Kapitola II.

Vznik a vývoj infinitezimálního počtu (16. – 18. století)

1. Období přechodu od starověku k renesanci

Roku 476 n. l. se rozpadla římská říše. Na jejím území vznikly nové feudální státy, jejichž hospodářství však bylo na velmi nízké úrovni. Především západní část bývalé římské říše (Evropa) byla velmi zaostalá. Její zemědělství bylo extenzívní, neopíralo se o důmyslné systémy Východu (zavodňování, ...) ani o jejich zkušenosti a znalosti. Západ vystačil s minimem astronomie a trochou praktické aritmetiky pro obchod a zeměměřičství.

Úpadku kultury v mnohém napomáhalo ulpívání na nevědeckých dogmatech křesťanské církve, která se zpočátku snažila úplně vymýtit „pohanskou" řeckou a římskou kulturu. I přesto zůstaly po mnoho staletí křesťanské kláštery jedinými místy, kde se alespoň částečně udržovala vzdělanost. Úroveň klášterní matematiky však byla velmi nízká a sloužila hlavně k sestavování kalendáře a výpočtu dat církevních svátků. Téměř tisíc let zůstávaly největší autoritou matematické spisy, které sepsal filozof A. M. T. S. Boetius (asi 480 – 524), a to i přesto, že jsou z vědeckého hlediska poměrně chudé.

Situace se začala měnit až v 11. a 12. století, kdy došlo k všeobecnému rozvoji výroby, obchodu, k rozkvětu měst a posílení úlohy měšťanů, což vytvářelo základ pro celkový rozvoj kultury a vědy. Obnovení obchodního styku s Východem vedlo k dovozu a rozšíření řecké literatury. Současně s rozšiřováním obchodu se začaly navazovat i vědecké styky s arabskou kulturou a to především přes Španělsko a Sicílii. A tak se pomalu Evropanům začalo otevírat bohatství arabské a antické vědy a kultury.

Ve 12. a 13. století bylo přeloženo z arabštiny do latiny obrovské množství vědeckých prací. Vznikla tak skutečně rozsáhlá vědecká a filozofická literatura psaná latinsky. Překládána byla jak původní arabská díla, tak řecká literatura existující v arabštině. Přeložená díla Eukleida, Archiméda, Apollónia, Ptolemaia a dalších se brzy stala základem pro rozvoj evropské matematiky.

Důležitou úlohu v rozvoji matematiky sehrály univerzity. Nejstarší evropská univerzita byla založena v Salernu v první polovině 11. století. Po ní následovaly univerzity v Bologni (1119), Paříži (1160), Oxfordu (1167), Cambridge (1209) a další.

Ve 12. a 13. století zaujala v Evropě v rozvoji řemesel, obchodu a peněžnictví první místo italská města Janov, Pisa, Benátky, Milán a Florencie. Obchodníci z těchto měst podnikali, podobně jako Marco Polo, daleké cesty, při nichž se snažili poznat umění a vědu jiných národů. Jedním z obchodníků, který se zapsal do dějin matematiky, byl **Leonardo Pisánský**, zvaný Fibonacci (asi 1170 – 1250). Aritmetické a algebraické znalosti, které nashromáždil na svých cestách, shrnul do knihy *Liber Abaci* (*Kniha o abaku*), geometrické znalosti do knihy *Practica Geometriae*.

S rozšiřováním obchodu se šířila i do severnějších měst potřeba matematiky. Zájem o ni byl především praktický, a proto po několik staletí učili aritmetiku a algebru mimo tehdy vznikající univerzity řemeslní počtáři. Teoretickou matematiku pěstovali pouze scholastičtí filozofové a matematici. Ti spekulovali např. o podstatě pohybu, o kontinuu a o nekonečnosti (např. Tomáš Akvinský) a jejich úvahy ovlivnily v 17. století objevitele infinitezimálního počtu a v 19. století filozofy zabývající se nekonečnem.

V druhé polovině 15. století začíná období renesance. Hlavními středisky kultury a vědy nadále zůstávají italská města. V této době dochází hlavně k rozvoji trigonometrie a algebry. Rozšíření matematiky (a obecněji vědy i kultury) velmi ovlivnil vynález knihtisku, který zpřístupnil literaturu širší vrstvě obyvatelstva. Také bouřlivý rozvoj architektury a rozkvět výtvarného umění pomohl rozvoji a šíření matematiky. Jedním z malířů, jenž byl zároveň matematikem, byl **Leonardo da Vinci** (1452 – 1519). Zachovaly se nám jeho poznámkové sešity, které obsahují matematické a filozofické úvahy. Je například pozoruhodné, že při zkoumání těžišť obrazců a těles a také při určování obsahu elipsy Leonardo používal Archimédovu metodu, kterou matematikové při řešení podobných úloh začali užívat až v 17. století.

Počátkem 16. století evropská matematika překračuje rámec znalostí, které tvořilo dědictví antického Řecka a orientálních národů. Postupně převládá poziční desetinná aritmetika, rozvíjí se trigonometrie, v algebře se krok za krokem vytváří vyhovující symbolika, začínají se studovat Apolloniovy kuželosečky a Archimédovy kvadratury a kubatury. Dlouhé období matematiky konstantních veličin se blížilo ke svému konci; začínalo období matematiky proměnných veličin, symbolické algebry, analytické geometrie a diferenciálního a integrálního počtu.

