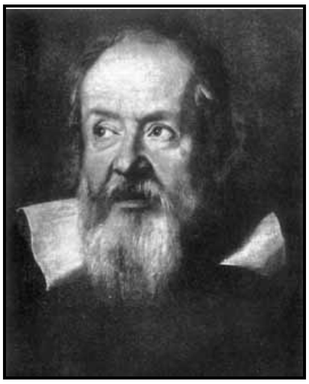
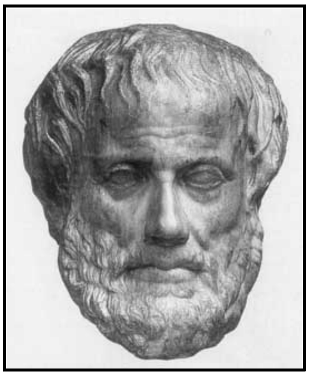
Was ist mathematische Bildung? - Warum wird Mathematik von vielen Menschen als schwer empfunden? - Wieso ist das gesellschaftliche Urteil über das Fach Mathematik oft negativ, obwohl unser gesellschaftliches Umfeld sehr stark von der Mathematik geprägt wird? - Warum gilt Mathematik dennoch unbestritten als Kernfach der Ausbildung und Erziehung, und das sicher in allen Ländern und bei allen Völkern seit mehreren tausend Jahren? - Ist die gegenwärtige didaktische Ausprägung und methodische Umsetzung der Bedeutung und den Zielen von Mathematikunterricht angemessen?



"*Mathematik ist die Sprache, mit der Gott die Welt erfunden hat*".

So liest man es bei Galilei (15.02.1564 - 08.01.1642), und möglicherweise geht dieser Satz schon auf Aristoteles (384 - 322 v.Chr.) zurück, den man als Lehrer von Alexander dem Großen mit einer gewissen Berechtigung als ersten "Schulmeister" des Abendlandes bezeichnen kann.
Und mathematische Probleme gehörten mit Sicherheit zum Unterrichtsstoff.



Wir leben also in einer langen Tradition geisteswissenschaftlicher Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen und die Mathematik hat stets einen wesentlichen Beitrag zur Erziehung und Bildung geleistet: Sie erzieht u.a. zur Selbständigkeit, sie befähigt zu rationaler Analyse und strategischer Lösung von Problemen, sowie zu begründender Argumentation.
Mathematik ist also ein Bildungswert an sich, ein Medium zur Erziehung, und damit bei weitem mehr als eine anwendbare Rechentechnik zur Beschreibung naturwissenschaftlicher Sachverhalte oder vorfachliche Ausbildung zukünftiger Ingenieure. Da mathematische Bildung zu strategisch-analytischem Denken, zur Entwicklung von Lösungswegen, zu sprachlicher Präzision befähigt, leistet dieses Fach in Schule und Ausbildung etwas, was in nahezu alle Lebensbereiche einwirkt. Mathematische Bildung ist wichtig und nützlich!

Aber kommt die kulturgeschichtliche Komponente in Unterricht und Ausbildung hinreichend zum Tragen? - Erleben Schülerinnen und Schüler, auch Studierende an der Universität, dieses Fach in der geschichtlichen Entwicklung? - In der Regel wohl gegenwärtig nicht.

Würde umgekehrt jedoch ein mehr an historischen Bezügen auch zu einem mehr an Verstehen und damit zu einem Abbau von negativen, nur durch unverstandenen Nachvollzug geprägte Erfahrungen führen? Läßt sich durch einen geschichtlichen Zugang die Gefahr von Versagenssituationen verringern bei gleichzeitiger Vergrößerung des Anteils selbständiger Schülerarbeit in sozialem Miteinander? - Ich meine: Unbedingt! - Und darum soll es im folgenden gehen.

Nichts ist motivierender als Erfolg, und Selbstvertrauen und Selbstwertgefühl entwickelt sich am besten über eigenständiges Leistungsvermögen. Hier kann man viel aus der Geschichte lernen und versteht, dass man mit seinen Bemühungen nicht allein ist.

