,3),$ $(2,4),(3,1),(3,3),(4,5)(5,4)\}$ a rozhodněte, jaké vlastnosti má tato relace (reflexivní, symetrická, antisymetrická, úplná).

Řešení:
Uzlový graf relace ρ nalezneme tak, že jednotlivé dvojice prvků, které jsou spolu v relaci, zakreslíme do grafu. Začneme např. dvojicí $(1,1)$. Pokud je prvek v relaci sám se sebou, nakreslíme kolem odpovídajícího bodu šipku, která začíná i končí v daném bodě (tzv. smyčku). Dvojici $(1,3)$ znázorníme do grafu tak, že povedeme šipku od bodu 1 k bodu 3. Zbylé dvojice prvků, které jsou spolu v relaci, znázorníme pomocí stejného principu.



Obrázek 4.14: Uzlový graf relace ρ

Nyní se zaměříme na to, jaké vlastnosti má relace ρ. Relace ρ není reflexivní, protože smyčkou jsou opatřeny pouze dva body. Aby byla relace ρ reflexivní, musely by být v uzlovém grafu všechny body opatřené smyčkou, což nejsou. Symetrická relace se z uzlového grafu pozná tak, že mezi dvěma různými body jsou buď dvě šipky nebo žádná šipka. Z uzlového grafu vidíme, že relace ρ není ani symetrická, protože $(2,4) \in \rho$, ale $(4,2) \notin \rho$. Relace, která je antisymetrická, se pozná z uzlového grafu tak, že mezi dvěma různými body je buď jedna nebo žádná šipka, což relace ρ opět nesplňuje, protože např. $(1,3) \in \rho$ a zároveň $(3,1) \in \rho$. Pokud by relace ρ byla úplná, musel by být každý bod v uzlovém grafu opatřen smyčkou a každé dva různé body by byly spojeny alespoň jednou šipkou, což vidíme, že neplatí. Navíc víme, že každá relace, která je úplná, musí být také reflexivní a již jsme dokázali, že relace ρ není reflexivní, proto nemůže být ani úplná.

Příklad 4.8 Je dána množina $A = \{1,2,3,4,5\}$ a množina $B = \{a,b,c,d\}$. Určete, jak bude vypadat invezní relace ρ^{-1} mezi množinami A a B, pokud $\rho = \{(1,a),(2,a),(3,c),(4,b),(5,d)\}$.

Řešení: Inverzní relace mezi množinami A a B je definována vztahem $\rho^{-1} = \{(b,a) \in B \times A :$ $a\rho b$, což znamená, že pokud v původní relaci ρ byl prvek a v relaci s prvkem b (tzn. $a\rho b$), tak v inverzní relaci ρ^{-1} bude prvek b v relaci s prvkem a (tzn. $b\rho a$). Inverzní relace mezi množinami A a B je tvaru $\rho^{-1} = \{(a,1),(a,2),(c,3),(b,4),(d,5)\}$. Sami si rozmyslete, jak bude vypadat tabulka a uzlový graf inverzní relace ρ^{-1}.

4.1 Příklady k procvičení

Cvičení 4.1.1 Na množině $A = \{1,2,3,4\}$ je dána relace $\rho = \{(a,b) \in \rho \Leftrightarrow a \leq b\}$. Zapište tuto relaci:

a) výčtem prvků,

b) tabulkou,

c) uzlovým grafem,

a určete, jaké vlastnosti má relace ρ (reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní, úplná).

Cvičení 4.1.2 Je dána množina $A = \{m,n,o,p,q\}$ a relace $\rho = \{(m,n),(m,o),(n,p),(o,p),(o,q)\}$. Doplňte relaci ρ nejmenším možným způsobem tak, aby byla tranzitivní a antisymetrická. Nakreslete uzlový graf relace ρ.

Cvičení 4.1.3 Na množině $A = \{a,b,c,d\}$ je dána relace $\rho = \{(a,a),(b,b),(d,a)\}$. Doplňte relace ρ nejmenším možným způsobem tak, aby byla relaci ρ reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Cvičení 4.1.4 Na množině $A = \{k,l,m,n,o\}$ je dána relace $\rho = \{(k,k),(m,m),(n,n),(k,n),(l,k)\}$. Doplňte relaci ρ nejmenším možným způsobem tak, aby byla reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Znázorněte relaci ρ pomocí uzlového grafu.

Cvičení 4.1.5 Určete, jak bude vypadat inverzní relace ρ^{-1} k relacím z příkladů 4.1, 4.2, 4.4 a 4.7.

Kapitola 5

Zobrazení

V této kapitole si procvičíme učivo, které souvisí ze zobrazeními. Ukážeme si, jak poznat, jestli je daný předpis zobrazením, a jak rozeznat injektivní, surjektivní a bijektivní zobrazení. Pracovat budeme i s inverzními zobrazeními, a ukážeme si, jak skládat zobrazení, pokud to je možné.

Příklad 5.1 Je dána množina $A = \{a,b,c,d\}$ a množina $B = \{1,2,3,4,5\}$. Rozhodněte, zda předpis f, $f : A \to B$ určuje zobrazení, pokud:

a) $f : f(a) = 1, f(b) = 4, f(c) = 3, f(a) = 2, f(d) = 5,$

b) $f : f(b) = 2, f(c) = 3, f(d) = 5,$

c) $f : f(a) = 5, f(b) = 4, f(c) = 3, f(d) = 2,$

d) $f : f(a) = 0, f(b) = 1, f(c) = 2, f(d) = 3.$

Řešení:

a) Předpis f neurčuje zobrazení, protože prvek a má dva obrazy v množině B.

b) Předpis f neurčuje zobrazení, protože prvek a nemá žádný obraz v množině B.

c) Předpis f určuje zobrazení, protože každý prvek z množiny A má právě jeden obraz.

d) Předpis f neurčuje zobrazení, protože obraz prvku a není v množině B.

Příklad 5.2 Rozhodněte, zda zadaný předpis f určuje zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pokud předpis f určuje zobrazení, rozhodněte, o jaký typ zobrazení se jedná (injektivní, surjektivní, bijektivní).

a) $f(x) = 5x - 3$,

b) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{pro } x \text{ sudé,} \\ x+1 & \text{pro } x \text{ liché,} \end{cases}$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{3}$.

Řešení:

a) Předpis f určuje zobrazení, protože každé přirozené číslo se zobrazí pomocí tohoto předpisu na nějaké přirozené číslo. Když už víme, že se jedná o zobrazení, rozhodneme, o jaký typ zobrazení se jedná. Začneme tak, že budeme postupně dosazovat přirozená čísla do předpisu zobrazení f a zjistíme. na jaké číslo se zobrazí. Když chceme zjistit, na jaké číslo se zobrazí např. 1, spočítáme funkční hodnotu $f(1)$. Když dosadíme číslo 1 do předpisu zobrazení f, zjistíme, že funkční hodnota $f(1) = 2$, číslo 1 se proto zobrazí na číslo 2. Pokud aplikujeme stejný způsob i na další přiřozená čísla, dostaneme: $2 \to 7$, $3 \to 12$, $4 \to 17, \ldots$ Vidíme tedy, že různým vzorům odpovídají různé obrazy (žádné přirozené číslo není obrazem dvou různých přiřozených čísel), a proto je dané zobrazení f injektivní.

b) Předpis f určuje zobrazení, protože každé přirozené číslo z definičního oboru $\mathbb{N}$ má svůj obraz v $\mathbb{N}$. Nyní rozhodneme, o jaký typ zobrazení se jedná a postupovat budeme analogicky jako v a), tedy najdeme k přirozeným číslům jejich obrazy. Např. $1 \to 2$, $2 \to 1$, $3 \to 4$, $4 \to 3$, $5 \to 6, \ldots$ Můžeme si povšimnout, že každé přirozené číslo má právě jeden vzor v přirozených číslech. Dané zobrazení f je tedy bijektivní.

c) Zadaný předpis f neurčuje zobrazení, protože např. $1 \to \frac{2}{3}$ a $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$. Sami si rozmyslete, za jakých okolností by z daného předpisu bylo zobrazení.

Příklad 5.3 Rozhodněte, zda zadaný předpis f určuje zobrazení $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Pokud předpis f určuje zobrazení, rozhodněte, o jaký typ zobrazení se jedná (injektivní, surjektivní, bijektivní).

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$,

b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3}$,

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x \text{ liché,} \\ \frac{x}{3} & \text{pro } x \text{ sudé.} \end{cases}$

Řešení:

a) Předpis f neurčuje zobrazení, protože některé obrazy nepatří do množiny $\mathbb{Q}$. Např. $2 \to \sqrt{3}, \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

b) Předpis f určuje zobrazení, protože každé číslo ze $\mathbb{Z}$ má díky tomuto předpisu svůj obraz v $\mathbb{Q}$ (např. $0 \to \frac{1}{3}, -3 \to -\frac{5}{3}, 7 \to 5, \dots$). Můžeme tedy rozhodnout, o jaký typ zobrazení se jedná. Zobrazení f zřejmě neumožňuje, aby měl jeden obraz dva vzory, proto dané zobrazení nemůže být surjektivní. Můžeme si povšimnout, že různým vzorům odpovídají různé obrazy, a zobrazení f je proto injektivní.

c) Předpis f přiřazuje každému prvku ze $\mathbb{Z}$ nějaký prvek z $\mathbb{Q}$, jedná se tedy o zobrazení. Při zjišťovaní surjekce, resp. injekce, resp. bijekce budeme postupovat obdobně jako v možnosti b). Z předpisu je zřejmé, že žádné $x \in \mathbb{Q}$ nebude mít více jak jeden vzor. Pokud si vypíšeme několik vzorů a jejich obrazy, všimneme si, že různým vzorům odpovídají různé obrazy, a proto je zobrazení f injektivní.

Příklad 5.4 A je množina všech diváků v kině, B je množina všech vstupenek na daný film, C je množina všech sedadel v kině. Nechť g je zobrazení $g: A \to B$, které přiřazuje každému divákovi jeho vstupenku, a f je zobrazení $f: B \to C$, které přiřazuje každé vstupence právě jedno sedadlo. Rozhodněte, jak bude vypadat složené zobrazení:

a) $f \circ g$, b) $g^{-1} \circ f^{-1}$.

Řešení:

a) Zobrazení g přiřazuje každému divákovi z množiny A jeho vstupenku z množiny B. Zobrazení f přiřazuje každé vstupence z množiny B sedadlo z množiny C. Složené zobrazení $f \circ g$: $A \to C$ přiřazuje každému divákovi jeho sedadlo.

b) Zobrazení $g^{-1}: B \to A$ přiřazuje každé vstupence z množiny B jejího majitele (diváka) z množiny A. Zobrazení $f^{-1}: C \to B$ přiřazuje každému sedadlu z množiny C místenku (vstupenku) z množiny B. Složené zobrazení $g^{-1} \circ f^{-1}: C \to A$ přiřazuje každému sedadlu z množiny C diváka z množiny A, který na něm bude sedět.

Sami si rozmyslete, proč nemůžeme vytvořit složené zobrazení $g \circ f$ a $f^{-1} \circ g^{-1}$

Příklad 5.5 Je dáno zobrazení $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 4x - 3$ a zobrazení $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = x + 2$. Určete, jak bude vypadat složené zobrazení:

a) $g \circ f$,   b) $f \circ g$.

Řešení:

a) Při hledání složeného zobrazení $g \circ f$ musíme nejdříve ověřit, jestli vůbec můžeme zobrazení f a g skládat. V tomto případě jsou f a g zobrazení množiny $\mathbb{Z}$ do množiny $\mathbb{Z}$, a proto složené zobrazení $g \circ f$ bude také zobrazovat celá čísla na celá čísla. Nyní můžeme začít zjišťovat, jak bude složené zobrazení $g \circ f$ vypadat. Budeme vycházet z následujícího vztahu $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Tento vztah nám říká, že složené zobrazení $g \circ f$ najdeme tak, že zobrazení f dosadíme do zobrazení g.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (4x - 3) + 2 = 4x - 1$$

b) Nejdříve musíme ověřit, jestli můžeme zobrazení v tomto pořadí skládat. Již víme, že existuje složené zobrazení $g \circ f$, ale to nám ještě nezaručuje existenci složeného zobrazení $f \circ g$. Předpisy g a f zobrazují celá čísla na celá čísla, proto i složené zobrazení bude zobrazovat celá čísla na celá čísla. Nyní můžeme určit složené zobrazení $f \circ g$, které najdeme pomocí vztahu $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Z daného vztahu vidíme, že složené zobrazení $f \circ g$ určíme tak, že zobrazení g dosadíme do zobrazení f.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4(x + 2) - 3 = 4x + 8 - 3 = 4x + 5$$

Příklad 5.6 Je dáno zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 5x$ a zobrazení $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = 2x + 1$.

a) Rozhodněte, zda zobrazení f je injektivní, resp. surjektivní, resp. bijektivní.

b) Rozhodněte, zda zobrazení g je injektivní, resp. surjektivní, resp. bijektivní.

c) Určete, jak vypadá složené zobrazení $g \circ f$.

d) Rozhodněte, jestli je složené zobrazení $g \circ f$ injektivní, resp. surjektivní, resp. bijektivní.

Řešení:

a) Zobrazení f je zřejmě injektivní, protože všechna přirozená čísla se zobrazí pouze na násobky čísla 5. Čísla, která nejsou dělitalná 5, nebudou mít žádný vzor.

b) Zobrazení g zobrazuje přirozená čísla na lichá čísla. Sudá čísla nemají žádný vzor, proto můžeme říct, že zobrazení g je injektivní.

c) Předpisy g a f zobrazují přirozená čísla na přirozená čísla, proto i složené zobrazení $g \circ f$ bude zobrazovat přirozená čísla na přirozená čísla. Složené zobrazení $g \circ f$ najdeme pomocí vztahu $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, který nám říká, že budeme dosazovat zobrazení f do zobrazení g.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(5x) + 1 = 10x + 1$$

d) Složené zobrazení $g \circ f$ zobrazuje $1 \to 11, 2 \to 21, 3 \to 31, \ldots$ Je tedy zřejmé, že např. čísla $1, 2, 3, 4, \ldots$ nemají žádný vzor. Složené zobrazení $g \circ f$ je injektivní.

Příklad 5.7 Rozhodněte, zda je možné vytvořit složená zobrazení $f \circ g$ a $g \circ f$, pokud:

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$,

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

c) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.

Řešení:

a) Složené zobrazení $f \circ g$ nelze vytvořit. Nejdříve bychom zobrazili přirozená čísla na racionální čísla podle zobrazení g, a protože $\mathbb{Q} \nsubseteq \mathbb{Z}$ nemůžeme pokračovat ve skládání zobrazení.

   Složené zobrazení $g \circ f$ lze vytvořit, protože zobrazení f přiřadí každému celému číslo nějaké přirozené číslo, a toto přirozené číslo mužeme díky předpisu g zobrazit na racionální číslo.

$$g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$$

b) Složené zobrazení $f \circ g$ lze vytvořit. Předpis g zobrazí každé přirozené číslo na nějaké celé číslo a předpis f toto celé číslo zobrazní na nějaké racionální číslo.

$$f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$$

   Složené zobrazení $g \circ f$ nelze vytvořit. Předpis $f(x)$ přiřadí každému celému číslu nějaké racionální číslo, a protože $\mathbb{Q} \nsubseteq \mathbb{N}$, nemůžeme pokračovat ve skládání zobrazení.

c) Složené zobrazení $f \circ g$ lze vytvořit. Zobrazení $g(x)$ můžeme propojit se zobrazením $f(x)$, protože $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.

$$f \circ g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$$

   Složené zobrazení $g \circ f$ nelze vytvořit. Zobrazení f není možné propojit se zobrazením g, protože $\mathbb{R}^+ \nsubseteq \mathbb{Q}$.