16. století bylo renesancí kultury a vědy, tedy i matematiky. Studium a porozumění základním dílům starého Řecka, zejména Archiméda, brzy dosáhlo takové úrovně, že byl možný rozvoj nových, jednodušších metod výpočtů obsahů a objemů. Avšak na rozdíl od Archiméda, jehož důkazy byly naprosto přesné, renesanční matematikové se více zajímali o rychlý výsledek, než o přesný důkaz.

Mezi těmi, kdo studovali Archiméda, vynikli Simon Stevin, který psal o těžištích, a Luca Valerio – autor prací o těžištích a kvadratuře paraboly. Bezprostředně po těchto prvních průkopnících vznikly významné práce Keplera, Cavalieriho a Torricelliho, v nichž byly rozvinuty metody, které vedly později k objevu infinitezimálního počtu.

K novému rozvoji matematiky přispěla i revoluce v astronomii, kterou představují Mikuláš Koperník (1473 – 1543), Tycho Brahe (1546 – 1601) a Johann Kepler. Přístrojové vybavení se zlepšilo, byla k dispozici přesnější pozorování a ta bylo třeba interpretovat, tj. mimo jiné i matematicky zpracovat.

Tehdejší horlivá aktivita matematiků vedla ke vzniku diskusních kroužků a k jejich rozsáhlé a soustavné korespondenci. Z těchto skupin učenců postupně vyrůstaly akademie. Vznikaly v určitém ohledu jako opozice k univerzitám, které se většinou vyvinuly již v období scholastiky a byly z hlediska schopnosti řešit aktuální problémy příliš strnulé. Nové akademie, jichž bylo v tomto období vytvořeno přes pět set, naopak ztělesňovaly nového ducha bádání.

2. Kepler a Cavalieri a jejich výpočty obsahů a objemů

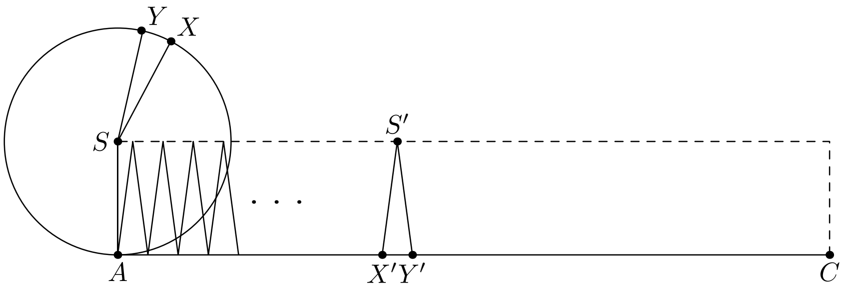
J. Kepler

V díle **Johanna Keplera** (1571 – 1630) je zvlášť zřetelný podnětný vliv nové astronomie, která vyžadovala jak obsáhlé počtářské práce, tak i infinitezimální úvahy. Ve svém díle *Nová stereometrie vinných sudů* (1615) počítal objemy těles, které vznikly rotací částí kuželoseček kolem osy ležící v jejich rovině.

Podle legendy byla roku 1612 v Linci v Horním Rakousku, kde tehdy Kepler pobýval, mimořádně dobrá úroda vína. Víno se prodávalo téměř všude. Na jednom takovém trhu byl Kepler velice udiven, když prodavač, aby zjistil objem sudu, prostě strčil do otvoru po zátce měřící proutek a ze vzdálenosti tohoto otvoru od protější stěny vypočítal objem sudu. Tři dny hloubal Kepler nad problémem objemu vinných sudů, které pojal jako rotační tělesa, a úlohu rozřešil. Doufal, že vynalezne tvar sudu, který by při stejném povrchu měl větší objem, než sudy skutečně užívané. Přesvědčil se však, že rakouské sudy mají téměř ideálně účelný tvar, což ho přivedlo k výroku: *Kdo může popřít, že lidská přirozenost sama, beze všeho hloubavého rozumového uvažování, učí základním pravdám geometrie?*

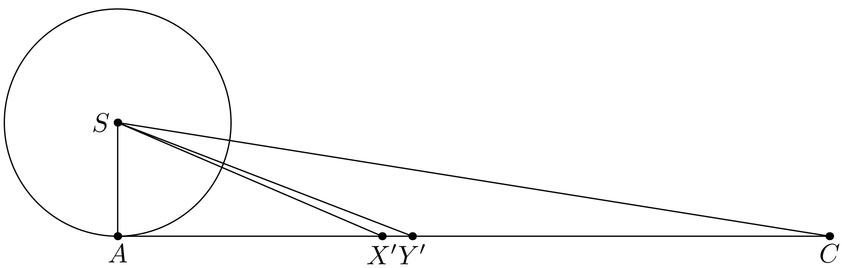
Kepler při svých výpočtech postupoval metodou rozdělení tělesa na nekonečně mnoho nekonečně malých „kusů“, jejichž objem lze jednoduše výpočtem určit. Použil tedy úvahu, které se říká infinitezimální. Např. při určování objemu koule při známém povrchu rozdělil kouli na nekonečně mnoho jehlanů s vrcholy ve středu koule a základnou na povrchu koule a výškou rovnou poloměru koule. Sečetl objemy těchto jehlanů a dostal $V = \frac{1}{3}Ar$, kde $A = 4\pi r^2$ je povrch koule. Odtud získal objem koule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Ještě známější je jeho určování obsahu kruhu. Každou z (nekonečně malých) částí ohraničující kružnice považuje za základnu rovnoramenného trojúhelníka s vrcholem ve středu kruhu. Obsah kruhu je pak roven součtu obsahů všech takových trojúhelníků. Představme si, že kružnice se středem S je rozvinuta do úsečky AC (její délka je rovna délce obvodu O kruhu) tak, že poloměr SA je k ní kolmý. Nekonečně malému XY na kružnici odpovídá dílek $X'Y'$ na úsečce AC. Trojúhelníky XYS, $X'Y'S'$ mají výšku i základnu stejné délky, a tedy mají stejný obsah (Kepler zde považuje délku oblouku XY a délku jemu odpovídající úsečky $X'Y'$ za stejné).



