MA2BP_PGE, 23. ledna 2017

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích příslušného eukleidovského prostoru.

Každý úkol (+) je hodnocen 6 body; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 39 bodů.

---

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [1, -4, -5], \quad B = [-5, 4, -5], \quad C = [-5, 4, 5], \quad D = [1, -4, 5], \quad E = [6, 6, 0].$$

\+ Dokažte, že body A, B, C, D leží v jedné rovině a že žádná trojice těchto bodů neleží na přímce.
\+ Určete vzdálenost bodu E od roviny $ABCD$.
\+ Určete souřadnice bodu F, který je souměrný s bodem E podle roviny $ABCD$.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid x_1 - 2x_4 = 3\},$$
$$\mathcal{C} = \{[1, 2, 0, -1] + t(1, 0, -1, 0) + s(0, 1, 1, -1) + r(0, 1, 1, 0) \mid t, r, s \in \mathbb{R}\}.$$

\+ Určete vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
\+ Určete odchylku podprostorů $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

3. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 0, -1, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 2, 1).$$

\+ Určete vektorový součin $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$ a ukažte, že tento vektor je kolmý k $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}_3$.

4. Transformace v rovině je dána předpisem

$$[x, y] \mapsto [y + 4, \ -x].$$

\+ Dokažte, že tato transformace je shodná a určete všechny její samodružné body a směry.
\+ Určete druh a určující prvky této transformace.

5. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad…

\+ … nepravidelného mnohostěnu s objemem 5.
\+ … dvou podprostorů, které jsou mimoběžné a současně kolmé.
\+ … podobného zobrazení s přímkou samodružných bodů.

6. Dokažte, že…

\+ … vektorový součin je nulový právě tehdy, když určující vektory jsou lineárně závislé.
\+ … nadrovina v afinním prostoru nemůže být mimoběžná s žádným podprostorem.