MA2BP_PGE, 1. února 2017

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích příslušného eukleidovského prostoru.

Každý úkol (+) je hodnocen 6 body; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 39 bodů.

---

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [-1,-1,8], \quad B = [9,-1,8], \quad C = [9,5,0], \quad D = [-1,5,0], \quad E = [4,-6,-2].$$

\+ Dokažte, že $ABCDE$ je pravidelný čtyřboký jehlan.
\+ Určete odchylku některé hrany jehlanu procházející vrcholem od jeho podstavy.
\+ Určete souřadnice bodu F, který je souměrný s bodem E podle roviny $ABCD$.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{[-1,1,-4,1] + t(1,1,2,0) \mid t \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{C} = \{[x_1,x_2,x_3,x_4] \mid x_1 - x_2 - 2x_4 = -10,\ 2x_1 - x_3 = 5,\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 22\}.$$

\+ Určete vzdálenost $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
\+ Určete vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

3. Ve dvourozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{u} = (2,-1), \quad \mathbf{v} = (1,3).$$

\+ Určete vnější součin $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$, odchylku $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})$ a ukažte, že platí

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}] = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin\alpha.$$

4. Projektivní transformace v rovině je dána obrazy bodů

$$[1,0] \mapsto [0,1], \quad [0,1] \mapsto [-3,4], \quad [0,-1] \mapsto [-1,0], \quad [-1,0] \mapsto [-4,3].$$

\+ Dokažte, že tato transformace je afinní, a určete obraz obecného bodu $[x_1,x_2]$.
\+ Určete samodružné body, resp. směry a rozhodněte, zda je tato transformace základní.

5. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad...

\+ ... nepravidelného mnohoúhelníku, jehož těžiště splývá s počátkem souřadné soustavy.
\+ ... dvou mimoběžných podprostorů, které mají společný směr.
\+ ... středového promítání mezi dvěma podprostory, které je podobné.

6. Dokažte, že...

\+ ... vlastnost v úloze **3** platí obecně.
\+ ... pokud má afinní transformace nějaké vlastní samodružné body, potom všechny tyto body tvoří afinní podprostor.