Obr. 3. Keplerův výpočet obsahu kruhu

Tyto trojúhelníky lze zaměnit jinými, se stejnými základnami a výškou, přičemž vrcholy všech trojúhelníků se posunou do středu kružnice S. Takto vzniklé trojúhelníky mají stejné obsahy jako původní trojúhelníky a dohromady vyplňují trojúhelník ACS.



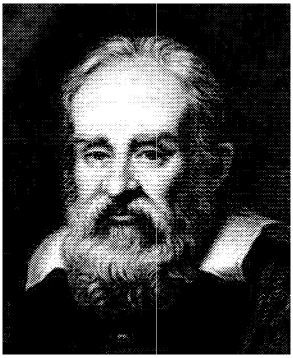
Obr. 4. Keplerův výpočet obsahu kruhu

Obsah kruhu je tedy roven obsahu pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami AC a AS, kde velikost strany AC je rovna velikosti obvodu O kruhu. Odtud plyne

$$S = \frac{1}{2}rO = \frac{1}{2}r \cdot 2\pi r = \pi r^2.$$

Kepler podobných úvah použil k výpočtům objemů velkého množství těles používaných v praxi. Z hlediska důkazových metod se Kepler rozešel s archimédovským požadavkem přesnosti. Prohlásil, že Archimédovy důkazy jsou absolutně přesné, že je však přenechává lidem, kteří si chtějí dopřát přesné důkazy.

Za nepřesnosti tohoto typu bylo Keplerovo dílo ve své době velmi kritizováno. Dnes vidíme, že však znamenalo velký krok ke vzniku moderních integračních metod. Kepler pro řešení praktické úlohy vedl správné úvahy nového typu, chyběla mu však jejich odpovídající matematická formalizace a proto i rigorózní důkazy.



G. Galilei

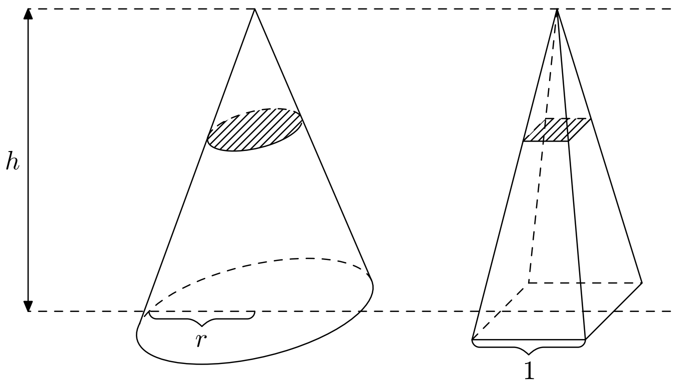
Dalším astronomem zabývajícím se matematikou a fyzikou byl **Galileo Galilei** (1564 – 1642), který sice neuveřejnil žádný systematický výklad svých idejí o infinitezimálním počtu, ale jeho myšlenky rozpracovali a publikovali jeho žáci – Torricelli a Cavalieri. Všichni tři určovali obsahy nebo objemy pomocí součtu tzv. *indivisibilií*. Šlo o nedělitelné části čar (např. úsečky), ze kterých se utvářely plošné útvary, nebo o části ploch (např. kruhy), ze kterých se vytvářela tělesa. Ilustrujme tento postup na díle B. Cavalieriho.

Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) ve svém díle *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635) vyložil jednoduchou formou metodu výpočtu objemu tělesa. Své výsledky shrnul ve formulaci, které dnes říkáme „Cavalieriho princip“: „*Když dvě tělesa mají stejnou výšku a když řezy rovinami, které jsou rovnoběžné s jejich podstavami a mají od nich stejnou vzdálenost, jsou takové, že poměr jejich obsahů je vždy stejný, potom objemy těles mají týž poměr.*“

B. Cavalieri

Když budeme pomocí Cavalieriho principu určovat objem kruhového kužele s poloměrem podstavy r a s výškou h, můžeme jej porovnat s jehlanem o výšce h se čtvercovou podstavou, jejíž strana má délku 1 (viz obr. 5.). Roviny, které jsou rovnoběžné s podstavami obou těles a jsou vedeny ve stejné vzdálenosti od podstav, protínají tato tělesa v kruhu, resp. ve čtverci, jejichž obsahy jsou v konstantním poměru πr^2: 1. Podle Cavalieriho principu tedy platí $\frac{V_k}{V_j} = \pi r^2$, tedy $V_k = \pi r^2 V_j$, kde V_k je objem kužele a V_j objem jehlanu, pro nějž platí $V_j = \frac{1}{3}h$. Odtud plyne, že objem kužele je roven $V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Cavalieriho metoda se liší od Keplerových postupů ve dvou aspektech. Za prvé, Kepler rozkládal těleso dané dimenze na nekonečně mnoho částí téže dimenze, kdežto Cavalieriho vrstvičky mají nižší dimenzi, než vyšetřovaný útvar. Za druhé, Kepler rozkládal dané těleso na infinitezimální části a sečtením jejich obsahů (resp. objemů) obdržel obsah (resp. objem) daného tělesa. Cavalieri potřeboval k výpočtu dvě tělesa a použil metodu porovnávání nekonečně malých částí těles, jakýchsi nedělitelných vrstviček.