Příklad 5.8 Určete, jak bude vypadat inverzní zobrazení f^{-1}, pokud:

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = (x-3)^2$,

b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{2x+1}{3}$.

Řešení:

a) Pokud hledáme inverzní zobrazení f^{-1} funkce s předpisem $y = (x-3)^2$, budeme postupovat tak, že v předpisu zobrazení zaměníme proměnnou x a proměnnou y a vyjádříme proměnnou y.

$$\begin{aligned} x &= (y-3)^2 \\ \sqrt{x} &= y-3 \\ y &= \sqrt{x}+3 \end{aligned}$$

Inverzní zobrazení f^{-1} je tvaru $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f^{-1} = \sqrt{x}+3$.

b) Inverzní zobrazení f^{-1} najdeme tak, že v předpisu zobrazení $y = \frac{2x+1}{3}$ zaměníme proměnnou x a proměnnou y. Následně se pokusíme vyjádřit proměnnou y.

$$\begin{aligned} x &= \frac{2y+1}{3} \\ 3x &= 2y+1 \\ 2y &= 3x-1 \\ y &= \frac{3x-1}{2} \end{aligned}$$

Inverzní zobrazení f^{-1} je tvaru $f^{-1} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f^{-1} = \frac{3x-1}{2}$.

5.1 Příklady k procvičení

Cvičení 5.1.1 Rozhodněte, zda předpis f určuje zobrazení $f : A \to B$.

a) $A = \mathbb{Z},\ B = \mathbb{N}, f(x) = |x|$,

b) $A = \mathbb{Z},\ B = \mathbb{Q}, f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{3x^2 - 2}$.

Cvičení 5.1.2 Rozhodněte, zda zobrazení $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ je injektivní, resp. surjektivní, resp. bijektivní, jestliže:

a) $f(x) = |x^3 - 1|$,

b) $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & x \leq 0, \\ 2x & x > 0, \end{cases}$

c) $f(x) = |x+2|$.

Cvičení 5.1.3 Je dáno zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 + 1$ a zobrazení $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = x+5$. Určete, jak bude vypadat zobrazení:

a) $g \circ f$,

b) $f \circ g$,

c) g^{-1},

d) f^{-1},

e) $g^{-1} \circ f^{-1}$,

f) $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Cvičení 5.1.4 Najděte příklad zobrazení $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, které:

a) je injektivní, ale není surjektivní,

b) je surjektivní, ale není injektivní.

Cvičení 5.1.5 Najděte příklad bijektivního zobrazení:

a) sudých celých čísel na $\mathbb{Z}$,

b) $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{N}$.

Kapitola 6

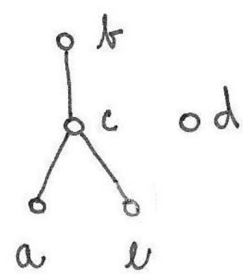
Uspořádání

Ústředním pojmem této kapitoly je uspořádání, popř. uspořádaná množina. Abychom mohli správně zavést pojem uspořádání, je důležité rozumět pojmu relace na množině a také znát vlastnosti relace na množině, protože uspořádání je definováno jako relace ρ na množině A, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Uspořádaná množina je pak množina s relací a značíme ji $(A, \leq)$.

Příklad 6.1 Je dána množina $A = \{a,b,c,d,e\}$ a relace $\rho = \{(b,b),(d,d),(a,c),(c,b),(e,c)\}$. Doplňte množinový zápis relace ρ nejmenším možným způsobem tak, aby vzniklo uspořádání. Nakreslete hasseovský diagram této uspořádané množiny.

Řešení: Aby byla relace ρ uspořádáním, je třeba ji doplnit tak, aby byla reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Reflexivitu relace ρ zajistíme tak, že do předpisu relace ρ doplníme uspořádané dvojice: $(a,a),(c,c),(e,e)$. Jako další vlastnost je nejvýhodnější vyřešit tranzitivitu relace ρ. Vidíme, že $a\rho c \wedge c\rho b$, musíme proto doplnit uspořádanou dvojici (a,b). Dále v předpisu relace vidíme, že $e\rho c \wedge c\rho b$, doplníme proto uspořádanou dvojici (e,b). Zatím jsme získali relaci $\rho = \{(b,b),(d,d),(a,c),(c,b),(e,c),(a,a),(c,c),(e,e),(a,b),(e,b)\}$. Ze zápisu je zřejmé, že je tato relace také antisymetrická, proto je tato relace uspořádáním.

Pokud chceme nakreslit hasseovský diagram uspořádané množiny, postupujeme obdobně, jako když jsme u relací kreslili uzlový graf. Jediný rozdíl je v tom, že v hasseovském diagramu nekreslíme smyčky kolem každého prvku a neuvažujeme orientaci šipek. Uspořádanou množinu často značíme jako $(A, \leq)$, což nám také pomůže při kreslení hasseovského diagramu, protože pokud je $(a,b) \in \rho$, pak je $a < b$ a v hasseovském diagramu nakreslíme prvek a níž než prvek b. Uspořádaná dvojice (c,b) nám určuje, že prvek c bude níž než prvek b. Uspořádanou dvojici (a,c) zaznačíme do hasseovského diagramu tak, že nakreslíme prvek a níž než prvek c. Prvek c má být výš než prvek a a zároveň níž než prvek b, nakreslíme ho proto mezi prvek a a prvek b. Prvek e nakreslíme níž než prvek c, protože $(e,c) \in \rho$, a zároveň níž než prvek b, protože $(e,b) \in \rho$. Prvek e bude na stejné úrovni jako prvek a, ale nemůžeme je spolu propojit, protože je neumíme mezi sebou porovnat. Prvek d nakreslíme volně a nespojíme ho s žádným prvkem, protože prvek d neumíme s žadným dalším prvkem porovnat.

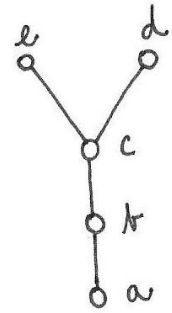


Obrázek 6.1: Hasseovský diagram uspořádané množiny

Sami si zkuste rozmyslet, zda má hasseovský diagram nejmenší, popř. největší, nebo minimální, popř. maximální prvek.

Příklad 6.2 Nakreslete hasseovský diagram pětiprvkové uspořádané množiny, která má jeden nejmenší prvek a dva maximální prvky.

Řešení: Nejmenší prvek v hasseovském diagramu je takový prvek, který umíme porovnat se všemi ostatními prvky (tzn. je propojen s každým prvkem), a žádný jiný prvek není níž než tento prvek. O maximálním prvku v hasseovském diagramu mluvíme tehdy, pokud neexistuje takový prvek, který by byl výš než maximální prvek (tzn. maximální prvek nad sebou už nemá žádný jiný prvek). Na obrázku 6.2 je znázorněn příklad hasseovského diagramu, ve kterém je a nejmenším prvek, a prvky e a d jsou maximální.



Obrázek 6.2: Hasseovský diagram uspořádané množiny

Příklad 6.3 Vymyslete příklad konečné uspořádané množiny, která má jeden největší prvek a dva maximální prvky.

Řešení: Příklad nemá řešení, protože pokud je v uspořádané množině největší prvek, pak je tento prvek také prvkem maximálním a žádné další maximální prvky v uspořádané množině neexistují.

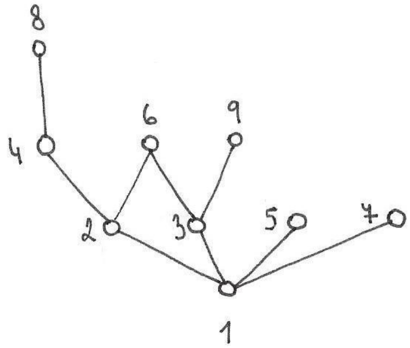
Příklad 6.4 Nakreslete hasseovský diagram konečné uspořádané množiny, která má jeden nejmenší prvek a nemá minimální prvek.

Řešení: Příklad nemá řešení, protože pokud je v uspořádané množině nejmenší prvek, pak je tento prvek také minimální.

Příklad 6.5 Na množině $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ je dána relace $\rho = \{(a,b) \in \rho \Leftrightarrow a|b\}$. Nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $(A,\leq)$ a určete minimální, maximální, nejmenší a největší prvek uspořádané množiny.

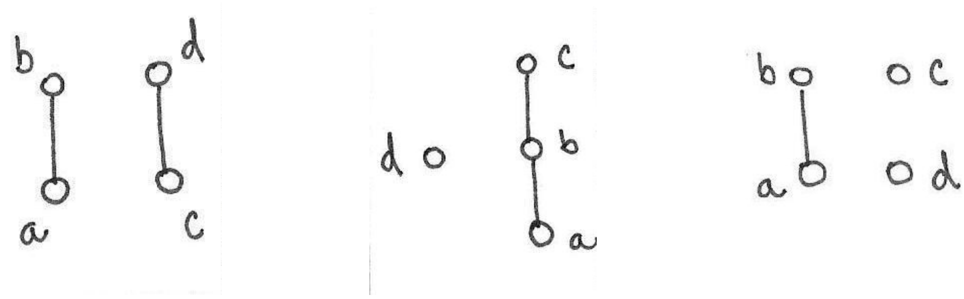
Řešení: U tohoto příkladu se nabízí několik variant řešení, ovšem vždy se stejným výsledkem. Můžeme si např. nakreslit tabulku relace ρ a v ní ověřit u všech uspořádaných dvojic, zda patří do relace ρ či nikoli, a podle této tabulky pak nakreslit hasseovský diagram. Tato metoda by byla ovšem velmi zdlouhavá, protože tabulka je poměrně velká a ověřování všech dvojic by bylo zdlouhavé. Zkusíme se proto zamyslet nad rychlejším a jednodušším postupem. Nejdříve bychom si měli uvědomit, že se jedná o relaci dělitelnosti a že dva prvky jsou spolu v relaci, pokud platí $a|b$, tzn. $b = k \cdot a$. Z tohoto vztahu si můžeme poměrně snadno odvodit, který prvek musí být v hasseovském diagramu umístěn nejníž. Tímto prvkem je prvek 1, protože 1 dělí každé číslo, ale 1 je dělitelná pouze sama sebou. O řádek výš budou všechna prvočísla z množiny A (tzn. 2, 3, 5, 7), protože ta jsou dělitelná pouze sama sebou a 1. Do hasseovského diagramu zbývá ještě umístit čísla 4, 6, 8 a 9. Číslo 4 nakreslíme v diagramu nad číslo 2, protože 4 je dělitelná 4, 2 a 1. Číslo 6 musí být spojené s čísly 2 a 3, protože číslo 6 je dělitelné 6, 2, 3 a 1. Číslo 8 nakreslíme nad číslo 4, protože číslo 8 je dělitelné 8, 4, 2, a 1. Poslední číslo 9 nakreslíme nad 3, protože číslo 9 je dělitelné 9 a 3.

Když máme nakreslený hasseovský diagram můžeme začít s určováním minimálního, maximálního, nejmenšího a největšího prvku. Z diagramu je zřejmé, že nejmenším a zároveň i minimálním prvkem je 1, protože číslo 1 umíme porovnat se všemi ostatními prvky v uspořádané množině a neexistuje žádný menší prvek. Čísla 8, 6, 9, 5 a 7 jsou maximální prvky, protože nad nimi není již žádný další prvek. Největší prvek uspořádaná množina nemá.



Obrázek 6.3: Hasseovský diagram uspořádané množiny

Příklad 6.6 Je dána množina $A = \{a, b, c, d\}$ a uspořádaná množina $(A, \leq)$, která je zadána hasseovským diagramem. Zapište relaci uspořádání výčtem prvků.



(a) relace uspořádání ρ_1 (b) relace uspořádání ρ_2 (c) relace uspořádání ρ_3

Řešení:

a) Relace uspořádání je vždy reflexivní, proto můžeme rovnou do zápisu relace ρ_1 napsat uspořádané dvojice $(a,a),(b,b),(c,c)$ a (d,d). Dále také víme, co platí pro prvky v hasseovském diagramu (viz. příklad 6.1). Pokud je prvek a spojen úsečkou s prvkem b a zároveň je prvek a níž než prvek b, potom platí $a \leq b$, tedy $(a,b) \in \rho_1$. Prvky c a d jsou v hasseovském diagramu znázorněny analogicky jako prvky a a b, proto $(c,d) \in \rho_1$. Relace uspořádání $\rho_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(c,d)\}$.

b) Každá relace uspořádání musí být reflexivní, proto víme, že ve výčtu prvků budou uspořádané dvojice $(a,a),(b,b),(c,c)$ a (d,d). Prvek d není spojen úsečkou s žádným dalším prvkem, neumíme ho proto s žádným prvkem porovnat, a nebude proto s žádným jiným prvkem v relaci (v relaci bude pouze sám se sebou). V hasseovském diagramu je prvek a spojen úsečkou s prvkem b a prvek b je spojem úsečkou s prvkem c. Prvek a je níž než prvek b, proto $(a,b) \in \rho_2$. Prvek b je níž než prvek c, proto $(b,c) \in \rho_2$. Nesmíme zapomenout na to, že prvek a je níž než prvek c, proto $(a,c) \in \rho_2$. Pokud bychom vynechali tuto uspořádanou dvojici, porušili bychom tranzitivitu relace, a nejednalo by se o uspořádání. Relaci uspořádání ρ_2 zapíšeme výčtem prvků jako $\rho_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,c),(a,c)\}$.

c) Jako v předchozích možnostech začneme tím, že každý prvek musí být v relaci sám se sebou, a proto ve výčtu prvků budou uspořádané dvojice $(a,a),(b,b),(c,c)$ a (d,d). V hasseovském diagramu je úsečkou spojen pouze prvek a s prvkem b, navíc je prvek a níž než prvek b, proto $(a,b) \in \rho_3$. Prvky c a d jsou v relaci pouze samy se sebou, protože nejsou propojeny úsečkou s žádným dalším prvkem. Dostáváme relaci uspořádání $\rho_3 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b)\}$.

6.1 Příklady k procvičení

Cvičení 6.1.1 Na množině $A = \{a,b,c,d,e\}$ je dána relace $\rho = \{(a,a),(d,d),(a,d),(d,b),(e,c)\}$. Doplňte relaci ρ nejmenším možným způsobem tak, aby vzniklo uspořádání.

Cvičení 6.1.2 Na množině $A = \{a,b,c,d\}$ je dána relace $\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,d),(b,d)\}$. Dokažte, že relace ρ je relací uspořádání, a nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $(A,\leq)$.

Cvičení 6.1.3 Nakreslete hasseovský diagram pětiprvkové uspořádané množiny, která má jeden nejmenší prvek a dva prvky maximální.

Cvičení 6.1.4 Nakreslete hasseovský diagram konečné uspořádané množiny, která nemá žádný minimální prvek a tři prvky maximální.

Cvičení 6.1.5 V hasseovských diagramech z příkladu 6.6 určete, které prvky jsou minimální, resp. maximální, resp. nejmenší, resp. největší.

Kapitola 7

Relace ekvivalence a rozklady

V této kapitole se budeme zabývat relací ekvivalence, což je relace, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Dále si také ukážeme, jak sestrojit rozklad na dané množině a rozklad příslušný ekvivalenci $\sim$. Pracovat budeme také s jednotlivými třídami rozkladu.

Příklad 7.1 Na množině $A = \{a,b,c,d\}$ je dána relace $\rho = \{(b,b),(c,c),(b,c),(d,b)\}$. Doplňte do výčtu prvků relace ρ uspořádané dvojice nejmenším možným způsobem tak, aby vznikla relace ekvivalence $\sim$. Nakreslete tabulku relace ekvivalence $\sim$.