Thesen zu historischen Aspekten im Mathematikunterricht

- *Durch geschichtliche Bezüge wird Mathematik als alte Kulturtechnik erlebbar, die über ein Gefühl der Kontinuität eine positive Einstellung zu mathematischen Sachverhalten erzeugt.*

- *Besonders aus historischer Sicht werden mathematische Strukturen, Ansätze zur Lösung mathematischer Probleme, sowie die fundamentalen Ideen und Strategien im Erkenntnisprozess sichtbar.*

- *Über interessante Persönlichkeiten, in Verbindung mit historischem Material, kann Identifikation mit Problemstellungen und ein hohes Maß an Motivation erzeugt werden.*

- *Über die Diskrepanz zwischen historischen und moderneren Entwicklungen und Methoden kann eine klarere Einsicht in Begründungszusammenhänge und Strukturen erreicht werden.*

Akzeptiert man die Richtigkeit der obigen Thesen, so wird deutlich, welche emotional-lernpsychologische Komponente dem Aufzeigen der historischen Entwicklung mathematischer Problemstellungen innewohnt, welche die strategische Handlungskompetenz fördert und verbreitert. Darüber hinaus wird über das Verstehen tradierter Lösungsansätze von Problemen eine positive Sicht auf die Mathematik als Ganzes erzeugt, Selbstvertrauen befördert und negativen Einstellungen vorgebeugt.

Dass dennoch die gegenwärtige Situation der Ausbildung in Schule und Universität weitgehend auf diesen wichtigen Zugang zu mathematischem Verständnis verzichtet liegt wohl hauptsächlich an mangelnder Kompetenz der Lehrenden, womit leider auch wichtige methodische Ansätze und Unterrichtsverfahren, die z.B. mit “Entdeckendem Lernen” und “Problemlösen” etc. beschrieben werden können, erschwert werden. Denn Entdecken von Gesetzen und Regeln, das

experimentelle Arbeiten an mathematischen Sachverhalten das Selbständigkeit fördert, dieses gelingt besonders gut im historischen Bezug.
Es ist also zu fordern, dass diesem Aspekt bei der Ausbildung von Lehrkräften, dem Vorlesungsangebot der Universität, mehr Beachtung geschenkt wird.

Nachdem das ***“Warum”*** beleuchtet worden ist stellt sich nun die Frage: ***Wie*** bettet man Mathematikgeschichte unterrichtlich ein? - Was sind geeignete Themen, wie setzt man ein Thema methodisch in eine unterrichtliche Struktur um?

Methodische Ansätze zur Einbringung historischer Aspekte in den Mathematikunterricht

1. *Präzisierung historisch ungenügend formulierter mathematischer Sachverhalte schärft das begriffliche Repertoire und stärkt die individuelle mathematische Handlungskompetenz.*

2. *Tätiges Nacherfinden (Comenius / Freudenthal) gestattet fundamentale Lösungswege zu entdecken, und darüber hinaus wird i.A. ein großer allgemeinbildender Beitrag geleistet.*

3. *Einbettung in einen kulturhistorischen Gesamtzusammenhang ermöglicht fächerübergreifende Sicht und Verständnis für Entwicklungen aus gesellschaftlichem Kontext.*

4. *Strukturelle Neugier wird erzeugt durch historische Rechenschemata, Graphiken und Modelle.*

5. *Identifikation mit großen Persönlichkeiten vermittelt Selbstvertrauen, Mut und Geduld für eigene Bemühungen und Lösungsansätze im mathematischen Bereich.*

6. *Zentrale Ideen und Strategien der Mathematik treten in historischem Zusammenhang besonders klar zu Tage.*

7. *Mathematik hat im Laufe der Jahrtausende Umwelt und Gesellschaft in vielfältiger Weise geprägt und beeinflusst, und hat wesentlich zu allgemeiner Bildung beigetragen.*