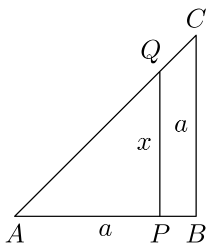
Obr. 5. Cavalieriho princip

Praktický efekt Cavalieriho principu při výpočtu obsahů (resp. objemů) spočívá v tom, že odvozuje správné formule, aniž je nucen použít postupu, který dnes nazýváme výpočtem limity. I přes některé nedostatky měla Cavalieriho metoda velký vliv na jeho současníky i matematiky pozdějšího období. Leibniz například napsal, že Galilei a Cavalieri byli prvními, kdo začali odhalovat drahocenné metody a postupy Archiméda. Torricelli prohlásil, že Cavalieriho metoda je udivující ve své ekonomičnosti pro nalezení vět a dává možnosti dokázat ohromné množství nových tvrzení a to krátkými, přímými důkazy, což je nemožné metodami starověku.

Kromě této metody pro výpočet objemů dvou těles porovnáváním jejich řezů, Cavalieri objevil i metodu pro výpočet obsahů a objemů jednoduchých útvarů pomocí tzv. příčných řezů. Ilustrujme tuto metodu na třech příkladech.

Příklad 1: Výpočet obsahu pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka ABC se základnou a výškou a (viz obr. 6.). Je-li PQ jeho svislý řez délky x, pak obsah trojúhelníka je suma takovýchto segmentů, tj.

$$s(\triangle ABC) = \sum_{A}^{B} x.$$



Obr. 6. Cavalieriho metoda příčných řezů

Příklad 2: Výpočet objemu pravidelného jehlanu s vrcholem A a se čtvercovou základnou o straně BC rovné výšce jehlanu. Řez ve vzdálenosti x od vrcholu A má plochu x^2. Objem jehlanu je pak součtem takových řezů, tj.

$$V = \sum_A^B x^2.$$

Příklad 3: Výpočet objemu tělesa vzniklého rotací paraboly $y = x^2$ kolem osy x na intervalu $[A, B]$. Řezy ve vzdálenosti x od bodu A mají plochu πx^4. Objem tohoto rotačního tělesa je pak

$$V = \pi \sum_A^B x^4.$$

Problémem nyní zůstává výpočet těchto sum. Cavalieri odvodil součty $\sum_A^B x^n$ pro $n = 1, 2, \ldots, 9$. Jestliže označíme $B - A = a$, pak došel ke vztahu

$$\sum_A^B x^n = \frac{1}{n+1} a^{n+1} \quad \text{pro } n = 1, 2, \ldots, 9\,.$$

Z těchto výsledků Cavalieri usoudil, že lze předpokládat platnost vztahu pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, a tak mohl např. okamžitě napsat vztah pro výpočet obsahu plochy pod křivkou $y = x^n$ na intervalu $[0, 1]$

$$s = \sum_0^1 x^n = \frac{1}{n+1}$$

nebo vztah pro objem tělesa vzniklého rotací této plochy kolem osy x

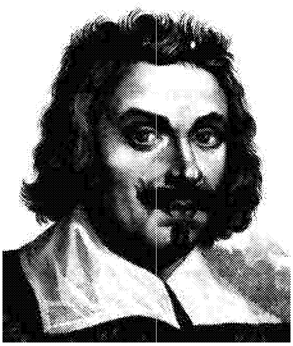
$$V = \pi \sum_0^1 x^{2n} = \frac{\pi}{2n+1}.$$

Jak je vidět, Cavalieriho výsledek je ekvivalentní hodnotě základního integrálu

$$\int_0^a x^n dx = \tfrac{a^{n+1}}{n+1},$$

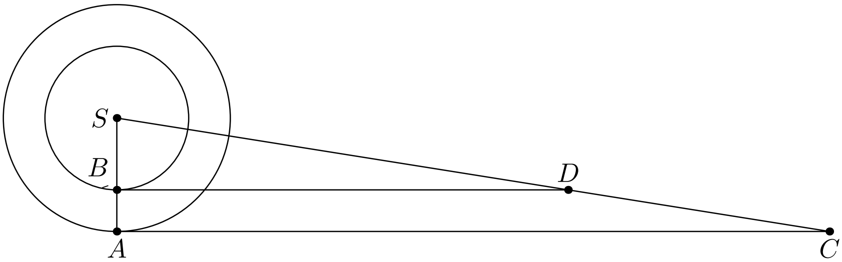
což znamenalo obrovský krok v rozvoji algoritmických procedur pro výpočty obsahů a objemů.

Přívržencem metody indivisibilií a žákem Galileiho byl i italský fyzik a matematik **Evangelista Torricelli** (1608 – 1647). Jeho přínos spočívá v tom, že současně s „nedělitelnými“ úsečkami používal i „nedělitelné“ části křivek, a to jak v rovině, tak v prostoru.