Řešení: Ekvivalence je taková relace, která ja reflexivní, symetrická a tranzitivní. Relaci ρ proto musíme doplnit takovým způsobem, aby měla požadované vlastnosti. Nejdříve ošetříme reflexivitu relace ρ, protože k tomu aby byla relace reflexivní, stačí pouze doplnit uspořádané dvojce (a,a) a (d,d). Jako další vyřešíme tranzitivitu relace ρ. Z množinového zápisu je zřejmé, že $d\rho b \wedge b\rho c$, musíme proto doplnit uspořádanou dvojici (d,c), aby byla relace ρ tranzitivní. Poslední vlastnost, kterou zbývá ošetřit, je symetrie. Aby byla relace ρ symetrická, stačí doplnit uspořádané dvojice (b,d), (c,b), a (c,d). Relace ekvivalence je tvaru $\sim = \{(b,b),(c,c),(b,c),(d,b),(a,a),(d,d),(d,c),(b,d),(c,b),(c,d)\}$. Nyní můžeme nakreslit tabulku ekvivalence $\sim$.

$\sim$	**a**	**b**	**c**	**d**
a	1	0	0	0
b	0	1	1	1
c	0	1	1	1
d	0	1	1	1

Příklad 7.2 Na množině $A = \{a,b,c,d,e\}$ je dána relace $\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,d)\}$. Doplňte do výčtu prvků relace ρ uspořádané dvojice nejmenším možným způsobem tak, aby vznikla relace ekvivalence $\sim$ a sestrojte rozklad $A/\sim$.

Řešení: Nejdříve doplníme relaci ρ tak, aby vznikla ekvivalence $\sim$, tzn. relace $\sim$ musí být reflexivní, symetrická a tranzitivní. Aby byla relace ρ reflexivní, doplníme uspořádané dvojice (d,d) a (e,e). Aby byla relace ρ symetrická, musíme doplnit uspořádanou dvojici (d,a). Relace ρ již dále doplňovat nemusíme, protože relace ρ je již tranzitivní. Dostáváme tedy relaci $\sim = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,d),(d,d),(e,e),(d,a)\}$.

Rozklad $A/\sim$ sestrojíme tak, že prvky, které jsou mezi sebou v relaci, budou v jedné třídě rozkladu. Platí $a \sim d \wedge d \sim a$, proto prvky a a d budou v jedné třídě rozkladu a žádné další prvky v této třídě již nebudou. Prvky b, c a e jsou v relaci pouze samy se sebou a s žádným dalším prvkem v relaci nejsou, proto bude mít každý z těchto prvků vlastní třídu rozkladu. Rozklad $A/\sim = \{\{a,d\},\{b\},\{c\},\{e\}\}$.

Příklad 7.3 Na množině $A = \{m,n,o,p,q\}$ je dán rozklad M. Určete relaci $\sim_M$ pomocí výčtu prvků, pokud:

a) $M = \{\{o\},\{m,n\},\{p,q\}\}$,

b) $M = \{\{m,o\},\{n\},\{p\},\{q\}\}$,

c) $M = \{\{m\},\{n\},\{o,p,q\}\}$.

Řešení:

a) Nejdříve musíme určit, které prvky jsou spolu v relaci. Prvek o tvoří vlastní třídu rozkladu M, bude proto v relaci pouze sám se sebou a do tabulky doplníme $(o,o) \in \sim_M$. Druhou třídu rozkladu M tvoří prvky m a n, musí být tedy platit $(m,m) \in \sim_M$, $(n,n) \in \sim_M$, $(m,n) \in \sim_M$ a $(n,m) \in \sim_M$. Poslední třídu rozkladu M tvoří prvky p a q. Protože prvky jsou dva, budeme postupovat obdobně jako u druhé třídy rozkladu M. Prvky p a q musí být spolu v relaci a navíc musí být v relaci každý sám se sebou. Bude tedy platit $(p,p) \in \sim_M$, $(q,q) \in \sim_M$, $(p,q) \in \sim_M$ a $(q,p) \in \sim_M$. Dostáváme tedy relaci $\sim_M = \{(o,o),(m,m),(n,n),(m,n),(n,m),(p,p),(q,q),(p,q),(q,p)\}$.

b) První třídou rozkladu M je množina $\{m,o\}$, proto prvky m a p spolu musí být v relaci, tzn. $(m,o) \in \sim_M$, $(o,m) \in \sim_M$. Prvky také musí být v relaci každý sám se sebou, tzn. $(m,m) \in \sim_M$, $(o,o) \in \sim_M$. Dalšími třídami rozkladu M jsou jednoprvkové množiny, proto bude každý z prvků n, p a q v relaci pouze sám se sebou, tzn. $(n,n) \in \sim_M$, $(p,p) \in \sim_M$, $(q,q) \in \sim_M$. Relace $\sim_M$ zapíšeme pomocí výčtu prvků jako $\sim_M = \{(m,o),(o,m),(m,m),(o,o),(n,n),(p,p),(q,q)\}$.

c) První dvě třídy rozkladu M jsou jednoprvkové množiny, proto prvky m a n budou v relaci pouze samy se sebou, tzn. $(m,m) \in \sim_M$, $(n,n) \in \sim_M$. Další třídou rozkladu M je množina $\{o,p,q\}$, a musíme je dát do relace tak, aby byl každý prvek v relaci s každým prvkem, tzn. $(o,p) \in \sim_M$, $(o,q) \in \sim_M$, $(p,o) \in \sim_M$, $(p,q) \in \sim_M$, $(q,o) \in \sim_M$, $(q,p) \in \sim_M$. Navíc musí být každý prvek v relaci sám se sebou, tzn. $(o,o) \in \sim_M$, $(p,p) \in \sim_M$, $(q,q) \in \sim_M$. Dostáváme relaci $\sim_M = \{(m,m),(n,n),(o,p),(o,q),(p,o),(p,q),(q,o),(q,p),(o,o),(p,p),$ $(q,q)\}$.

Příklad 7.4 Je dána množina $A = \{a,b,c,d,e\}$. Rozhodněte, zda je M rozklad na množině A.

a) $M = \{\{a\},\{b,c,d\},\{e\}\}$,

b) $M = \{\emptyset,\{a,b,c\},\{d,e\}\}$,

c) $M = \{\{a,b\},\{b\},\{c,d\},\{e\}\}$,

d) $M = \{\{a,b,c\},\{d\},\{e\}\}$,

e) $M = \{\{a,b\},\{d,e\}\}$.

Řešení:

a) Třídy rozkladu $\{a\},\{b,c,d\}$ a $\{e\}$ jsou navzájem disjunktní množiny (tzn. mají prázdný průnik), které jsou neprázdnými podmnožinami množiny A. Pokud bychom sjednotili všechny třídy rozkladu systému M, získáme množinu A. Množina M je proto rozkladem na množině A.

b) Množina M nemůže být rozkladem na množině A, protože není splněna podmínka, že M je systém neprázdných podmnožin množiny A.

c) Třídy rozkladu $\{a,b\},\{b\},\{c,d\}$ a $\{e\}$ jsou neprázdné podmnožiny množiny A, ale nejsou navzájem disjunktní, protože $\{a,b\} \cap \{b\} = \{b\}$. Množina M proto není rozkladem na množině A.

d) Třídy rozkladu $\{a,b,c\},\{d\}$ a $\{e\}$ jsou navzájem disjunktní množiny, které jsou neprázdnými podmnožinami množiny A. Pokud všechny třídy rozkladu M sjednotíme, získáme systém množinu A, proto je množina M rozkladem na množině A.

e) Množina M nemůže být rozkladem na množině A, protože pokud sjednotíme všechny třídy rozkladu M, nedostaneme množinu A (v třídách rozkladu chybí prvek c).

7.1 Příklady k procvičení

Cvičení 7.1.1 Na množině $A = \{a,b,c,d\}$ je dána relace $\rho = \{(a,a),(d,d),(a,d),(d,b),(e,c)\}$. Doplňte do výčtu prvků relace ρ uspořádané dvojice nejmenším možným způsobem tak, aby vznikla relace ekvivalence $\sim_M$.

Cvičení 7.1.2 Na množině $A = \{a,b,c,d\}$ je dána relace $\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),$ $(b,a),(a,d),(d,a),(b,d),(d,b)\}$. Rozhodněte, zda ρ je relací ekvivalence na množině A, a pokud ano, sestrojte rozklad A/ρ.

Cvičení 7.1.3 Na množině $A = \{m,n,o,p,q,r\}$ je dán rozklad M. Určete relaci $\sim_M$ pomocí výčtu prvků, pokud:

a) $M = \{\{m\},\{n,o\},\{p,q,r\}\}$,

b) $M = \{\{m,n,o\},\{p,q,r\}\}$,

c) $M = \{\{m,n\},\{o,p\},\{q,r\}\}$.

Cvičení 7.1.4 Je dána množina $A = \{m,n,o,p,q,r\}$. Rozhodněte, zda je M rozklad na množině A.

a) $M = \{\{m,n,o\},\emptyset,\{p,q\},\{r\}\}$,

b) $M = \{\{m,n\},\{o\},\{p,r\},\{q\}\}$,

c) $M = \{\{m,q,r\},\{p,o\},\{n\}\}$,

d) $M = \{\{r,q\},\{n,o\},\{m\}\}$,

e) $M = \{\{m\},\{n,o\},\{r,q\},\{p,m\}\}$.

Kapitola 8

Reálné funkce reálné proměnné

V kapitole se seznámíme se základními pojmy, které se týkají funkcí. Budeme určovat definiční obor a obor hodnot funkce v oboru $\mathbb{R}$. Ukážeme si, jak určit, zda je funkce ohraničená (resp. shora ohraničená, resp. zdola ohraničená), rostoucí (resp. klesající) či neklesající (resp. nerostoucí). Dále také budeme rozhodovat, zda je funkce sudá (resp. lichá).

Příklad 8.1 Určete definiční obor funkce $f(x)$.

a) $f(x) = \log \dfrac{x+1}{6-x}$,

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{5-x}{x+3}}$,

c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{4x-3}}$,

d) $f(x) = \sqrt{\log(2x-1)}$.

Řešení:

a) Z definice (i z grafu) logaritmu je zřejmé, že argument logaritmu musí být větší než 0. Získáváme tak nerovnici, jejímž vyřešením určíme definiční obor.

$$\frac{x+1}{6-x} > 0$$

Vidíme, že v nerovnici je zlomek, musíme proto nejdříve určit, za jakých podmínek má smysl nerovnici řešit, tedy:

$$\begin{aligned} x+6 &\neq 0 \\ x &\neq -6 \end{aligned}$$

Nyní můžeme začít řešit nerovnici. Zlomek je větší než 0, pokud je čitatel a zároveň i jmenovatel kladný, nebo záporný. Nerovnici proto budeme řešit ve dvou krocích.

1) čitatel je kladný a jmenovatel je kladný

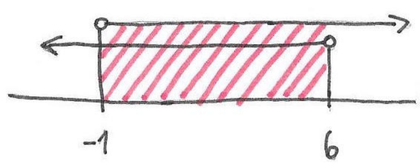
$$\begin{aligned} x+1 &> 0 \qquad \wedge \qquad & 6-x &> 0 \\ x &> -1 & 6 &> x \end{aligned}$$

Oba intervaly, které jsme získali vyřešením nerovnic, zaznačíme na číselnou osu a řešením bude průnik těchto intervalů. Z obrázku 8.1 je zřejmé, že $x \in (-1,6)$

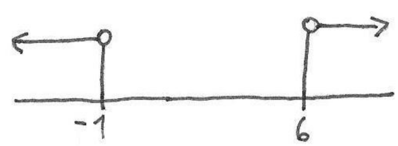
2) čitatel je záporný a jmenovatel je záporný

$$\begin{aligned} x+1 &< 0 \qquad \wedge \qquad & 6-x &< 0 \\ x &< -1 & 6 &< x \end{aligned}$$

Intervaly znázorníme na číselnou osu a řešením bude průnik obou intervalů. Z obrázku 8.2 je zřejmé, že průnik těchto intervalů je prázdný, proto $x \in \emptyset$.



Obrázek 8.1: Průnik intervalů z 1)



Obrázek 8.2: Průnik intervalů z 2)

Definičním oborem funkce je sjednocení intervalů z 1) a 2), tedy $D(f) = (-1,6)$.

b) V předpisu funkce vystupuje druhá odmocnina z nějakého čísla. Stačí si tedy uvědomit, že druhá odmocnina je v oboru $\mathbb{R}$ definována pouze pro nezáporná čísla, tedy:

$$\frac{5-x}{x+3} \geq 0$$

V nerovnici je zlomek, a proto musíme nejdříve určit, za jakých podmínek má smysl nerovnici řešit:

$$\begin{aligned} x+3 &\neq 0 \\ x &\neq -3 \end{aligned}$$

Nerovnici budeme opět řešit ve dvou krocích, obdobně jako v a).

1) čitatel je nezáporný a jmenovatel kladný

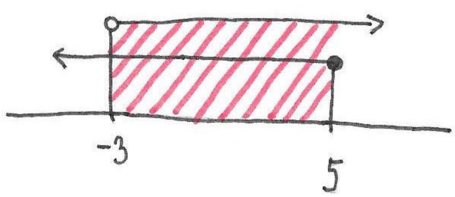
$$\begin{aligned} 5 - x &\geq 0 & \quad \wedge \quad && x + 3 &> 0 \\ 5 &\geq x & && x &> -3 \end{aligned}$$

Intervaly znázorníme na osu a řešením bude průnik těchto dvou intervalů. Z obrázku 8.3 je vidět, že $x \in (-3, 5\rangle$

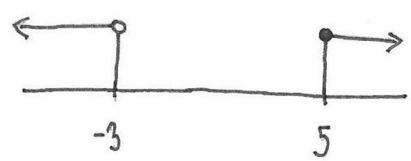
2) čitatel je nekladný a jmenovatel záporný

$$\begin{aligned} 5 - x &\leq 0 & \quad \wedge \quad && x + 3 &< 0 \\ 5 &\leq x & && x &< -3 \end{aligned}$$

Výsledné intervaly znázorníme na osu a řešením bude průnik těchto intervalů. Z obrázku 8.4 je zřejmé, že průnikem intervalů je prázdná množina, tedy $x \in \emptyset$.



Obrázek 8.3: Průnik intervalů z 1)



Obrázek 8.4: Průnik intervalů z 2)

Definičním oborem funkce je sjednocení intervalů z 1) a 2), tedy $D(f) = (-3, 5\rangle$

c) Při hledání definičního oboru funkce y musíme dát pozor na to, že ve jmenovateli je proměnná x a navíc druhá odmocnina. Pokud je ve jmenovateli proměnná, nesmí být jmenovatel roven 0. Dostáváme tedy:

$$\begin{aligned} 4x - 3 &\neq 0 \\ 4x &\neq 3 \\ x &\neq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Druhá odmocnina je definovaná pouze pro nezáporná čísla, proto definiční obor hledáme pomocí nerovnice:

$$\begin{aligned} 4x - 3 &\geq 0 \\ 4x &\geq 3 \\ x &\geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Pokud bychom se zamysleli nad tím, že odmocnina je ve jmenovateli zlomku, došli bychom k závěru, že druhá odmocnina nesmí být rovna 0, postačilo by tedy vyřešit pouze nerovnici:

$$4x - 3 > 0$$

Závěr je ale v obou případech stejný, a to ten, že $D(f) = (\frac{3}{4}, \infty)$.

d) V předpisu této funkce vystupuje logaritmus a druhá odmocnina. Logaritmus je definován pro $x \in (0, \infty)$. Pokud si načrtneme graf funkce $\log x$, zjistíme že pro $\forall x \in (0, 1)$ je hodnota logaritmu záporná a pro $\forall x \in \langle 1, \infty)$ je hodnota logaritmu nezáporná. Z předchozích příkladů již víme, že druhá odmocnina je definována pro nezáporná čísla. Díky těmto úvahám jsme se dostali k závěru, že pokud bude argument logaritmu větší nebo roven 1, budou pod odmocninou pouze nezáporná čísla. Stačí tedy vyřešit nerovnici:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &\geq 1 \\ 2x &\geq 2 \\ x &\geq 1 \end{aligned}$$

Definičním oborem funkce je právě tento interval, tedy $D(f) = \langle 1, \infty)$.