Eine Fülle von Möglichkeiten, Unterricht unter historischem Blickwinkel so zu gestalten, dass Mathematik nicht als fertiges, “lernbares” Produkt präsentiert wird, das Schüler in die Situation intellektueller Wiederkäuer versetzt, sondern als ein Prozess verstanden wird, der kreativ in die wunderbare Vielfalt der Ideen, Strategien, Lösungen und Irrtümer einführt. Dabei wird auch die

Urteilsfähigkeit geschärft, die in Zusammenhang mit (mathematischer) Vernunft, Widerspruchsfreiheit, der Präzision von Begriffen und Sprache zu sehen ist.
Es sei noch einmal ausdrücklich betont, dass die Unterrichtsgestaltung den Freiraum des Scheiterns von Lösungsansätzen bieten sollte, denn Versuch und Irrtum sind wichtige Vorstufen der Erkenntnis und der Fähigkeit, mit Selbstwertgefühl an der Lösung von Problemen zu arbeiten. Ich bin der Überzeugung, dass ein großer Mangel unseres gegenwärtigen Mathematikunterrichtes in der vorwiegend erklärenden Rolle der Lehrenden liegt, die Regeln und Formeln vermitteln und das kreative Potential der Lernenden ungenutzt verkümmern lassen.

Immanuel Kant (22.04.1724 - 12.02.1804; Königsberg):

“Jemandes Gedanken nachahmen heißt nicht philosophieren, sondern man muß **selber denken** und zwar a priori.”

Historische Aspekte im Mathematikunterricht sind somit ein wichtiges Stilmittel, um Unterricht offener und schülernäher zu gestalten. Sie bieten den Schülern die Möglichkeit, Rollen zu übernehmen, zentrale Fragestellungen und Probleme früherer Epochen zu erfassen, Grundlagen und Herkunft von Begriffen und Verfahren zu verstehen, ein mathematisches Feld zu erforschen, und nicht zuletzt in fachübergreifender Sicht Mathematik als zentrales Element unserer Kultur zu begreifen. - Damit sind sie ein zentraler Punkt von Allgemeinbildung und damit eine besondere Aufgabe in einem allgemeinbildenden Schulwesen.

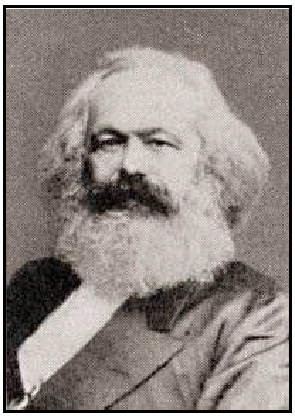
Da man die methodische Umsetzung der Gedanken in Mathematikunterricht am besten am konkreten Beispiel erfährt, werden im folgenden nun zu den 7 oben genannten methodischen Ansätzen konkrete Unterrichtssituationen beschrieben.[1] Ich hoffe, dass damit auch die Vielfalt und das hohe Maß an eigenständiger Schülerarbeit durch die Einbettung von Themen in einen

[1] Das beschriebene Material ist unter der Adresse: http://www.madincea.privat.t-online.de im Internet zu finden. Alle Dateien sind im pdf-Format vorhanden und können z.B. mit dem kostenlos erhältlichen Acrobat-Reader gelesen und ausgedruckt werden.

historischen Zusammenhang deutlich wird. Zur Einordnung der Beispiele wird die jeweilige Klassenstufe angegeben und eine Skizze der Unterrichtsvoraussetzungen und der Unterrichtsziele benannt.

1. *Unterrichtsbeispiele zur Präzisierung mathematischer Sachverhalte:*

1. *Karl Marx: Über den Begriff der abgeleiteten Funktion*
   (Klassenstufe 11) Nach Studium des historischen Textes sollen die Schüler unklare Begriffsbildungen benennen und Verständnislücken analysieren: Karl Marx verfügt über keinen vernünftigen Grenzwertbegriff, kann nicht verständig mit dem Quotientengrenzwertsatz für Zahlenfolgen argumentieren, und scheitert demnach argumentativ an dem bekannten Problem “0:0". Die Schüler ermitteln danach die Terme der entsprechenden Ableitungen auf der Basis ihrer Kenntnisse über Differenzenquotientenfolgen mathematisch korrekt.