E. Torricelli

Ilustrujme jeho zobecněnou metodu na výpočtu obsahu kruhu o poloměru r a středu S. Stejně jako Kepler uvažoval úsečku AC, jejíž velikost je rovna obvodu kruhu. Nyní vzal libovolný bod B na poloměru SA a vytvořil kružnici o poloměru SB se středem v bodě S. Bodem B vedl přímku BD rovnoběžnou s AC, viz obr. 7. Z podobnosti trojúhelníků SAC a SBD plyne, že délka úsečky BD je rovna délce obvodu kružnice o poloměru SB. To znamená, že systému „nedělitelných" kružnic v daném kruhu odpovídá systém „nedělitelných" úseček v trojúhelníku SAC. Na základě principu nedělitelných Torricelli učinil závěr, že obsah kruhu je roven obsahu trojúhelníka SAC.



Obr. 7. Torricelli a jeho výpočet obsahu kruhu

3. Pokračovatelé Cavalieriho

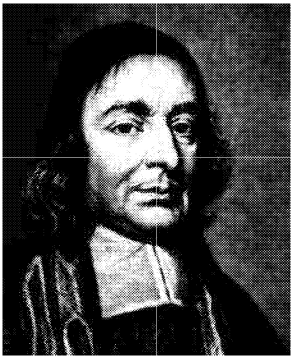
Cavalieriho kniha podnítila matematiky ke studiu problémů, při jejichž řešení se užívalo infinitezimálních veličin. Kromě starých problémů určování obsahů, objemů a těžišť hrál stále významnější úlohu problém tečen. Šlo o stanovení metody k určení tečny k dané křivce v daném bodě. Při těchto úvahách se zřetelně vydělily dva směry, geometrický a algebraický. Následovníci Cavalieriho, zvláště Torricelli a Newtonův učitel Isaac Barrow, používali řecké metody spočívající na geometrických úvahách, aniž by se příliš starali o jejich přesnost. Jiní však, zvláště Fermat, Descartes a Wallis, zastupovali druhý směr a používali při řešení stejných otázek algebraického přístupu.

Postupný vývoj infinitezimálního počtu značně urychlilo vydání Descartovy *Géométrie* (1637), ve které byla klasická geometrie vyložena algebraickými prostředky.

Hlavní význam matematické práce francouzského filozofa a matematika **René Descarta** (1596 – 1650) tkví hlavně ve vytvoření tzv. analytické geometrie. Na starověkou geometrii systematicky aplikoval algebru, která právě na počátku 17. století dosáhla velkého rozvoje, a tak zajistil nesmírné rozšíření její použitelnosti. Jeho kniha byla značným krokem kupředu. Neobsahuje však aparát moderní analytické geometrie. Nenalezneme zde ani kartézské souřadnice ani rovnice přímek, či kuželoseček.

Poněkud blíže k „dnešnímu pojetí“ analytické geometrie došel Pierre de Fermat, který pracoval s pravoúhlým osovým systémem a uvedl i rovnice přímek a kuželoseček. Jeho analytická geometrie, kterou vybudoval ještě před vydáním Descartovy knihy, však vyšla až po jeho smrti roku 1679 a byla zastíněna Descartovou *Géométrií.* Descartes totiž zavedl novou, stručnou a efektivní symboliku (která je téměř shodná s dnešní), zatímco Fermat užíval starší, topornou symboliku Vietovu.

Prakticky všichni autoři formulí pro výpočty obsahů, objemů a případně těžišť se v letech 1630 až 1660 zaměřují na problémy týkající se tzv. algebraických křivek, zvláště těch, jejichž rovnice má tvar $a^m y^n = b^n x^m$. Každý došel svým vlastním způsobem k výsledkům, které jsou ekvivalentní výpočtu integrálu $\int_0^a x^m dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}$. Tato řešení byla nalezena nejprve pro kladná celočíselná m, později pro záporné i racionální exponenty.



J. Wallis

John Wallis (1616 – 1703) se také zabýval výkladem geometrie algebraickými prostředky a zasloužil se o přenesení této nové metody do Anglie. Ve své knize *Arithmetica infinitorum* (1655) vyšel z Cavalieriho metody řezů, ale na rozdíl od Cavalieriho geometrického přístupu používal přístup aritmetický. Při svých výpočtech hojně využíval nekonečných řad a limitních úvah.

Ukažme, jak Wallis postupoval při určení kvadratury paraboly $y = x^2$ na intervalu $[0, 1]$. Interval $[0, 1]$ rozdělil na n stejných dílků. V těchto dělících bodech uvažoval řezy plochy pod parabolou a zkoumal poměr součtů délek těchto řezů k součtu délek řezů, které jsou rovny délce největšího řezu z prvního součtu, tj. poměr

$$\frac{(\frac{0}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2 + \cdots + (\frac{n}{n})^2}{(\frac{n}{n})^2 + (\frac{n}{n})^2 + \cdots + (\frac{n}{n})^2}.$$

Snadnou úpravou dostal vztah $\dfrac{0^2 + 1^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + \cdots + n^2}$, jehož hodnotu určil pomocí indukce:

$$\frac{0^2 + 1^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{0^2 + 1^2 + 2^2}{2^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}, \dots$$

$$\frac{0^2 + 1^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + \cdots + n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}.$$

Dále uvažoval takto: *při narůstání počtu členů se člen* $\frac{1}{6n}$ *neustále zmenšuje, takže se nakonec stane menším než libovolné kladné číslo a při pokračování do nekonečna úplně vymizí.* Jinými slovy, použitím limitního přechodu pro $n \to \infty$ dospěl ke známému výsledku $\frac{1}{3}$ pro obsah plochy určené parabolou na intervalu $[0, 1]$. Zapsáno dnešním způsobem došel ke vztahu

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{0^2 + 1^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + \cdots + n^2} = \frac{1}{3}.$$

Touto metodou Wallis dospěl také ke známému výsledku o poměru objemů kužele a válce s touž podstavou a výškou ($V_k = \frac{1}{3}V_v$). Předpokládá, že kužel se skládá z nekonečně mnoha rovinných řezů navzájem podobných a rovnoběžných, z nichž nejmenší je bod a největší podstava. Součet obsahů těchto řezů kužele porovnává se součtem obsahů odpovídajících řezů válce (všechny řezy válce jsou stejné a jsou rovny největšímu řezu kužele) a dojde k výsledku $\frac{1}{3}$.