Příklad 8.2 Rozhodněte, zda je funkce sudá, resp. lichá.

a) $f(x) = \dfrac{3}{x}$,

b) $f(x) = x^3 - x$,

c) $f(x) = x^2 - 3$,

d) $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x-5}$.

Řešení: O sudosti, resp. lichosti funkce můžeme rozhodnout pomocí grafu, protože graf sudé funkce je osově souměrný podly osy y a graf liché funkce je středově souměrný podle počátku osy souřadnic. V tomto příkladu si ale ukážeme, jak rozhodnout o sudosti, resp. lichosti funkce na základě toho, že pro sudou funkci platí rovnost (8.1) a pro lichou funkci platí rovnost (8.2).

$$f(-x) = f(x) \tag{8.1}$$

$$f(-x) = -f(x) \tag{8.2}$$

a) Nejdříve zjistíme, jaký tvar má $f(-x)$, a na základě toho rozhodneme, zda je daná funkce sudá, resp. lichá. Funkci $f(-x)$ získáme tak, že v předpisu funkce $f(x)$ nahradíme proměnnou x proměnnou $-x$.

$$f(-x) = \frac{3}{-x} = -\frac{3}{x} = -f(x)$$

Z rovnosti (8.2) je zřejmé, že funkce $f(x) = \frac{3}{x}$ je lichá.

b) Abychom mohli rozhodnout, zda je daná funkce sudá, resp. lichá, opět zjistíme, jaký tvar má $f(-x)$ a to tak, že do předpisu funkce $f(x)$ dosadíme místo proměnné x proměnnou $-x$.

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$$

Je zřejmé, že je splněna rovnost (8.2) a funkce $f(x) = x^3 - x$ je lichá.

c) Příklad opět vyřešíme tak, že dosadíme do předpisu funkce $f(x)$ proměnnou $-x$ za proměnnou x a tím získáme $f(-x)$.

$$f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x)$$

V tomto případě je splněna rovnost (8.1) a funkce $f(x) = x^2 - 3$ je sudá.

d) K vyřešení příkladu je nutné určit, jak vypadá $f(-x)$, proto dosadíme do předpisu $f(x)$ za proměnnou x proměnnou $-x$.

$$f(-x) = 1 + \frac{2}{-x-5} = 1 - \frac{2}{x+5}$$

Předpis $f(-x)$ nelze upravit do tvaru $f(x)$ ani do tvaru $-f(x)$, proto funkce $f(x) = 1 + \frac{2}{x-5}$ není ani sudá, ani lichá.

Příklad 8.3 Rozhodněte, zda je funkce $f(x)$ rostoucí (popř. neklesající) a klesající (popř. nerostoucí).

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 6$,

b) $f(x) = -\dfrac{1}{4-x} - 2$,

c) $f(x) = -\log(x-1)$,

d) $f(x) = |x-3| - x$.

Řešení: Připomeňme si, co platí pro rostoucí a klesající funkci. Funkce $f(x)$ je na intervalu $I \subseteq D(f)$ rostoucí, pokud je splněna implikace (8.3), klesající, pokud je splněna implikace (8.4), neklesající, pokud je splněna implikace (8.5) a nerostoucí, pokud je splněna implikace (8.6).

$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \tag{8.3}$$

$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \tag{8.4}$$

$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \tag{8.5}$$

$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \tag{8.6}$$

Intervaly, kde je funkce rostoucí (popř. neklesající) a klesající (popř. nerostoucí), lze poznat i z grafu funkce. Tento příklad ale slouží k tomu, abychom si ukázali, jak lze tuto vlastnost funkce určit i bez grafu funkce.

a) Předpis funkce $f(x)$ určuje přímku, která je na celém definičním oboru vždy buď rostoucí nebo klesající. Stačí nám tedy vzít jakékoli dvě různé hodnoty x_1 a x_2 a rozhodnout, jestli je splněn vztah (8.3) nebo (8.4). Zvolíme např. $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$ a spočítáme v těchto bodech funkční hodnotu $f(x_1)$ a $f(x_2)$.

$$f(x_1) = \frac{1}{2}\cdot 1 + 6 = \frac{1+12}{2} = \frac{13}{2}$$
$$f(x_2) = \frac{1}{2}\cdot 2 + 6 = 1 + 6 = 7$$

Funkční hodnota v bodě x_1 je menší než funkční hodnota v bodě x_2, tedy $f(x_1) < f(x_2)$, je splněn vztah (8.3) a funkce $f(x) = \frac{1}{2}x + 6$ je rostoucí na celém definičním oboru.

b) Grafem funkce $f(x)$ je hyperbola, která je vždy na celém definičním oboru buď rostoucí nebo klesající. Definiční obor této funkce je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Stejně jako v možnosti a) si zvolíme dvě různá x_1 a x_2, abychom mohli porovnat jejich funkční hodnoty. Zvolíme např. $x_1 = 3$ a $x_2 = 5$ a spočítáme funkční hodnoty $f(x_1)$ a $f(x_2)$.

$$f(x_1) = -\frac{1}{4-3} - 2 = -\frac{1}{1} - 2 = -1 - 2 = -3$$
$$f(x_2) = -\frac{1}{4-5} - 2 = -\frac{1}{-1} - 2 = 1 - 2 = -1$$

Funkční hodnota v bodě x_1 je menší než funkční hodnota v bodě x_2, tedy $f(x_1) < f(x_2)$, je splněn vztah (8.3) a funkce $f(x) = -\frac{1}{4-x} - 2$ je na celém definičním oboru rostoucí.

c) Graf funkce $\log x$ je také rostoucí, popř. klesající na celém definičním oboru. Definiční obor funkce $f(x)$ je tvaru $D(f) = (1, \infty)$. Zvolíme $x_1 = 6$ a $x_2 = 7$ a porovnáme funkční hodnoty v těchto dvou bodech.

$$f(x_1) = -\log(6-1) = -\log 5 \doteq -0{,}699$$
$$f(x_2) = -\log(7-2) = -\log 6 \doteq -0{,}778$$

Funkční hodnota v bodě x_1 je větší než funkční hodnota v bodě x_2, tedy $f(x_1) > f(x_2)$, je splněn vztah (8.4) a funkce $f(x) = -\log(x-1)$ je klesající na celém definičním oboru.

d) Než začneme řešit, zda je funkce klesající (popř. nerostoucí) nebo rostoucí (popř. neklesající), musíme předpis funkce $f(x)$ upravit do tvaru bez absolutní hodnoty, s kterým se nám bude lépe pracovat (v tomto případě se funkce rozpadne na dvě různé funkce). Postupovat budeme tak, že najdeme nulový bod výrazu v absolutní hodnotě, tj. $x - 3 = 0$. Nulovým bodem výrazu je $x_0 = 3$, který rozdělí definiční obor funkce na interval $(-\infty, 3\rangle$ a interval $(3, \infty)$.

Nejdříve budeme pracovat s intervalem $(-\infty, 3\rangle$. Na tomto intervalu je výraz v absolutní hodnotě záporný, proto pokud se chceme zbavit absolutní hodnoty, vynásobíme výraz uvnitř absolutní hodnoty -1.

$$f_1(x) = -1(x-3) - x$$
$$f_1(x) = -x+3-x$$
$$f_1(x) = -2x+3$$

Na intervalu $(3, \infty)$ je výraz v absolutní hodnotě kladný a můžeme proto absolutní hodnotu odstanit.

$$f_2(x) = (x-3) - x$$
$$f_2(x) = x-3-x$$
$$f_2(x) = -3$$

Grafem funkce $f_1(x)$ je přímka, proto vezmeme dvě různá čísla $x_1, x_2 \in (-\infty, 3\rangle$ taková, že $x_1 < x_2$. Zvolíme např. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ a vypočítáme funkční hodnoty.

$$f_1(x_1) = -2 \cdot 0 + 3 = 3$$
$$f_1(x_2) = -2 \cdot 2 + 3 = -4 + 3 = -1$$

Funkční hodnota $f_1(x_1)$ je větší než funkční hodnota $f_1(x_2)$, tedy $f_1(x_1) > f_1(x_2)$. Je splněn vztah (8.4) a funkce $f_1(x)$ je na intervalu $(-\infty, 3\rangle$ klesající.

Funkce $f_2(x)$ je konstantní na celém intervalu $(3, \infty)$.

Původní funkce $f(x)$ je na intervalu $(-\infty, 3\rangle$ klesající a na intervalu $(3, \infty)$ konstantní. Můžeme tedy předpokládat, že funkce $f(x)$ je nerostoucí na celém definičním oboru funkce $f(x)$. Abychom svoje tvrzení dokázali, vezmeme různá x_1 a x_2 z definičního oboru $f(x)$, např. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, a vypočítáme funkční hodnoty v obou bodech.

$$f(x_1) = |2-3| - 2 = |-1| - 2 = 1 - 3 = -2$$
$$f(x_2) = |3-3| - 3 = |0| - 3 = 0 - 3 = -3$$

Funkční hodnota $f(x_1)$ je větší než funkční hodnota $f(x_2)$, protože hodnoty x_1 a x_2 jsou z intervalu $(-\infty, 3\rangle$. Pokud si zvolíme x_1 a x_2 z intervalu $(3, \infty)$ např. $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, funkční hodnoty budou stejné.

$$f(x_1) = |4-3| - 4 = |1| - 4 = 1 - 4 = -3$$
$$f(x_2) = |5-3| - 5 = |2| - 5 = 2 - 5 = -3$$

Pro funkční hodnoty funkce $f(x)$ platí: $f(x_1) \geq f(x_2)$, je splněn vztah (8.6) a funkce $f(x)$ je nerostoucí.

Příklad 8.4 Rozhodněte, zda je funkce $f(x)$ ohraničená (resp. shora ohraničená, resp. zdola ohraničená).

a) $f(x) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x - 1,$

b) $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 3,$

c) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3,$

d) $f(x) = \sqrt{x} - 9.$

Řešení: Nejdříve si připomeňme, jak je definován pojem ohraničené funkce. Funkce $f(x)$ se nazývá ohraničená, pokud obor hodnot funkce $f(x)$ je ohraničená množina, která je podmnožinou množiny $\mathbb{R}$. Při řešení příkladu budeme tedy postupovat tak, že najdeme obor hodnot $H(f)$ funkce $f(x)$

a) Exponenciální funkce mají obor hodnot $H(f) = (0, \infty)$. Exponenciální rovnice, která je v zadání, je posunutá o jednu jednotku po ose y směrem dolů, proto obor hodnot dané funkce je $H(f) = (-1, \infty)$. Teď stačí pouze dokázat, že funkce $f(x)$ nemá funkční hodnotu menší než -1. To dokážeme pomocí nerovnice:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x - 1 \geq -1$$
$$\left(\frac{2}{5}\right)^x \geq 0$$

Je zřejmé, že levá strana nerovnice bude vždy větší než 0, bude se 0 pouze blížit. Dokázali jsme tedy, že funkce $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1$ je zdola omezená.

b) Funkce $\cos x$ má obor hodnot $H(f) = \langle -1, 1\rangle$. Funkce $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$ je posunutá o $-\frac{\pi}{3}$ po ose x, ale to nemá na obor hodnot funkce žádný vliv. Nás zajímá posunutí po ose y, protože to nám mění obor hodnot funkce. Funkce $f(x)$ je posunutá po ose y o 3 jednotky směrem nahoru. Obor hodnot funkce $f(x)$ je proto $H(f) = \langle 2, 4\rangle$.

$$\begin{aligned} 2 &\leq \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 &\quad \wedge \quad& \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \leq 4 \\ -1 &\leq \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) && \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \end{aligned}$$

Funkce $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ nabývá pouze hodnoty z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ (stejně jako funkce $\cos x$), nerovnice je tedy zřejmě splněna pro $\forall x \in D(f)$ a funkce $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$ je omezená shora i zdola.

c) Grafem funkce $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$ je parabola. Pro snadnější počítání si upravíme předpis funkce $f(x)$ na vrcholový tvar.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 6x + 3 \\ f(x) &= 3(x^2 - 2x + 1) \\ f(x) &= 3(x-1)^2 \end{aligned}$$

Graf funkce $f(x)$ je posunut po ose x o jednu jednotku doprava, ale toto posunutí neovlivní obor hodnot funkce $f(x)$. Obor hodnot funkce $f(x)$ je $H(f) = \langle 0, \infty)$. Pomocí nerovnice dokážeme, že funkce $f(x)$ nenabývá menších hodnot než 0.

$$\begin{aligned} 3(x-1)^2 &\geq 0 \\ (x-1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Druhá mocnina jakéhokoli čísla je vždy nezáporná, nerovnice je tedy splněna a můžeme říct, že funkce $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$ je omezená zdola.

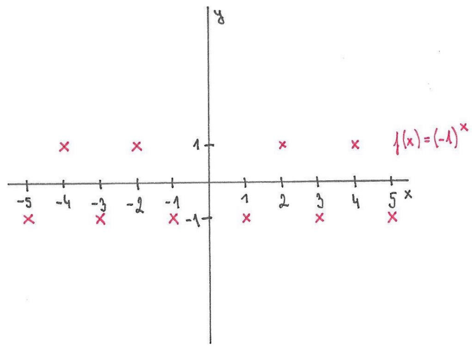
d) Oborem hodnot funkce $\sqrt{x}$ je interval $\langle 0, \infty)$. Graf funkce $f(x) = \sqrt{x} - 9$ dostaneme tak, že funkci $\sqrt{x}$ posuneme o devět jednotek dolů po ose y, proto obor hodnot funkce $f(x)$ je tvaru $H(f) = \langle -9, \infty)$. Dokážeme, že funkce $f(x)$ nabývá hodnoty větší nebo rovno -9.

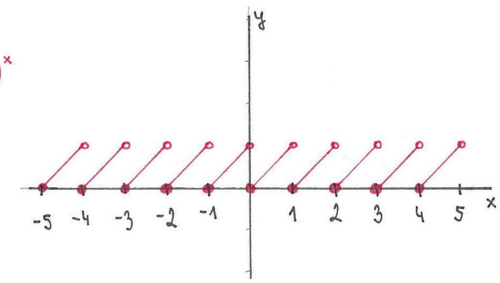
$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 9 &\geq -9 \\ \sqrt{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Odmocnina z jakéhokoli čísla je vždy nezáporné číslo, nerovnice je splněna a funkce $f(x) = \sqrt{x} - 9$ je omezená zdola.

Příklad 8.5 Načtrněte graf periodické funkce, která není goniometrickou funkcí.

Řešení: V zadání není napsáno, že máme určit předpis funkce, proto stačí načrtnout pouze graf periodické funkce. Pro názornost si uvedeme dva příklady grafu periodické funkce, která není goniometrickou funkcí. Sami zkuste vymyslet i další grafy periodických funkcí, které nejsou grafy goniometrických funkcí.





Obrázek 8.5: Periodická funkce $f(x)_1$ Obrázek 8.6: Periodická funkce $f(x)_2$

Příklad 8.6 Najděte předpis invezní funkce f^{-1} k funkci:

a) $y = \dfrac{x-1}{6x+3}$, pokud $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-0,5\}$,

b) $y = 1 + \log x$, pokud $D(f) = (0, \infty)$

c) $y = 2^x$, pokud $D(f) = \mathbb{R}$

d) $y = \sqrt{x-1}$, pokud $D(f) = \langle 1, \infty)$.