2. *Cassinische Kurven*
   (Klassenstufe 11) Die historische Kontroverse zwischen Johannes Kepler und Jean Dominique Cassini über die Art der Planetenbahnen, Ellipsen oder Cassinische Kurven, wird von den Schülern mathematisch beleuchtet: Gegeben sind 2 feste Punkte F_1 und F_2. Entweder sind alle Punkte P gesucht, deren Abstandssumme zu F_1 und F_2 stets konstant ist (Kepler) oder deren Abstandsprodukt (Cassini). Über die Entwicklung zugehöriger Kurvengleichungen, Erzeugung der Graphen (Einsatz eines Funktionsplotters) können die Schüler gezielt Stellung beziehen und entscheiden.

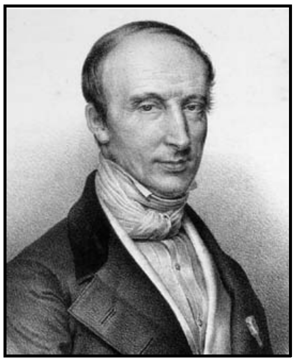
2. *Unterrichtsbeispiele zum tätigen Nacherfinden:*

1. *Satz von Menelaos / Satz von Ceva*
   (Klassenstufe 9) Die Arbeitsanweisungen sind methodisch bewusst offen formuliert,

der Satz von Ceva sogar “verloren gegangen”, so dass die Schüler Sachverhalte selbständig finden und formulieren müssen. Voraussetzungen: Strahlensätze.

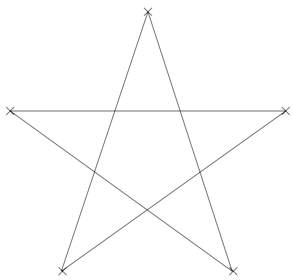
2. *Ähnliche Dreiecke II (Viereckssatz des Klaudios Ptolemaios)*
   (Klassenstufe 9) Ein historisch wichtiger Satz, auch für nachfolgenden Unterricht wird selbständig experimentell wiederentdeckt und bewiesen. Voraussetzungen: Sehnenviereck eines Kreises; Ähnlichkeitssätze für Dreiecke.

3. *Der Flächeninhalt eines Sehnenvierecks*
   (Klassenstufe 10) Der wunderschöne Viereckssatz von Brahmagupta erweitert und vertieft die Kenntnisse über die Heronsche Dreiecksformel und führt mit seinen Folgerungen bis zu einer Variante des Satzes von Varignon. Darüber hinaus werden bei der Herleitung sinnvoll trigonometrische Beziehungen verwendet und damit lernpsychologisch gefestigt.

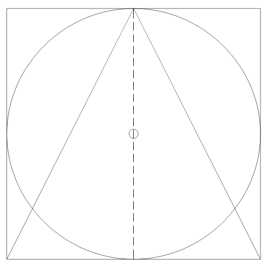


4. *Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel*
   (Klassenstufe 11) Der besondere Induktionsgedanke von Cauchy kann und soll nur mit großer Verblüffung und Vergnügen nachvollzogen werden.

3. *Unterrichtsbeispiele zur Einbettung in kulturhistorische Zusammenhänge:*



1. *Das Pentagramm*
   (Klassenstufe 9) Der Goldene Schnitt, die Inkommensurabilität von Streckenlängen, sowie das Erleben eines infinitesimalen Prozesses werden über dieses Thema vermittelt. Voraussetzungen: Harmonische Punkte; Satzgruppe des Pythagoras; Lösen quadratischer Gleichungen.