Zobecněním předchozích úvah Wallis dokázal vztah

$$\int_0^a x^k dx = \frac{1}{k+1} a^{k+1} \text{ pro } k \in \mathbb{N} \text{ a } k = \frac{1}{q}, \text{ kde } q \in \mathbb{N}$$

a vyslovil domněnku, že

$$\int_0^a x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{p+q} a^{\frac{p+q}{q}},$$

kde $\frac{p}{q}$ je nezáporné racionální číslo.

Obecný výsledek byl později dokázán Fermatem a Torricellim.

Fermat – kvadratura paraboly a konstrukce tečen

P. Fermat

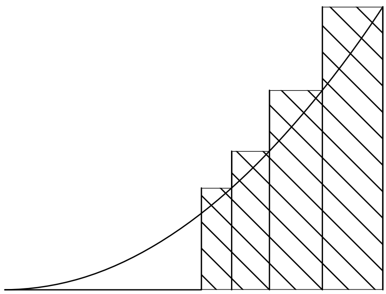
Pierre de Fermat (1601 – 1665) byl advokátem; studiu matematiky se věnoval jen ve volném čase. Většina jeho matematických objevů je známa jen z jeho korespondence, kterou vedl s Descartem, Pascalem, Torricellim, Huygensem, Robervalem, Wallisem a mnoha dalšími. Fermat jim neustále zasílal různé problémy a vyzýval je k jejich řešení. Sám svými objevy obohatil mnoho oblastí matematiky a fyziky. Položil spolu s Descartem základy analytické geometrie, spolu s Pascalem základy teorie pravděpodobnosti. Výrazně zasáhl také do teorie čísel, optiky a mnoha dalších oborů.

Stejně jako všichni matematikové této doby se i Fermat věnoval kvadraturám hyperbol a parabol zadaných rovnicemi $y^n = kx^{\pm m}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$.

Ukažme, jak Fermat postupoval při výpočtu obsahu plochy ohraničené parabolou $y = x^2$, osou x a přímkou $x = 1$. Nejdříve zvolil libovolné číslo $\alpha \in (0, 1)$ a sestrojil posloupnost čísel $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$. Uvažovanou plochu pokryl nekonečně mnoha obdélníky s výškami rovnými funkčním hodnotám funkce $y = x^2$ v bodech $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$, tj. s výškami $1, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^6, \ldots$ a šířkami $1 - \alpha, \alpha - \alpha^2, \alpha^2 - \alpha^3, \ldots$. Součet obsahů těchto obdélníků je

$$1(1-\alpha)+\alpha^2(\alpha-\alpha^2)+\alpha^4(\alpha^2-\alpha^3)+\cdots = 1-\alpha+\alpha^3(1-\alpha)+\alpha^6(1-\alpha)+\cdots =$$
$$= (1-\alpha)(1+\alpha^3+\alpha^6+\cdots) =$$
$$= \frac{1-\alpha}{1-\alpha^3} = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)} = \frac{1}{(1+\alpha+\alpha^2)}.$$

Jestliže nyní zmenšujeme základny obdélníčků, tj. číslo α se přibližuje k číslu jedna, pak podíl $\frac{1}{(1+\alpha+\alpha^2)}$ se bude blížit k $\frac{1}{3}$.



Obr. 8. Fermatova kvadratura paraboly

Obdobně Fermat postupoval při určování kvadratury paraboly $y = x^{\frac{p}{q}}$ pro $p > 0$ a $q > 0$ na intervalu $[0, b]$. Interval rozdělil na body $b, \alpha b, \alpha^2 b, \alpha^3 b, \ldots$, kde $\alpha < 1$. Vytvořil obdélníky se šířkami $(1-\alpha)b, \alpha(1-\alpha)b, \alpha^2(1-\alpha)b, \ldots$ a výškami $b^{\frac{p}{q}}, \alpha^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}}, \alpha^{\frac{2p}{q}} b^{\frac{p}{q}}, \ldots$. Součet obsahů těchto obdélníčků je

$$(1-\alpha)b^{\frac{p+q}{q}} + (1-\alpha)\alpha^{\frac{p+q}{q}} b^{\frac{p+q}{q}} + (1-\alpha)\alpha^{\frac{2(p+q)}{q}} b^{\frac{p+q}{q}} + \cdots = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} b^{\frac{p+q}{q}}.$$

Nyní je třeba určit hodnotu tohoto výrazu pro $\alpha \to 1$. Při tomto odvození Fermat využil následujícího triku: zavedl novou proměnnou β, takovou, že platí $\alpha = \beta^q$. Pak

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} = \frac{1-\beta^q}{1-\beta^{p+q}} = \frac{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\beta^3+\cdots+\beta^{q-1})}{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\beta^3+\cdots+\beta^{p+q-1})}.$$

Lze ukázat, že hodnota tohoto výrazu je pro $\alpha \to 1$, tj. pro $\beta \to 1$, rovna zlomku $\frac{q}{p+q}$. Celkem tedy dostáváme výsledek

$$\int_0^b x^{\frac{p}{q}}\, dx = \frac{q}{p+q} b^{\frac{p+q}{q}}.$$

Fermat se zabýval i kvadraturami hyperbol, vypočítal nevlastní integrál $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x_0}$, využíval záměny proměnných a integrace po částech.