Řešení:

a) Inverzní funkci k dané funkci najdeme tak, že zaměníme proměnnou x a proměnnou y a z této rovnice vyjádříme proměnnou y.

$$x = \frac{y-1}{6y+3} \tag{8.7}$$

$$x(6y+3) = y-1 \tag{8.8}$$

$$6xy + 3x = y-1 \tag{8.9}$$

$$6xy - y = -3x-1 \tag{8.10}$$

$$y(6x-1) = -3x-1 \tag{8.11}$$

$$y = \frac{-3x-1}{6x-1} \tag{8.12}$$

Při vyjadřování proměnné y jsme nejdříve vynásobili rovnici (8.7) výrazem $6y+3$. V rovnici (8.8) jsme roznásobili levou stranu rovnice a získali rovnici (8.9). Rovnici (8.10) jsme získali tak, že jsme na levou stranu rovnice dali členy s proměnnou y a ostatní členy na pravou stranu. Když v rovnici (8.10) vytkneme na levé straně proměnnou y, získáme rovnici (8.11). Proměnnou y jsme z rovnice (8.11) vyjádřili tak, že jsme celou rovnici vydělili výrazem $6x-1$. Získali jsme tedy inverzní funkce k funkci $y = \frac{x-1}{6x+3}$, která je tvaru $f^{-1} = \frac{-3x-1}{6x-1}$. Nyní ještě musíme určit definiční obor inverzní funkce, který je tvaru

$D(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{6}\}$, což je také obor hodnot původní funkce $f(x)$. Můžeme si také povšimnout, že obor hodnot inverzní funkce f^{-1} je shodný s definičním oborem původní funkce $f(x)$.

b) Při hledání inverzní funkce k dané funkci opět zaměníme proměnnou x s proměnnou y. Po zaměnění proměnných získáváme rovnici (8.13) a postupnými úpravami vyjádříme proměnnou y.

$$x = 1 + \log y \tag{8.13}$$
$$x = \log 10 + \log y \tag{8.14}$$
$$x = \log 10y \tag{8.15}$$
$$10^x = 10y \tag{8.16}$$
$$y = \frac{10^x}{10} \tag{8.17}$$
$$y = 10^{x-1} \tag{8.18}$$

V rovnici (8.13) jsme si přepsali číslo 1 na $\log 10$ a získali rovnici (8.14). Abychom z rovnice (8.14) získali rovnici (8.15), použili jsme vzorec pro součet dvou logaritmů o stejném základu, tzn. $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$. V rovnici (8.15) jsme použili vzorec $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ a získali rovnici (8.16). Z rovnice (8.16) už stačí pouze vyjádřit proměnnou y, tzn. vydělíme celou rovnici 10 a následně upravíme do tvaru jedné mocniny. Inverzní funkce k funkci $y = 1 + \log x$ je tvaru $f^{-1} = 10^{x-1}$. Definičním oborem inverzní funkce f^{-1} jsou všechna reálná čísla, tedy $D(f^{-1}) = \mathbb{R} = H(f)$. Oborem hodnot inverzní funkce je interval $H(f^{-1}) = (0, \infty) = D(f)$.

c) Inverzní funkci k dané funkci najdeme opět tak, že zaměníme proměnnou x s proměnnou y a následně vyjádříme proměnnou y. Pokud zaměníme proměnné, získáváme rovnici (8.19).

$$x = 2^y \tag{8.19}$$
$$\log_2 x = y \tag{8.20}$$

V tomto případě stačilo použít pouze vzorec $a^y = x \Leftrightarrow \log_a x = y$, pomocí něhož jsme získali z rovnice (8.19) rovnici (8.20), ve které je již přímo vyjádřená proměnná y. Inverzní funkce je tvaru $f^{-1} = \log_2 x$, $D(f^{-1}) = (0, \infty) = H(f)$, $H(f^{-1}) = \mathbb{R} = D(f)$.

d) Postupovat budeme analogicky, jako v předchozích možnostech, tzn. zaměníme proměnnou x s proměnnou y a vyjádříme proměnnou y z rovnice.

$$x = \sqrt{y - 1} \tag{8.21}$$
$$x^2 = y - 1 \tag{8.22}$$
$$y = x^2 + 1 \tag{8.23}$$

Proměnnou y jsme z rovnice vyjádřili tak, že jsme nejdříve umocnili obě strany rovnice (8.21) a získali rovnici (8.22). Vyjádření proměnné y z rovnice (8.23) je zřejmé. Získali jsme inverzní funkci $f^{-1} = x^2 + 1$, která je definovaná pro všechna reálná čísla, ale není na tomto intervalu prostá, proto musíme funkci uvažovat pouze na podintervalu reálných čísel, kde je tato funkce prostá, tedy $D(f^{-1}) = \langle 0, \infty) = H(f)$. Oborem hodnot inverzní funkce f^{-1} je opět definiční obor původní funkce $f(x)$, tedy $H(f^{-1}) = \langle, \infty) = D(f)$.

Sami si zkuste načrtnout grafy inverzních funkcí a jejich původních funkcí. Z náčrtku byste mohli vypozorovat, že graf funkce f^{-1} a graf její původní funkce jsou osově souměrné podle osy $y = x$.

8.1 Příklady k procvičení

Cvičení 8.1.1 Určete definiční obror funkce $f(x)$.

a) $f(x) = \sqrt{x(x-5)}$,

b) $f(x) = \log[(x+1)(x-3)]$,

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+5}{x+2}}$,

d) $f(x) = \log\dfrac{x-3}{x+4}$,

e) $f(x) = \dfrac{4}{x-3} + \sqrt{8-x}$,

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-1}}{x^2+4x-5}$,

g) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x\sqrt{x+5}}$,

h) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{2-|\frac{x}{2}|}}$.

Cvičení 8.1.2 Rozhodněte, zda je funkce $f(x)$ rostoucí (popř. neklesající) a klesající (popř. nerostoucí).

a) $f(x) = |x+2| - |x-3|$,

b) $f(x) = |x+4| - 2x$,

c) $f(x) = 2|x| - 3x$,

d) $f(x) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^x - 9$,

e) $f(x) = \sqrt{x-9}$,

f) $f(x) = |x-4| - |x+2|$,

g) $f(x) = x - |3+x|$,

h) $f(x) = \log(x+2) - 4$.

Cvičení 8.1.3 Rozhodněte, zda je funkce $f(x)$ sudá, resp. lichá.

a) $f(x) = \dfrac{x^4-16}{x^2-4}$,

b) $f(x) = \arctan(x-1) - \dfrac{\pi}{2}$,

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|+4}$,

d) $f(x) = 3^x - \dfrac{3}{4}$,

e) $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$,

f) $f(x) = \arcsin x + \dfrac{\pi}{3}$,

g) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+5}$,

h) $f(x) = |x^3| - 1$.

Cvičení 8.1.4 Rozhodněte, zda je funkce $f(x)$ ohraničená (resp. shora ohraničená, resp. zdola ohraničená).

a) $f(x) = |x-2| + 3$,

b) $f(x) = \left|\frac{1}{x-5}\right| + 2$,

c) $f(x) = -x^2 - 6x - 5$,

d) $f(x) = \sin 2x - 1$,

e) $f(x) = (x-1)^3 + 4$,

f) $f(x) = \operatorname{arctan} x + \frac{\pi}{2}$,

g) $f(x) = -\frac{2}{x^2-2} + 3$,

h) $f(x) = \sin^2 x + 3$.

Cvičení 8.1.5 Najděte invezní funkci f^{-1} k funkci $f(x)$. Určete definiční obor a obor hodnot inverzní funkce f^{-1} a funkce $f(x)$.

a) $y = \frac{10x-5}{15-10x} + 1$,

b) $y = 1 - \frac{1}{2x}$,

c) $y = \sqrt{(2x+4)^3 - 7}$,

d) $y = \frac{x^3-1}{x^3}$,

e) $y = 2x + 5$,

f) $y = \frac{-x-7}{x+5}$,

g) $y = \sin 2x + 1$,

h) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

Cvičení 8.1.6 Rozhodněte, jaké vlastnosti mají funkce z příkladů 9.1.2 - 9.3.4 (rostoucí, klesající, sudá, lichá, ohraničená ...).

Kapitola 9

Elementární funkce

V této kapitole budeme pracovat s polynomy a s grafy základních elementárních funkcí (funkce racionální, exponenciální, logaritmické, mocninné, goniometrické, cyklometrické a hyperbolické) a za pomoci vhodných transformací budeme získávat funkce elementární (tj. funkce, které lze vytvořit ze základních elementárních funkcí pomocí konečného počtu operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání funkcí).

9.1 Polynomy a racionální funkce

Příklad 9.1.1 V oboru $\mathbb{R}$ rozložte polynom f na součin kořenových činitelů.

a) $f = x^4 - 1$,

b) $f = x^2 + 3x + 11$.

Řešení:

a) Při hledání kořenů polynomu f lze použít vzorec pro rozklad na součin, konkrétně vzorec: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Pokud aplikujeme tento vzorec na polynom f, získáme polynom tvaru: $f = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$, ve kterém můžeme vzorec pro rozklad na součin použít ještě jednou. Po úpravě získáme polynom $f = (x-1)(x+1)(x^2+1)$. Polynom (x^2+1) již nelze rozložit v oboru reálných čísel, proto konečný rozklad na součin kořenových činitelů je polynom tvaru: $f = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

b) Polynom f je kvadratický, proto je nejjednodušší použít vzorec pro výpočet kořenů polynomu. Jako první spočítáme diskriminant D.

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 9 - 44 = -35$$

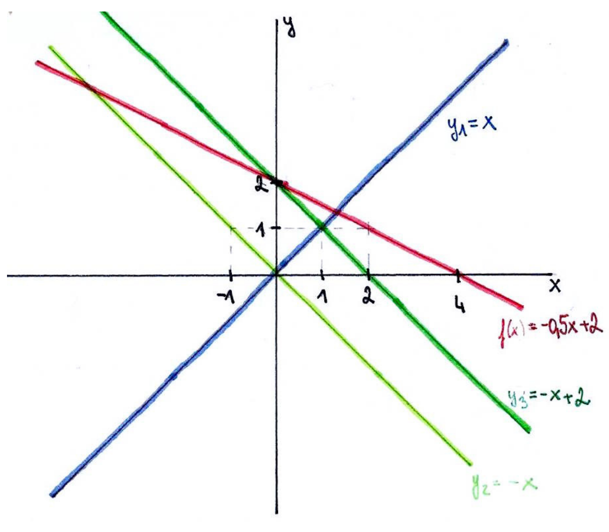
Diskriminant D vyšel záporný, což znamená, že kvadratický polynom f nemá žádné reálné kořeny, a proto je v $\mathbb{R}$ ireducibilní (nerozložitelný).

Příklad 9.1.2 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = x$ nakreslete graf funkce $f(x) = -0,5x+2$. Dále určete definiční obor funkce $f(x)$, obor hodnot funkce $f(x)$ a souřadnice průsečíku grafu funkce s osami x a y.

Řešení: Z předpisu funkce $f(x)$ je zřejmé, že se jedná o graf přímky. Přímka se obecně zapisuje ve tvaru $y = kx+q$, kde k je směrnice přímky ($k < 0 \Rightarrow$ funkce je klesající, $k > 0 \Rightarrow$ funkce je rostoucí) a q je posunutí po ose y.

Příklad začneme řešit tak, že si nakreslíme souřadné osy x a y, do kterých nakreslíme funkci $y_1 = x$. Funkce $f(x)$, kterou hledáme, má $k < 0$, proto si nakreslíme funkci $y_2 = -x$. Posunutí $q = 2$ říká, že funkce je posunutá o dvě jednotky po ose y směrem nahoru. Pokud tedy funkci y_2 posuneme o dvě jednotky nahoru po ose y, získáme graf funkce $y_3 = -x+2$. Nyní zbývá pouze vyřešit, jak se do grafu promítne směrnice $k = -\frac{1}{2}$. Směrnice $k = -\frac{1}{2}$ říká, že graf bude klesat o $\frac{1}{2}$ pomaleji než funkce $y_3 = -x+2$. Abychom dosáhli co největší přesnosti grafu, spočítáme průsečíky grafu s osou x a s osou y.

x	0	4
y	2	0



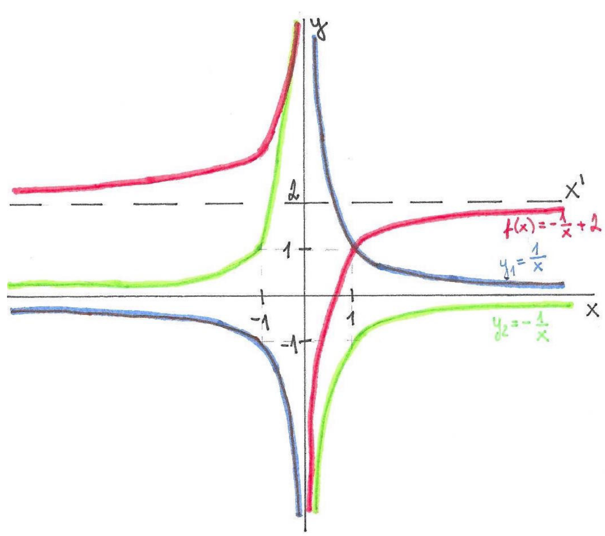
Obrázek 9.1: Transformace grafu $y = x$ do grafu $f(x) = -0,5x+2$

Když máme graf nakreslený, můžeme z grafu funkce určit definiční obor funkce $f(x)$ a obor hodnot funkce $f(x)$. Je zřejmé, že graf je neomezený ve směru osy x, proto $D(f) = \mathbb{R}$. Obor hodnot z grafu určíme také snadno, protože graf je neomezený i ve směru osy y $H(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 9.1.3 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y_1 = \frac{1}{x}$ nakreslete graf funkce $f(x) = -\frac{1}{x} + 2$. Dále určete definiční obor funkce $f(x)$, obor hodnot funkce $f(x)$ a souřadnice průsečíku grafu funkce s osami x a y.

Řešení: Grafem funkce $y_1 = \frac{1}{x}$ je hyperbola, proto nejprve nakreslíme tento graf. V dalším kroku nakreslíme graf funkce $y_2 = -\frac{1}{x}$, který je osově souměrný s grafem $y_1 = \frac{1}{x}$ podle osy y. Graf funkce $f(x) = -\frac{1}{x} + 2$ získáme tak, že posuneme graf y_2 o dvě jednotky nahoru po ose y. Pro lepší názornost si můžeme nakreslit pomocnou osou x', která prochází bodem $[0,2]$ a je rovnoběžná s osou x. Z předpisu funkce je zřejmé, že funkce $f(x)$ nemůže být rovna číslu 2, pouze se bude k tomuto číslu blížit. Abychom dosáhli maximální přesnosti grafu, najdeme průsečíky grafu $f(x)$ s osou x a s osou y.

x	0	$\frac{1}{2}$
y	$\times$	0



Obrázek 9.2: Transformace grafu $y = \frac{1}{x}$ do grafu $f(x) = -\frac{1}{x} + 2$

Při hledání definičního oboru a oboru hodnot funkce $f(x)$ budeme vycházet z grafu této funkce. Z grafu funkce $f(x)$ je zřejmé, že definiční obor funkce $f(x)$ je tvaru $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a obor hodnot funkce $f(x)$ je tvaru $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

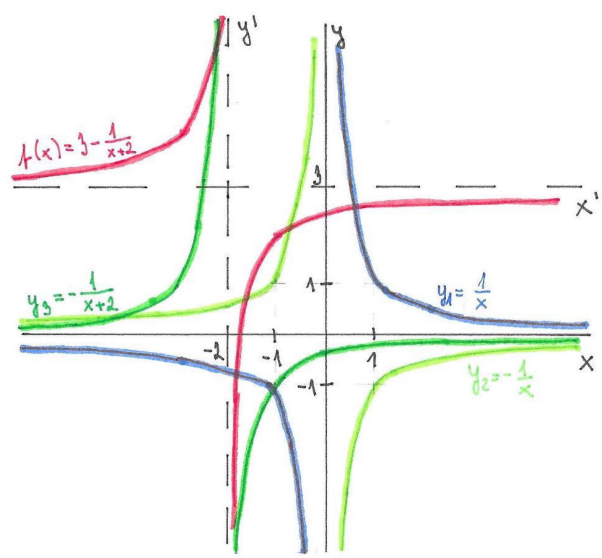
Příklad 9.1.4 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = \frac{1}{x}$ nakreslete graf funkce $f(x) = \frac{3x+5}{x+2}$. Dále určete definiční obor funkce $f(x)$, obor hodnot funkce $f(x)$ a souřadnice průsečíku grafu funkce s osami x a y.