2 *Der Grabstein des Archimedes*
   (Klassenstufe 10) Der archimedische Weg zur Bestimmung eines Kugelvolumens bereitet mit den “Indivisiblen” Grundgedanken der Integralrechnung vor. Voraussetzungen: Satzgruppe des Pythagoras; Hebelgesetze.

3. *Von Sehnen und Sehnenlängen*
   (Klassenstufe 10) Über die Konstruierbarkeit der Sehne eines regelmäßigen n-Ecks bis zur Sehnentafel des Klaudios Ptolemaios werden mathematische Probleme angesprochen, die kulturhistorisch lange erörtert wurden und hier u.a. ein wichtiges Übungsfeld darstellen.

4. *Kreiszahl π (Archimedes / Cusanus)*
   (Klassenstufe 9) Die Kreiszahl ist ein zentrales mathematisches Problem der Menschheit und in der historisch geprägten Erörterung wird u.a. ein Gefühl für Approximationsverfahren, Grenzwerte etc. geschärft.

4. Unterrichtsbeispiele zur Erzeugung struktureller Neugier:

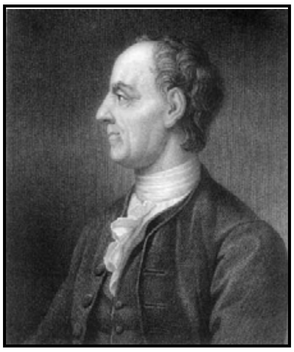
1. *Komplexe Zahlen*
   (Klassenstufe 11) Wie rechnet man mit Punkten einer Ebene? - Welche Verknüpfungsdefinition ist vernünftig? - Was ist überhaupt mathematische Vernunft? Bei der Entwicklung der Multiplikation werden alle Gruppenaxiome benötigt und verwandt.

2. *Geometrie und Koordinatensystem*
   (Klassenstufe 8) Descartes Idee, geometrischen Objekten Maßzahlen zuzuordnen, führt bei der Bestimmung von Flächeninhalten von Dreiecken zu eleganten algebraischen Termen. Ausblick auf Determinanten.

3. *Pascalsches Dreieck*
   (Klassenstufe 8) Durch strukturelle Neugier werden das Rechnen mit Binomialkoeffizienten, kombinatorische Zählprinzipien, sowie die Entwicklung eines Binoms: $(a+b)^n$ im konkreten Fall entwickelt.

5. Unterrichtsbeispiele zur Identifikation mit großen Persönlichkeiten:

1. *Grundkonstruktionen und Linien im Dreieck: Auf den Spuren von Leonhard Euler*
   (Klassenstufe 7) Die Vorgabe der Schnittpunkte der Seitenhalbierenden, Höhen,



Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden eines Dreiecks, ohne Konstruktion und Hilfslinien, führt zur Entdeckung des Satzes über die Eulersche Gerade, der jedoch an dieser Stelle nicht bewiesen wird. Zusätzlich: Übung der Grundkonstruktionen, Schulung fachsprachlicher Schreibweisen und argumentativer Satzformulierung.

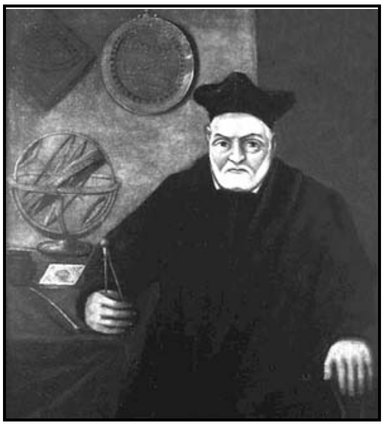
2. *Ähnlichkeit und Projektive Geometrie*
   (Klassenstufe 9) Satz von Pappus-Pascal, Satz von Brianchon, Satz von Desargues: Berühmte Sätze der Projektiven Geometrie, die entweder nur konstruktiv erschlossen werden, oder mit Hilfe des Satzes des Menelaos auch bewiesen werden können. Arbeitsblatt wohl eher geeignet für Arbeitsgemeinschaften oder Neigungsgruppen.