Integrační postupy Fermata se liší od postupů Keplera a Cavalieriho v několika směrech. Za prvé, Kepler i Cavalieri řeší geometrickou úlohu geometrickými prostředky, kdežto Fermat ji převádí na úlohu algebraickou, na součet geometrické řady. Dále si lze povšimnout, že Kepler i Cavalieri pracovali s nekonečně malou veličinou. Fermat nepoužíval nekonečně malé veličiny, obdélníky s nekonečně malou šířkou. Jeho přístup se opírá o pojem limity, i když jen intuitivně. V tomto směru volí postup podobný Archimédově exhaustivní metodě. V dalším vývoji byly používány oba přístupy, a to jak pomocí limit, tak pomocí aparátu nekonečně malých veličin. Obě linie najdeme např. u Newtona. Tento vývoj, který se však stále více přikláněl na stranu limit, byl ukončen v 19. století vybudováním ucelené teorie limity.

Z hlediska dalšího vývoje infinitezimálního počtu se stala významnou také Fermatova metoda konstrukce tečen; je popsána v jeho rukopise z roku 1637 s názvem *Methodus ad Disquirendam et Maximam et Minimam* (*Metoda nalezení maxim a minim*).

Věnujme se jeho metodě nalezení tečny ke křivce podrobněji.
Nechť je dána křivka a na ní libovolný bod P, viz obr. 9. Hledáme tečnu PT k této křivce v bodě P.

Fermatův postup je založen na nalezení délky úsečky TQ, tj. bodu T. Spojením bodu T a P pak lze získat hledanou tečnu. Ukažme, jak Fermat určil požadovanou délku úsečky TQ:

Nechť úsečka QQ_1 délky E je částí přímky TQ. Trojúhelník TQP je podobný trojúhelníku PRT_1, tedy

$$TQ : PQ = E : T_1R.$$

Podle Fermata je úsečka T_1R „téměř stejně dlouhá“ jako úsečka P_1R (jsou-li body Q, Q_1 „dostatečně blízko“), a proto

$$TQ : PQ = E : (P_1Q_1 - PQ).$$

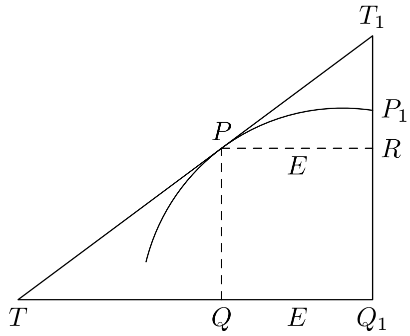
Použijeme-li dnešního zápisu ($PQ = f(x)$), dostaneme

$$TQ : f(x) = E : [f(x+E) - f(x)],$$

odkud

$$TQ = \frac{E \cdot f(x)}{f(x+E) - f(x)}.$$

Dále Fermat (po dosazení konkrétních hodnot) vydělil čitatel i jmenovatel číslem E a nakonec položil $E = 0$. Tak obdržel délku TQ.



Obr. 9. Určení tečny ke křivce

Ilustrujme tuto metodu na příkladu funkce $y = x^2$. Hledáme tedy tečnu k funkci $y = x^2$ v libovolném bodě o souřadnicích $[x, x^2]$. Podle výše odvozeného vztahu je

$$TQ = \frac{E \cdot x^2}{(x+E)^2 - x^2} = \frac{E \cdot x^2}{x^2 + 2Ex + E^2 - x^2}.$$

Vydělíme celý zlomek číslem E, tj.

$$TQ = \frac{x^2}{2x + E};$$

nakonec položíme $E = 0$ a dostáváme výsledek

$$TQ = \frac{x}{2}.$$

Na základě tohoto výsledku známe průsečík hledané tečny s osou x a tím i samotnou tečnu.

Fermatova metoda tečen inspirovala mnoho dalších matematiků. Podle slov d'Alemberta je Fermat dokonce prvním, kdo použil diferenciály k nalezení tečny. Newton v jednom dopise napsal, že jeho myšlenky o diferenciálním počtu byly motivovány studiem Fermatovy metody tečen.

Další představitelé rozvoje integrace

Dalším matematikem, který významně přispěl k rozvoji integrálního počtu, byl **Blaise Pascal** (1623 – 1662). Je znám především sestrojením prvního počítacího stroje (1645), formulací a důkazem binomické věty a konstrukcí s ní spojeného tzv. Pascalova trojúhelníku. Pascal pronikl do procesu integrace a uvědomil si, že veškeré integrování vede k výpočtu jistých aritmetických součtů mocnin. Věnoval se mj. zkoumání cykloidy (křivka, která vznikne pohybem pevného bodu kružnice, která se kotálí po přímce) a pomocí archimédovských úvah určil obsah a těžiště její úseče a objem tělesa vzniklého rotací takovéto úseče. V použitých postupech je obsažena metoda „charakteristického trojúhelníka“, kterou později rozpracoval Leibniz.