Řešení: Předpis funkce $f(x)$ je neryze lomená funkce, proto ji musíme upravit do tvaru součtu polynomů a ryze lomené funkce. Toho dosáhneme tak, že vydělíme polynom $3x+5$ polynomem $x+2$.

$$\begin{array}{l} (3x{+}5) : (x+2) = 3 - \dfrac{1}{x+2} \\ \underline{-(3x{+}6)} \\ \quad -1 \end{array}$$

Získali jsme ekvivalentní předpis funkce $f(x) = 3 - \frac{1}{x+2}$. Nyní můžeme začít transformovat hyperbolu $y_1 = \frac{1}{x}$. Nejdříve nakreslíme graf funkce $y_2 = -\frac{1}{x}$, který je osově souměrný s $y_1 = \frac{1}{x}$ podle osy y. Pokud posuneme graf y_2 o dvě jednotky doleva po ose x, získáme graf funkce $y_3 = -\frac{1}{x+2}$ (můžeme vytvořit pomocnou osu y', která je rovnoběžná s osou y a prochází bodem $[-2,0]$). Graf funkce $f(x)$ získáme tak, že posuneme graf y_3 o tři jednotky nahoru po ose y (můžeme si vytvořit pomocnou osu x', která je rovnoběžná s osou x a prochází bodem $[0,3]$). Abychom dosáhli co nejpřesnějšího grafu, spočítáme průsečíky grafu funkce $f(x)$ se souřadnými osami x a y.

x	0	$-\frac{5}{3}$
y	$\frac{5}{2}$	0



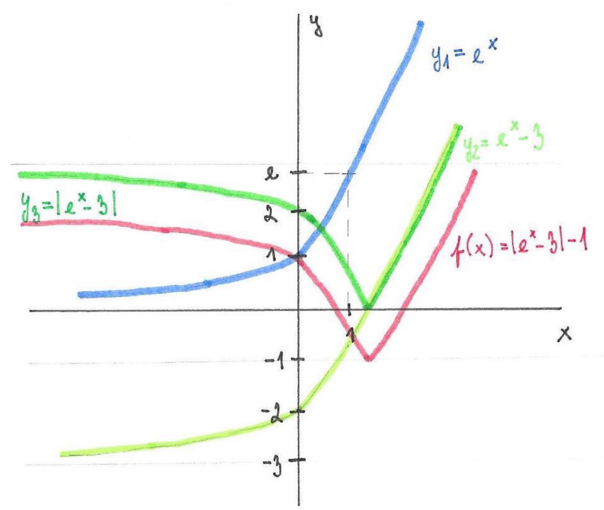
Obrázek 9.3: Transformace grafu $y = \frac{1}{x}$ do grafu $f(x) = \frac{3x+5}{x+2}$

Z grafu funkce $f(x)$ je zřejmé, že definiční obor funkce $f(x)$ je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ a obor hodnot funkce $f(x)$ je $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

9.2 Funkce exponenciální, logaritmické a mocninné

Příklad 9.2.1 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = e^x$ nakreslete graf funkce $f(x) = |e^x - 3| - 1$. Dále určete definiční obor funkce $f(x)$, obor hodnot funkce $f(x)$.

Řešení: Funkce $y = e^x$ je exponenciální funkce se základem větším než 1, proto je funkce rostoucí na celém definičním oboru a prochází body $[0,1]$ a $[1,e]$. Pokud posuneme funkci $y_1 = e^x$ o tři jednotky dolů po ose y, získáme graf funkce $y_2 = e^x - 3$. Graf funkce $y_3 = |e^x - 3|$ dostaneme tak, že tu část grafu funkce y_2, která je pod osou x (tzn. nabývá zde záporných hodnot), zobrazíme pomocí osové souměrnosti dle osy x do kladných hodnot (tzn. nad osu x). Graf funkce $f(x) = |e^x - 3| - 1$ získáme tak, že graf funkce y_3 posuneme o jednu jednotku směrem dolů po ose y.

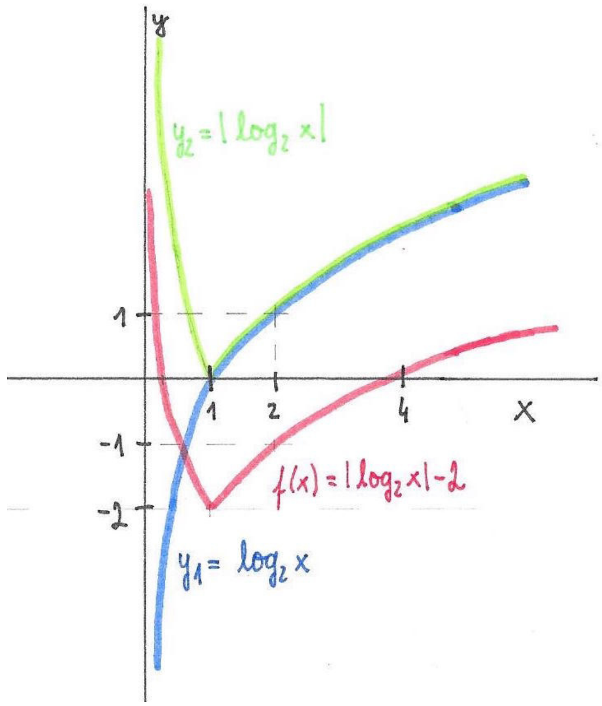


Obrázek 9.4: Transformace grafu $y = e^x$ do grafu $f(x) = |e^x - 3| - 1$

Z grafu funkce $f(x)$ je zřejmé, že definičním oborem funkce $f(x) = |e^x - 3| - 1$ je $D(f) = \mathbb{R}$ a oborem hodnot funkce $f(x) = |e^x - 3| - 1$ je interval $\langle -1, \infty)$.

Příklad 9.2.2 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = \log_2 x$ nakreslete graf funkce $f(x) = |\log_2 x| - 2$. Dále určete definiční obor funkce $f(x)$ a obor hodnot funkce $f(x)$.

Řešení: Nejdříve sestrojíme graf funkce $y_1 = \log_2 x$, který prochází body $[1,0]$ a $[2,1]$ a je rostoucí na celém definičním oboru. Graf funkce $y_2 = |\log_2 x|$ získáme z grafu y_1 tak, že tu část grafu y_1, která je pod osou x, zobrazíme pomocí osové souměrnosti podle osy x do kladných hodnot (tzn. nad osu x). Pokud posuneme graf funkce y_2 o dvě jednotky dolů po ose y, získáme graf funkce $f(x) = |\log_2 x| - 2$.

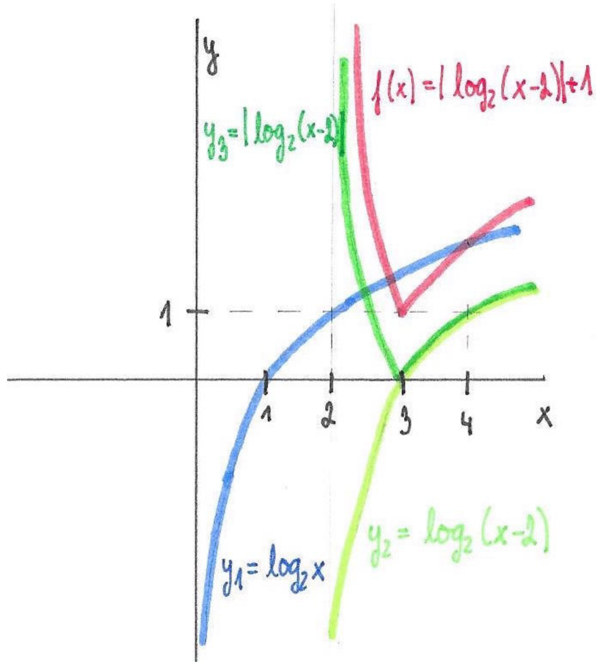


Obrázek 9.5: Transformace grafu $y = \log_2 x$ do grafu $f(x) = \log_2 x - 2$

Z grafu je zřejmé, že definiční obor funkce $f(x)$ je $D(f) = (0, \infty)$ a oborem hodnot funkce $f(x)$ je interval $\langle -2, \infty)$.

Příklad 9.2.3 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = \log_2 x$ nakreslete graf funkce $f(x) = \log_2(x-2)$. Dále určete definiční obor funkce $f(x)$ a obor hodnot funkce $f(x)$.

Řešení: Graf funkce $y_1 = \log_2 x$ získáme stejně jako v příkladu 9.2.2 (graf funkce y_1 prochází body $[2,1]$ $[1,0]$). Graf funkce $y_2 = \log_2(x-2)$ získáme tak, že graf funkce y_1 posuneme o dvě jednotky doprava po ose x. Pokud tu část grafu y_2, která je pod osou x, zobrazíme pomocí osové souměrnosti dle osy x, získáme graf funkce $y_3 = |\log_2(x-2)|$.



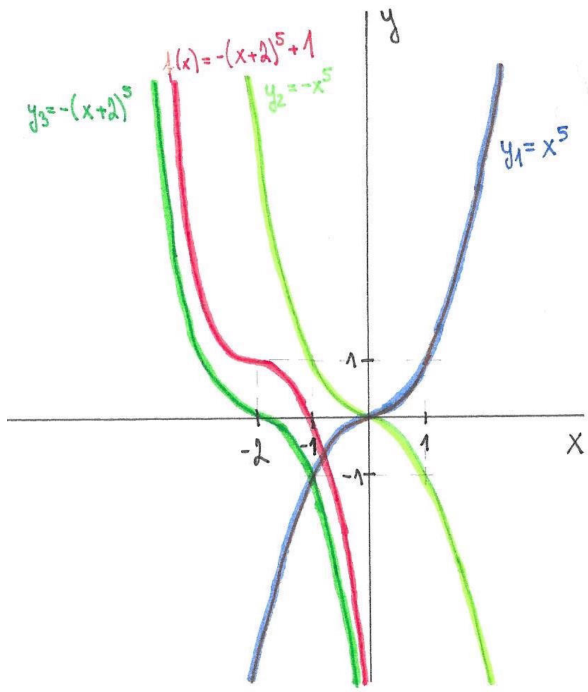
Obrázek 9.6: Transformace grafu $y = \log_2 x$ do grafu $f(x) = \log_2(x-2)$

Z grafu lze snadno zjistit, že definiční obor funkce $f(x)$ je tvaru $D(f) = (2,\infty)$ a oborem hodnot funkce $f(x)$ je interval $\langle 1,\infty)$.

Příklad 9.2.4 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = x^5$ nakreslete graf funkce $f(x) = -(x+2)^5 + 1$. Dále určete definiční obor funkce $f(x)$, obor hodnot funkce $f(x)$ a souřadnice průsečíku grafu funkce s osami x a y.

Řešení: Výchozí graf, s kterým budeme pracovat, je graf $y_1 = x^5$. Graf funkce $y_2 = -x^5$ je osově souměrný s grafem funkce y_1 podle osy y. Pokud graf funkce y_2 posuneme o dvě jednotky doleva po ose x, získáme graf funkce $y_3 = -(x+2)^5$. Graf funkce $f(x) = -(x+2)^5 + 1$ získáme z grafu funkce y_3 tak, že graf funkce y_3 posuneme o jednu jednotku směrem nahoru po ose y. Nyní spočítáme průsečíky funkce $f(x)$ se souřadnými osami.

x	0	-1
y	-31	0



Obrázek 9.7: Transformace grafu $y = x^5$ do grafu $f(x) = -(x+2)^5 + 1$

Z grafu funkce $f(x) = -(x+2)^5 + 1$ je patrné, že definiční obor funkce $f(x)$ je $D(f) = \mathbb{R}$ a obor hodnot funkce $f(x)$ je tvaru $H(f) = \mathbb{R}$.

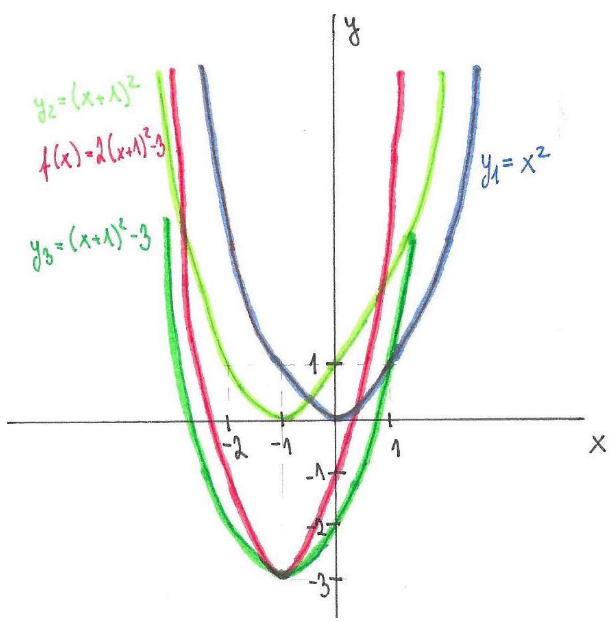
Příklad 9.2.5 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = x^2$ nakreslete graf funkce $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$. Dále určete definiční obor funkce $f(x)$, obor hodnot funkce $f(x)$ a souřadnice průsečíku grafu funkce s osami x a y.

Řešení: Funkci $f(x)$ je potřeba nejdříve upravit do vrcholového tvaru, abychom věděli, kde je vrchol paraboly a jaké je posunutí po ose x a y, protože tyto vlastnosti z tvaru funkce $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ nepoznáme. Funkci $f(x)$ upravíme na tvar pomocí vytýkání a tzv. doplnění na čtverec.

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 1 = 2(x^2 + 2x) - 1 = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 1 = 2(x^2 + 2x + 1) - 2 - 1 = \\ = 2(x + 1)^2 - 3$$

Funkci $f(x)$ již máme v požadovaném tvaru a můžeme začít transformovat parabolu $y_1 = x^2$. Nejdříve posuneme funkci y_1 o dvě jednotky doleva po ose x a tím získáme graf funkce $y_2 = (x+1)^2$. Pokud graf funkce y_2 posuneme o tři jednotky dolů po ose y, získáme graf funkce $y_3 = (x+1)^2 - 3$. Graf funkce $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$ klesá (popř. stoupá) dvakrát rychleji než funkce y_3. Abychom věděli, kterými body paraboly $f(x)$ prochází, spočítáme průsečíky s osou x a průsečík s osou y.

x	0	$\frac{-2+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-2-\sqrt{5}}{2}$
y	-1	0	0



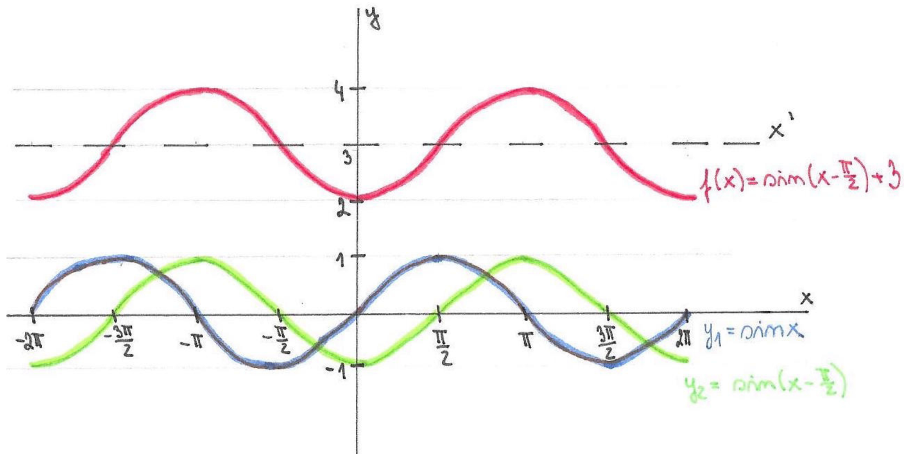
Obrázek 9.8: Transformace grafu $y = x^2$ do grafu $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

Z grafu je jasně vidět, že definiční obor funkce $f(x)$ je tvaru $D(f) = \mathbb{R}$ a obor hodnot funkce $f(x)$ je $H(f) = \langle -3, \infty)$.

