MA2BP_PGE, 11. ledna 2017

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích příslušného eukleidovského prostoru.

Každý úkol (+) je hodnocen 6 body; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 39 bodů.

---

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [-1, 1, 3], \quad B = [2, 1, 7], \quad C = [2, 6, 7], \quad H = [3, 6, 0].$$

+ Určete souřadnice bodů D, E, F, G tak, aby všechny tyto body tvořily vrcholy rovnoběžnostěnu s podstavami $ABCD$ a $EFGH$.
+ Určete odchylku úhlopříčky BH od podstavy $ABCD$.
+ Určete objem čtyřstěnu $ABCH$.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{[1, 1, 2, 4] + t(1, 1, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{C} = \{[3, 4, 0, 3] + s_1(0, 1, 0, 1) + s_2(1, 0, 0, 0) \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R}\}.$$

+ Určete vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
+ Určete vzdálenost $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

3. V trojrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{v}_1 = (3, 0, 4), \quad \mathbf{v}_2 = (3, 5, 4).$$

+ Určete vektorový součin $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ a ukažte, že platí
$$\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\mathbf{v}_1 \boldsymbol{.}\, \mathbf{v}_2)^2.$$

4. Transformace v rovině je dána předpisem

$$[x, y] \mapsto [2x - y - 2,\ -x + 2y + 2].$$

+ Rozhodněte, zda je tato transformace projektivní/afinní/ekviafinní/podobná/shodná.
+ Určete samodružné body, resp. směry a rozhodněte, zda je tato transformace základní.

5. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad…

+ … čtyřúhelníku $KLMN$, jehož těžiště leží uvnitř trojúhelníku KLM.
+ … dvou podprostorů s netriviálním průnikem a odchylkou 45°.
+ … středového promítání mezi dvěma podprostory, které je afinní.

6. Dokažte, že…

+ … vlastnost v úloze **3** platí obecně.
+ … každé podobné zobrazení je prosté (injektivní).