Je dán bod B a (nad-)rovina $\mathcal{C}$ v eukleidovském prostoru:

$$B = [-1, 5, 7],$$
$$\mathcal{C} = \left\{ [1, 2, 3] + r(1, 1, -1) + s(2, 1, 0) \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\} \quad = \{ x_1 - 2x_2 - x_3 = -6 \}.$$

Kolmý doplněk k $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ je

$$\overrightarrow{\mathcal{C}}^{\perp} = \{ x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ 2x_1 + x_2 = 0 \} \quad = \left\{ t(1, -2, -1) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Označíme body a vektory tak, že

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \left\{ \underline{D + r\mathbf{u} + s\mathbf{v}} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\} &&= \left\{ \overrightarrow{DX} \,.\, \mathbf{n} = 0 \right\}, \\ \overrightarrow{\mathcal{C}}^{\perp} &= \{ \mathbf{x} \,.\, \mathbf{u} = 0,\ \mathbf{x} \,.\, \mathbf{v} = 0 \} &&= \left\{ \underline{t\mathbf{n}} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Hodláme určit vzdálenost $v(B, \mathcal{C})$, a to pomocí charakterizace:

$$|BC| = \min \iff \overrightarrow{BC} \perp \mathcal{C}. \tag{2}$$

A. pata kolmice, vzdálenost

Pro $C \in \mathcal{C}$ platí (2), právě když

$$\overrightarrow{BC}\,.\,\mathbf{u} = 0 \text{ a } \overrightarrow{BC}\,.\,\mathbf{v} = 0,$$

což po rozepsání ($C = D + r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$) vede k soustavě lineárních rovnic

$$r\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u} + s\mathbf{v}\,.\,\mathbf{u} = \overrightarrow{DB}\,.\,\mathbf{u},$$
$$r\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} + s\mathbf{v}\,.\,\mathbf{v} = \overrightarrow{DB}\,.\,\mathbf{v}.$$

Dosazením vektorů ze zadání dostáváme

$$3r + 3s = -3,$$
$$3r + 5s = -1.$$

Tato soustava má jednoznačné řešení $r = -2$ a $s = 1$, tedy

$$C = D - 2\mathbf{u} + \mathbf{v} = [1, 1, 5] \quad \text{a} \quad \overrightarrow{BC} = (2, 4, -2) = 2\mathbf{n}.$$

Vzdálenost je

$$v(B, \mathcal{C}) = |BC| = 2||\mathbf{n}|| = 2\sqrt{6}.$$

B. kolmice, pata kolmice, ...

Kolmice k $\mathcal{C}$ procházející bodem B je

$$\mathcal{K} = B + \overrightarrow{\mathcal{C}}^{\perp} = \left\{ B + t\mathbf{n} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pata kolmice $C = \mathcal{K} \cap \mathcal{C}$ odpovídá řešení rovnice

$$(-1 + t) - 2(5 - 2t) - (7 - t) = -6. \tag{3}$$

Tato rovnice má jednoznačné řešení $t = 2$, tedy

$$C = B + 2\mathbf{n} = [1, 1, 5].$$

Vzdálenost je

$$v(B, \mathcal{C}) = |BC| = 2\|\mathbf{n}\| = 2\sqrt{6}.$$

C. zkratka

Rovnici (3) lze podle (1) obecně zapsat takto:

$$(\overrightarrow{DB} + t\mathbf{n}) \,.\, \mathbf{n} = \overrightarrow{DB} \,.\, \mathbf{n} + t\mathbf{n} \,.\, \mathbf{n} = 0.$$

Tato rovnice má jednoznačné řešení

$$t = \frac{\overrightarrow{BD} \,.\, \mathbf{n}}{\mathbf{n} \,.\, \mathbf{n}} = \frac{12}{6} = 2,$$

tedy

$$\overrightarrow{BC} = \frac{\overrightarrow{BD} \,.\, \mathbf{n}}{\mathbf{n} \,.\, \mathbf{n}}\mathbf{n} = 2\mathbf{n}.$$

Vzdálenost je

$$v(B, C) = |BC| = \frac{|\overrightarrow{BD} \,.\, \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = 2\sqrt{6}.$$

V duchu (1) můžeme poslední výpočet vyjádřit také takto:

$$v(B, C) = \frac{|-1 - 2 \cdot 5 - 7 + 6|}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$$