9.3 Funkce goniometrické a cyklometrické

Příklad 9.3.1 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = \sin x$ nakreslete graf funkce $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 3$ pro $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$. Určete obor hodnot funkce $f(x)$.

Řešení: Při řešení příkladu budeme vycházet z funkce $y_1 = \sin x$. Pokud posuneme graf funkce y_1 o $\frac{\pi}{2}$ doprava po ose x, získáme graf funkce $y_2 = \sin(x - \frac{\pi}{2})$. Graf funkce $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 3$ získáme, pokud posuneme graf funkce y_2 o tři jednotky směrem nahoru po ose y.

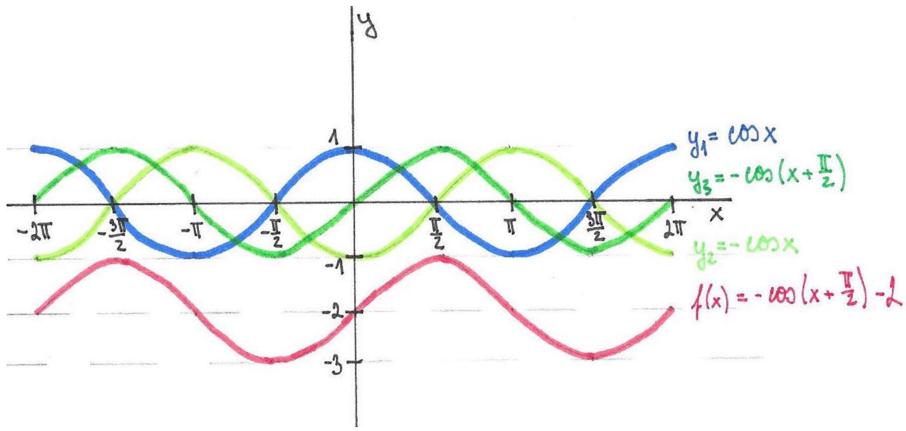


Obrázek 9.9: Transformace grafu $y = \sin x$ do grafu $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 3$

Obor hodnot funkce $f(x)$ vidíme z grafu funkce $f(x)$, tedy $H(f) = \langle 2, 4 \rangle$.

Příklad 9.3.2 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = \cos x$ nakreslete graf funkce $f(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2}) - 2$ pro $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$. Určete obor hodnot funkce $f(x)$.

Řešení: Při hledání grafu funkce $f(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2}) - 2$ si nejdříve načrtneme graf funkce $y_1 = \cos x$. Graf funkce $y_2 = -\cos x$ načrtneme tak, že graf funkce y_1 zobrazíme pomocí osové souměrnosti dle osy x. Pokud posuneme graf funkce y_2 o $\frac{\pi}{2}$ směrem doleva po ose x, získáme graf funkce $y_3 = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$. Graf funkce $f(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2}) - 2$ sestrojíme tak, že graf funkce y_3 posuneme o dvě jednotky směrem dolů po ose y.

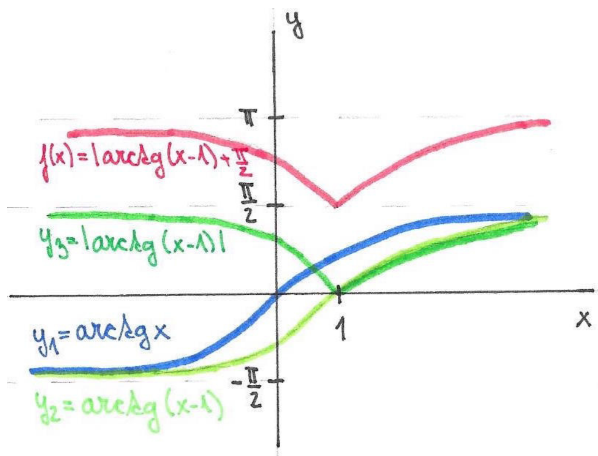


Obrázek 9.10: Transformace grafu $y = \cos x$ do grafu $f(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2}) - 2$

Obor hodnot funkce $f(x)$ je zřejmý z grafu funkce $f(x)$, tedy $H(f) = \langle -3, -1 \rangle$.

Příklad 9.3.3 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = \operatorname{arctg} x$ nakreslete graf funkce $f(x) = |\operatorname{arctg}(x-1)| + \frac{\pi}{2}$.Určete definiční obor funkce $f(x)$ a obor hodnot funkce $f(x)$.

Řešení: Nejdříve si nakreslíme graf funkce $y_1 = \operatorname{arctg} x$, z kterého budeme vycházet. Když posuneme graf funkce y_1 a jednu jednotku doprava, získáme graf funkce $y_2 = \operatorname{arctg}(x+1)$. Nyní nakreslíme graf funkce $y_3 = |\operatorname{arctg}(x+1)|$, který získáme tak, že tu část grafu funkce y_2, která je na ose y v záporných hodnotách (tzn. pod osou x), zobrazíme pomocí osové souměrnosti podle osy x do kladných hodnot (tzn. nad osu x). Výsledný graf funkce $f(x) = |\operatorname{arctg}(x-1)| + \frac{\pi}{2}$ dostaneme tak, že posuneme celý graf funkce y_3 o $\frac{\pi}{2}$ směrem nahoru po ose y.

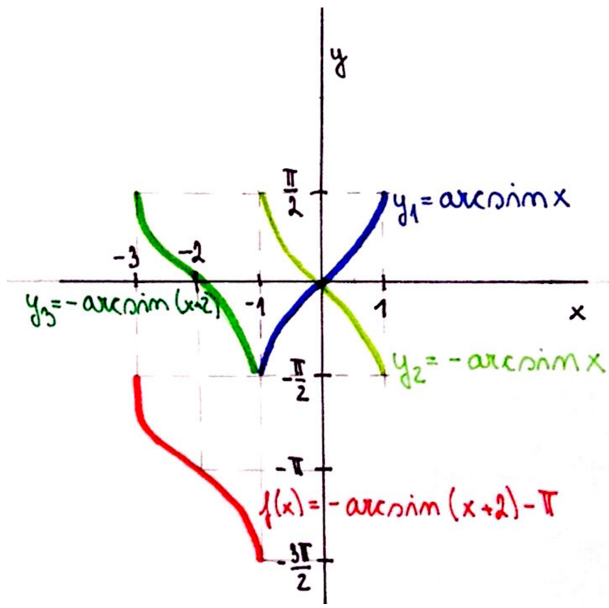


Obrázek 9.11: Transformace grafu $y = \operatorname{arctg} x$ do grafu $f(x) = |\operatorname{arctg}(x-1)| + \frac{\pi}{2}$

Z grafu funkce $f(x) = |\operatorname{arctg}(x-1)| + \frac{\pi}{2}$ je zřejmé, že definičním oborem funkce $f(x)$ jsou všechna reálná čísla, tzn. $D(f) = \mathbb{R}$. Oborem hodnot původní funkce $y = \operatorname{arctg} x$ je interval $H(f) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Díky transformacím grafu je oborem hodnot funkce $f(x) = |\operatorname{arctg}(x-1)| + \frac{\pi}{2}$ interval $H(f) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Příklad 9.3.4 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = \arcsin x$ nakreslete graf funkce $f(x) = -\arcsin(x+2) - \pi$. Určete definiční obor funkce $f(x)$ a obor hodnot funkce $f(x)$.

Řešení: Budeme vycházet z grafu funkce $y_1 = \arcsin x$, který si načrtneme jako první. Graf funkce $y_2 = -\arcsin x$ získáme z grafu funkce y_1 tak, že graf funkce y_1 zobrazíme pomocí osově souměrnosti podle osy x. Pokud posuneme graf funkce y_2 o dvě jednotky doleva, získáme graf funkce $y_3 = -\arcsin(x+2)$. Výsledný graf $f(x) = -\arcsin(x+2) - \pi$ získáme tak, že graf y_3 posuneme o π dolů po ose y.



Obrázek 9.12: Transformace grafu $y = \mathrm{arctg} x$ do grafu $f(x) = |\mathrm{arctg}(x-1)| + \frac{\pi}{2}$

Původní funkce $y = \arcsin x$ má definiční obor $D(f) \in \langle -1, 1 \rangle$ a obor hodnot $H(f) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Díky transformácím je definičním oborem funkce $f(x) = -\arcsin(x+2) - \pi$ interval $D(f) \in \langle -3, -1 \rangle$ a oborem hodnot funkce $f(x)$ je interval $H(f) \in \langle -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \rangle$.

9.4 Příklady k procvičení

Cvičení 9.4.1 V oboru $\mathbb{R}$ rozložte polynom f na součin kořenových činitelů.

a) $f = x^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{y^2}{9}$,

b) $f = 9x^2 - 1$,

c) $f = x^2 + 2x - 15$,

d) $f = x^3 - 3x^2 - 4x$,

e) $f = x^2 + x + \frac{1}{4}$,

f) $f = 4y^3 - 9x^2y$,

g) $f = x^4 + 7x^3 + 12x^2$,

h) $f = 9x^2 - y^2 + 2xy - x^2$.

Cvičení 9.4.2 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = \frac{1}{x}$ nakreslete graf funkce $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

Cvičení 9.4.3 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = \log_3 x$ nakreslete graf funkce $f(x) = \log_3(x-1) + 2$.

Cvičení 9.4.4 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = e^x$ nakreslete graf funkce $f(x) = |e^x - 1| + 2$.

Cvičení 9.4.5 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = \sin x$ nakreslete graf funkce $f(x) = |\sin 2x| - 2$ pro $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Cvičení 9.4.6 Pomocí vhodných transformací grafu funkce $y = x^2$ nakreslete graf funkce $f(x) = -x^2 - 4x - 1$.

Kapitola 10

Výsledky příkladů k procvičování

Základní pojmy matematické logiky

1.1.1 a) ne, b) ano, c) ano, d) ne, e) ne.

1.1.2 a) Všechna prvočísla jsou lichá. b) Alespoň jedna krychle má 7 stěn. c) Nepůjdu do kina ani s Danou ani s Filipem. d) Alespoň jeden den se do školy učit musím. e) Nevrátím knížku do knihovny a zaplatím pokutu nejvýše 4 Kč. f) $\sqrt{10} < 3$.

1.1.3 $U(x) = \{5,6,7,8,9\}$, $V(x) = \{7,8,9,10,11,12,13\}$, $\neg U(x) \wedge V(x) = \{10,11,12,13\}$, $U(x) \vee \neg V(x) = \{5,6,7,8,9,14,15\}$, $U(x) \Rightarrow V(x) = \{7,8,9,5,6,14,15\}$, $U(x) \Rightarrow \neg V(x) = \{5,6,7,8,9,\ 10,11,12,13\}$, $U(x) \Leftrightarrow V(x) = \{7,8,9,14,15\}$.

1.1.4 a) $\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{3}\right)$, b) $(-\infty,-5) \cup (4,\infty)$, c) $\emptyset$.

Základy teorie množin

3.1.1 a) $A \cap B = \{0,1,2,3\}$, b) $A \cup B = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$, c) $B - A = \{4,5\}$.

3.1.2 $A = \{a,b,c,d\}, B = \{c,d,e,f,g\}$.

3.1.4 a) $A \subset B$, b) $B \subset A$.

3.1.5 a) $A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$, b) $B \times A = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$, c) $B \times 2^B = \{(1,\emptyset),(1,\{1\}),(1,\{2\}),(1,\{1,2\}),(2,\emptyset),(2,\{1\}),(2,\{2\}),(2,\{1,2\})\}$, d) $A \times A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$.

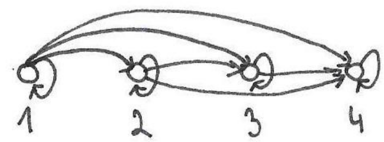
3.1.7 a) platí, b) neplatí, c) neplatí, d) platí.

Relace

4.1.1 Relace ρ je reflexivní, antisymetrická, tranzitivní a úplná.

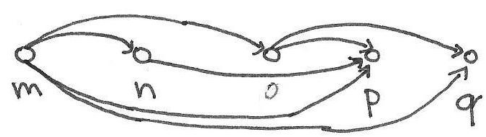
a) $\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$

ρ	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	1	1	1
2	0	1	1	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	1



Obrázek 10.1: b) tabulka relace ρ Obrázek 10.2: c) uzlový graf relace ρ

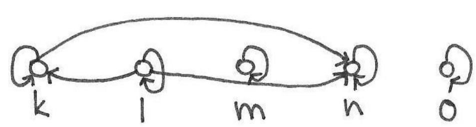
4.1.2 $\rho = \{(m,n),(m,o),(n,p),(o,p),(o,q),(m,p),(m,q)\}$



Obrázek 10.3: Uzlový graf relace ρ

4.1.3 $\rho = \{(a,a),(b,b),(d,a),(c,c),(d,d),(a,d)\}$

4.1.4 $\rho = \{(k,k),(m,m),(n,n),(k,n),(l,k),(l,l),(o,o),(l,n)\}$



Obrázek 10.4: Uzlový graf relace ρ

4.1.5 Př. 4.1: $\rho^{-1} = \{(A,1),(D,2),(A,3),(E,4),(B,5)\}$, př. 4.2: $\rho^{-1} = \{(F,P),(P,F),(F,D),(D,P),(H,J),(K,H),(V,K),(J,V),(V,J),(H,L),(L,H),(K,L)\}$, př. 4.4: $\rho^{-1} = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,3)\}$, př. 4.7: $\rho^{-1} = \{(1,1),(3,1),(4,2),(1,3),(3,3),(5,4),(4,5)\}$.

Zobrazení

5.1.1 a) není zobrazení, b) je zobrazení.

5.1.2 a) injektivní, b) injektivní, c) surjektivní.

5.1.3 a) x^2+6, b) $x^2+10x+26$, c) $x-5$, d) $\sqrt{x-1}$, e) $\sqrt{x-1}-5$, f) $\sqrt{x-6}$.

5.1.4 a) $f(x)=2x$,

b) $f(x)=\begin{cases} 0 & x=0, \\ x-1 & x\geq 0. \end{cases}$

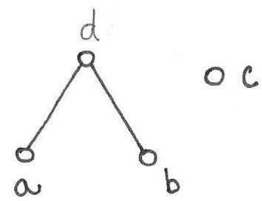
5.1.5 a) $f(x)=\frac{x}{2}$,

b) $f(x)=\begin{cases} 2x & x>0, \\ -2x+1 & x\leq 0. \end{cases}$

Uspořádání

6.1.1 $\rho=\{(a,a),(d,d),(a,d),(d,b),(e,c),(a,b),(b,b),(c,c),(e,e)\}$

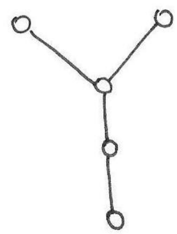
6.1.2 Relace ρ je uspořádání.