3. *Spielerei mit Dreiecksspiegelungen: Was hat Napoleon mit Dreiecken zu tun?*
   (Klassenstufe 10) Das Thema: Napoleondreiecke ist interessant und anspruchsvoll für diese Altersstufe. Voraussetzungen: Kosinussatz bzw allgemein: Trigonometrie.

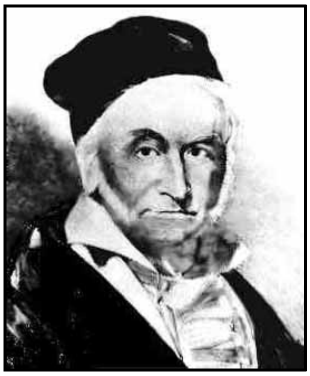
6. Unterrichtsbeispiele zu zentralen Ideen und Strategien:

1. *Heron von Alexandria*
   (Klassenstufe 9) Interpretiert man die Bestimmung von Wurzeln als Schnittpunktsproblematik von Hyperbeln mit der Identität, so wird über das Verfahren von Heron ein Ausblick auf Kontrahierende Abbildungen (sogar schon mit einer ersten Erfahrung des Problems der Steigung einer Iterationsfunktion - Lipschitzbedingung) gegeben.

2. *Kreis - Sehne - Sinus*
   (Klassenstufe 10) Der Zusammenhang zwischen Umfangswinkel und Sehne am Kreis führt auf elegante Weise zum Sinussatz, und über den Viereckssatz des Ptolemaios zu den Additionstheoremen der Sinusfunktion. Sehr elegant und für Schüler erfahrungsgemäß ein Erlebnis.



3. *Rotationsvolumina: Auf den Spuren von Pappus und Guldin*
   (Klassenstufe 12) Die Guldinschen Regeln sind ein Standardunterrichtsthema bei mir im Leistungskurs, gestatten sie doch auf vielfältige Weise Integrationsübungen durchzuführen und die zentrale Idee der Schwerpunktbestimmung (eines Körpers) zeigt Verbindungen zur Physik auf.



4. *Normierung von Binomialverteilungen: Die Gaußsche Dichtefunktion*
   (Klassenstufe 13) Die Approximation eines diskreten Sachverhaltes durch eine stetige Funktion, mit den resultierenden Konsequenzen, ist eine zentrale mathematische Strategie, hier exemplarisch durchgeführt an dem Problem der Approximation von Binomialverteilungen. Bei der Bestimmung des Wertes eines Oberflächenintegrals, mit dem Übergang zu Polarkoordinaten, wird im Lehrervortrag ein Ausblick auf Integrationsmethoden gegeben, die der universitären Ausbildung vorbehalten sind.

7. Unterrichtsbeispiele zur Allgemeinbildung:

1. *Polyeder: Platonische Körper*
   (Ab Klassenstufe 8) Die Entdeckung des Eulerschen Polyedersatzes, sowie die kulturgeschichtliche Einbindung der 5 Platonischen Körper mit ihrer Zuordnung zu: Feuer Wasser, Erde, Luft und Universum, ist ein wichtiges Stück Allgemeinbildung. Möchte man auch die Konstruierbarkeit bzw Existenz thematisieren, benötigt man z.B. die 5-Eckskonstruktion der 9. Klassenstufe.

2. *Das Bogenmaß*
   (Klassenstufe 10) Das Zahlsystem der Babylonier ist wichtige Grundlage von Maßen in unserem Alltag: Uhrzeit, Winkelgrößen, etc. Hier ist Gelegenheit, “über den Tellerrand” zu sehen.

<u>Fazit:</u> Historische Aspekte im Mathematikunterricht gestatten nicht nur ein vertiefendes Verständnis für mathematische und kulturgeschichtliche Fragestellungen, sondern sind ein wichtiger Beitrag zum Entdeckenden Lernen und sie gestatten viel selbständige Tätigkeit von Schülern. Lassen wir also unsere Schüler Mathematik erleben und erforschen!