Obrázek 10.5: Uzlový graf relace ρ

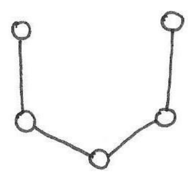
6.1.3 Hasseovský diagram může vypadat různě, proto je zde uvedeno několik příkladů.

(a)

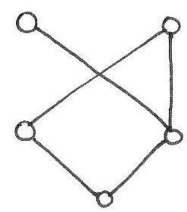


(b)

(c)



(d)



(e)

6.1.4 Hasseovský diagram neexistuje, protože konečná množina má alespoň jeden minimální prvek.

6.1.5 a) prvky a a c jsou minimální, prvky b a d jsou maximální, b) prvky a a d jsou minimální, prvky c a d jsou maximální, c) prvky a, d a c jsou minimální, prvky b, d a c jsou maximální.

Relace ekvivalence a rozklady

7.1.1 $\rho = \{(a,a),(d,d),(a,d),(d,b),(e,c),(a,b),(b,a),(b,b),(b,d),(c,c),(c,e),(d,a),(e,e)\}$

7.1.2 Relace ρ je ekvivalencí, $A/\rho = \{\{a,b,d\},\{c\}\}$.

7.1.3 a) $\sim_M = \{(m,m),(n,n),(o,o),(p,p),(q,q),(r,r),(n,o),(o,n),(p,q),(p,r),(q,p),(q,r),(r,p),(r,q)\}$, b) $\sim_M = \{(m,m),(n,n),(o,o),(p,p),(q,q),(r,r),(m,n),(m,o),(n,m),(n,o),(o,m),(o,n),(p,q),(p,r),(q,p),(q,r),(r,p),(r,q)\}$, c) $\sim_M = \{(m,m),(n,n),(o,o),(p,p),(q,q),(r,r),(m,n),(n,m),(o,p),(p,o),(q,r),(r,q)\}$.

7.1.4 a) ne, b) ano, c) ano, d) ne, e) ne.

Reálné funkce reálné proměnné

8.1.1 a) $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 5, \infty)$, b) $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, c) $x \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{5}{3}, \infty)$, d) $x \in (-\infty, -4) \cup (3, \infty)$, e) $x \in (-\infty, 3) \cup (3, 8\rangle$, f) $x \in \langle \frac{1}{3}, 1) \cup (1, \infty)$, g) $x \in (-5, 0) \cup (0, \infty)$, h) $x \in (-4, 4)$.

8.1.2 a) neklesající, b) klesající, c) klesající, d) rostoucí, e) rostoucí, f) nerostoucí, g) neklesající, h) rostoucí.

8.1.3 a) sudá, b) ani lichá ani sudá, c) sudá, d) ani lichá ani sudá, e) lichá, f) ani lichá ani sudá, g) lichá, h) sudá.

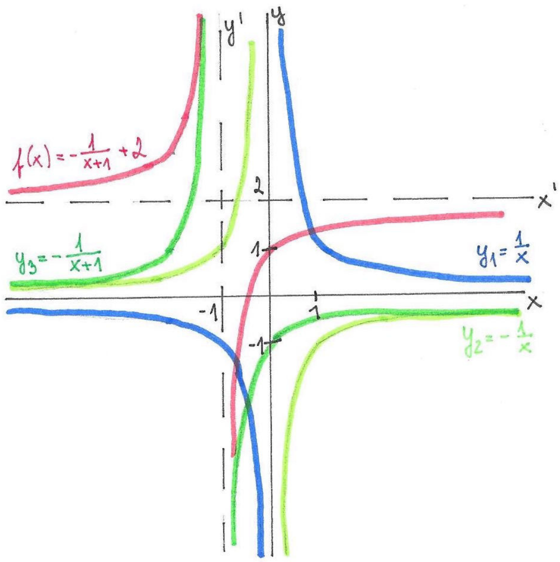
8.1.4 a) zdola omezená, b) zdola omezená, c) shora omezená, d) omezená, e) neomezená, f) omezená, g) shora omezená, h) omezená.

8.1.5 a) $f^{-1} = \frac{3x-2}{2x}$, b) $f^{-1} = -\frac{1}{2x-2}$, c) $f^{-1} = \frac{\sqrt[3]{x^2+7}-4}{2}$, d) $f^{-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{1-x}}$, e)$f^{-1} = \frac{x+5}{2}$, f) $f^{-1} = -\frac{5x+7}{x+1}$, g) $f^{-1} = \frac{1}{2}\arcsin(x-1)$, h) $f^{-1} = \sqrt[3]{x} - 1$.

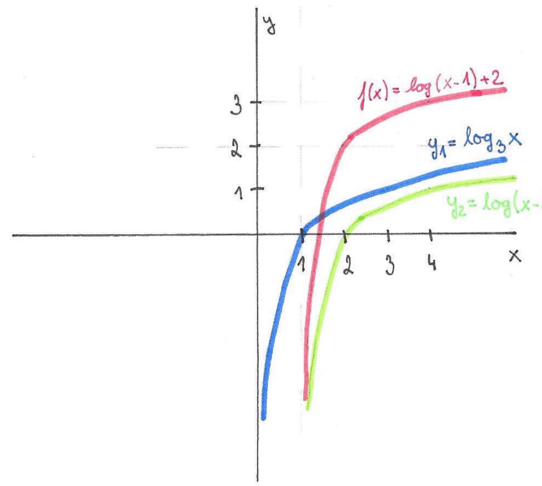
8.1.6 Př. 9.1.2: funkce $f(x)$ je klesající na celém definičním oboru, není ani sudá, ani lichá, funkce $f(x)$ je neomezená, př. 9.1.3: funkce $f(x)$ je rostoucí na celém definičním oboru, není ani sudá, ani lichá, funkce $f(x)$ je na intervalu $(-\infty, 0)$ omezená zdola a na intervalu $(0, \infty)$ omezená shora, př. 9.1.4: funkce $f(x)$ je rostoucí na celém definičním oboru, není ani sudá, ani lichá, funkce $f(x)$ je na intervalu $(-\infty, -2)$ omezená zdola a na intervalu $(-2, \infty)$ omezená shora, př. 9.2.1: funkce $f(x)$ je klesající na intervalu $(-\infty, \ln 3\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle \ln 3, \infty)$, není ani sudá, ani lichá, funkce $f(x)$ je omezená zdola, př. 9.2.2: funkce $f(x)$ je klesající na intervalu $(0, 1)$ a rostoucí na intervalu $(1, \infty)$, funkce $f(x)$ není ani sudá, ani lichá, funkce $f(x)$ je omezená zdola, př. 9.2.3: funkce $f(x)$ je klesající na intervalu $(2, 3)$ a rostoucí na intervalu $(3, \infty)$, funkce $f(x)$ není ani sudá, ani lichá, funkce $f(x)$ je omezená zdola, př. 9.2.4: funkce $f(x)$ je klesající na celém definičním oboru, není ani sudá, ani lichá, funkce $f(x)$ je neomezená, př. 9.2.5: funkce $f(x)$ je klesající na intervalu $(-\infty, -1\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle -1, \infty)$, není ani sudá, ani lichá, funkce $f(x)$ je omezená zdola, př. 9.2.3: funkce $f(x)$ je periodická, rostoucí na intervalu $(-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi)$ a klesající na intervalu $(-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi)$, funkce $f(x)$ je sudá, není lichá a je omezená, př. 9.3.2: funkce $f(x)$ je periodická, rostoucí na intervalu $(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ a klesající na intervali $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, funkce $f(x)$ je omezená, př. 9.3.3: funkce $f(x)$ je klesající na intervalu $(-\infty, 1\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 1, \infty)$, funkce $f(x)$ není ani sudá, ani lichá, funkce $f(x)$ je omezená, př. 9.3.4: funkce $f(x)$ je klesající na celém definičním oboru, není ani sudá, ani lichá, funkce $f(x)$ je omezená.

Elementární funkce

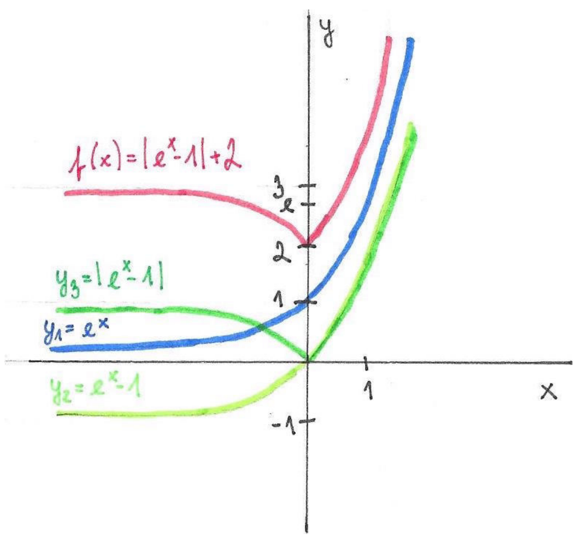
9.4.1 a) $(x-\frac{y}{3})^2$, b) $(3x-1)(3x+1)$, c) $(x-3)(x+5)$, d) $x(x-4)(x+1)$, e) $(x+\frac{1}{2})^2$, f) $y(2y-3x)(2y+3x)$, g) $x^2(x+3)(x+4)$, h) $(4x-y)(2x+y)$.



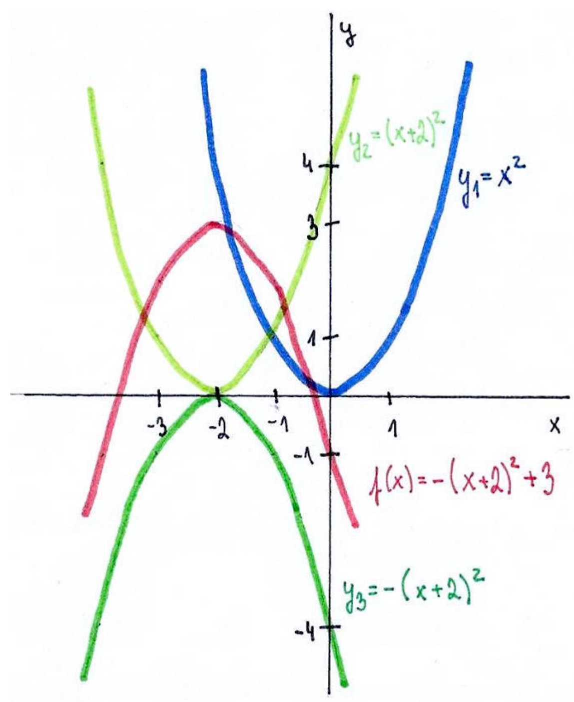
Cvičení 9.4.2



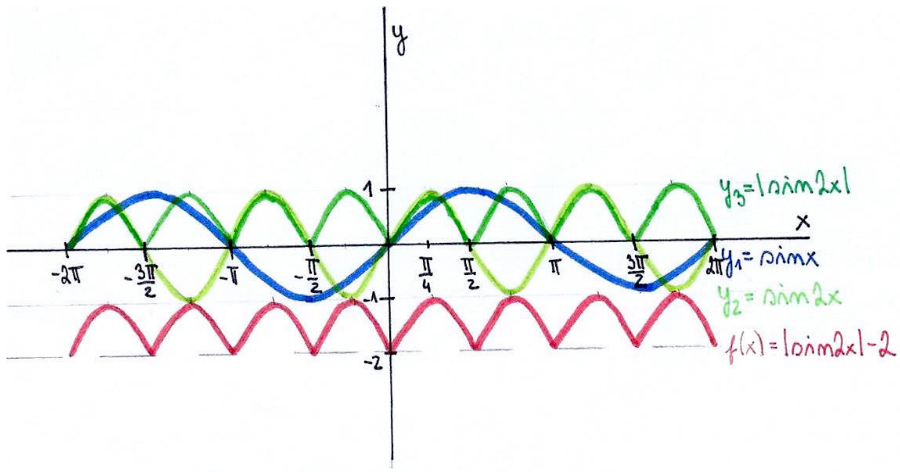
Cvičení 9.4.3



Cvičení 9.4.4



Cvičení 9.4.6



y
x
1
-1
-2
-2π
-3π/2
-π
-π/2
π/4
π/2
π
3π/2
2π
y3=|sin2x|
y1=sinx
y2=sin2x
f(x)=|sin2x|-2

Cvičení 9.4.5

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit sbírku řešených matematických příkladů, která by sloužila studentům pedagogické fakulty jako pomůcka při studiu a pro snazší přípravu do předmětu Základy matematiky.

Celá práce je rozložena do devíti základních kapitol, dle jednotlivých matematických oblastí. Každá kapitola obsahuje stručný úvod, který přibližuje studentům, co bude v kapitole řešeno, dále vzorové příklady, včetně postupu řešení a případného grafického znázornění výsledku. V závěru každé kapitoly je připraveno několik příkladů k procvičení. Výsledky těchto příkladů jsou uvedeny v samostatné kapitole v závěru této práce. Jednotlivé příklady jsem volila tak, aby bylo možné řádně a dostatečně vysvětlit postupy výpočtů a umožnit tak studentům snadnější pochopení základních principů potřebných pro řešení obtížnějších úloh. Práce obsahuje dostatek příkladů k úspěšnému zvládnutí a osvojení si potřebných znalostí nejen do předmětu Základy matematiky, ale i pro další obdobně zaměřené předměty a studia.

Věřím, že tato sbírka Řešených příkladů ze Základů matematiky bude přínosem studentům pro snazší pochopení základních matematických principů a zároveň zdrojem vhodných příkladů pro vyučující matematických předmětů.

Literatura

[1] KOSMÁK, Ladislav. *Množinová algebra*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1995, 131 s. ISBN 8021010827

[2] KOSMÁK, Ladislav a Radovan POTŮČEK. *Exercises in set algebra with solutions*. Vyd. 1. Brno: Education Fakulty of Masaryk University, 1997, 46 s. ISBN 8021015659

[3] SIGLER, L. *Excercises in set theory*. New York: Springer-Verlag, 1976, 133 s. ISBN 3-540-90193-0

[4] COUFALOVÁ, Yvona. *Cvičení z algebry*. Vyd. 1. Brno: UJEP Brno, 1985, 168 s.

[5] KATĚTOV, Miroslav. *Jaká je logická výstavba matematiky?* Vyd. 1. Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1946, 103 s.

[6] VÝBORNÝ, Rudolf. *Matematická indukce*. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1963, 61 s.

[7] SOMINSKIJ, Il'ja Samuilovič. *Metoda matematické indukce*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1953, 59 s.

[8] JELÍNEK, Miloš. *Množiny*. Vyd. 2. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973, 133 s.

[9] JELÍNEK, Miloš. *Relace a funkce*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1974, 128 s.

[10] JELÍNEK, Miloš. *Numerační soustavy*. Vyd. 1. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1974, 128 s.

[11] JELÍNEK, Miloš. *Číselné množiny*. Vyd. 1. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1977, 208 s.

[12] BIAŁAS, Aleksander. *O dělitelnosti čísel*. Vyd. 1. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966, 97 s.

[13] BUKOVSKÝ, Lev a Igor KLUVÁNEK. *Dirichletov princip*. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1970, 58 s.

[14] SEDLÁČEK, Jiří. *Co víme o přirozených číslech*. 3. vyd. Praha: Mladá fronta, 1977, 62 s.

[15] ŠMAKAL, Stanislav a Bruno BUDINSKÝ. *Goniometrické funkce*. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1968, 144 s.

[16] ČECH, Vlastimil. *Proč děláme důkazy v matematice*. Vyd. 1. Praha: SPN, 1971, 123 s.

[17] ŠISLER, Miroslav a JARNÍK, Jiří. *O funkcích*. Vyd. 2. Praha: Mladá fronta, 1963, 60 s.

[18] HORÁK, Pavel. *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1991. 221 s. ISBN 80-210-0288-3.