Upozorněme, že Fermat již dovedl integrovat parabolickou, hyperbolickou a exponenciální funkci, Pascal jako první funkce trigonometrické.

Stejnými otázkami jako Kepler a Cavalieri se zabýval i **Gilles Personne de Roberval** (1602 – 1675), jeho postupy však byly přesnější. Při výpočtu obsahu plochy vymezené křivkou $y = x^n$, osou x a přímkou $x = 1$ postupoval tak, že danou plochu rozdělil na nekonečně mnoho nekonečně úzkých obdélníčků, jejichž obsahy pak sečetl.

Roberval se hodně věnoval zkoumání v té době „módní“ křivky cykloidy. Poprvé se touto křivkou zabýval a dal jí jméno G. Galilei. Téměř všichni matematikové té doby – Torricelli, Descartes, Fermat, Pascal aj. řešili úlohy týkající se různých cykloid. Určovali jejich obsahy, tečny, objemy těles vzniklých jejich rotacemi kolem různých přímek atd.

Robervalovy práce měly velký význam pro rozvoj infinitezimálních metod, neboť využívá jako jeden z prvních kinematického přístupu při sestrojení tečen ke křivkám. Tento přístup byl založen na tom, že okamžitá rychlost pohybu daného bodu (pohybujícího se po křivce) má směr tečny k této křivce. Své myšlenky sepsal roku 1634 v práci *Traité des indivisibles*, která však byla publikována až roku 1693. Zobecnil tak metodu, kterou užil Archimédes při výpočtu tečny ke své spirále.

Nezávisle na Robervalovi rozvinul tento kinematický způsob sestrojení tečen ke křivkám i Torricelli.

Christian Huygens (1629 – 1695) byl matematikem, fyzikem a astronomem. Vedle Wallisovy knihy *Arithmetica infinitorum* obsahovalo Huygensovo dílo nejrozvinutější formu infinitezimálního počtu v době před Newtonem a Leibnizem. Přitom je třeba zdůraznit, že Huygens byl jedním z mála velkých matematiků 17. století, kteří za nezbytnou součást svých metod považovali přesnost; navázal tak na staré archimédovské tradice.

Připomeňme také, že Huygens je kromě toho autorem vlnové teorie světla a objasnil existenci Saturnových prstenců.

Isaac Barrow (1630 – 1677) byl profesorem na univerzitě v Cambridge, kde přednášel optiku a geometrii.

Věnoval se kvadraturám různých křivek a určením jejich tečen. Z jeho prací je patrné, že znal vzájemnou souvislost mezi těmito dvěma úlohami, tj. mezi integrováním a derivováním. Pojem integrace byl však pro něj prvotní; ze známých postupů pro integraci pak odvozoval metodu určování tečen ke křivkám. Tímto postupem si však k algoritmům infinitezimálního počtu cestu neotevřel.

Konečnou podobu všem těmto výsledkům dali až Newton a Leibniz.

4. Newton a Leibniz – zakladatelé infinitezimálního počtu

Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz jsou nejvýznamnějšími matematiky druhé poloviny 17. století, kteří nezávisle na sobě vytvořili diferenciální a integrální počet. Vybudovali ucelenou teorii, do které zahrnuli všechny roztříštěné objevy svých předchůdců, teorii, která poskytla jednotný pohled na jednotlivosti, do té doby izolované.

Všimněme si, co vytvoření této teorie předcházelo. V 16. a 17. století byla velká pozornost věnována studiu křivek. Byly zkoumány plošné i prostorové křivky (spirály, řetězovky, …), tvary čoček a zrcadel s požadovanými vlastnostmi a mnoho dalších objektů. Pomocí infinitezimálních metod se studovaly konstrukce tečen, obsahy úsečí, objemy a povrchy těles vzniklých rotací úsečí, byla určována těžiště těchto útvarů. Významnou roli v pohledu na křivky sehrálo v 17. století oživení kinematických představ. Zkoumaly se dráhy pohybujících se bodů a vržených těles, studovaly se pojmy rychlosti, zrychlení, dráhy, času a vznikaly i základní přestavy o proměnné veličině a funkci.

V roce 1638 studoval G. Galilei stejnoměrně zrychlený přímočarý pohyb a došel ke vztahu pro dráhu tohoto pohybu ($x = \frac{1}{2}gt^2$, když $\frac{dx}{dt} = gt$), a tím vlastně k výpočtu jistého neurčitého integrálu. Torricelli uvažoval obecněji; určil dráhu jako „integrál“ rychlosti. Úloha měření dráhy v závislosti na čase si vynutila přenesení integrálních postupů ze statických úloh na úlohy dynamické a posléze poskytla i ideu a metodu jak svázat pojem derivace (tečny, rychlosti) s pojmem integrálu (obsahu, dráhy).

Představy o mechanice byly v polovině 17. století již dostatečně rozvinuty. V zásadě byla vytvořena úplná nauka o pohybu. Bylo všeobecně přijato, že pohybující se objekt prochází svou drahou bod po bodu spojitě ve spojitém čase, že pro určení dráhy pohybujícího se tělesa, tj. jeho polohy v daném okamžiku, je třeba znát velikost a směr jeho okamžité rychlosti atd. Nové mechanické přestavy o pohybu tedy dost důrazně vyžadovaly, aby diferenciální operace byly při popisu pohybu prvotní. Z nich pak bylo možno odvozovat integrální charakteristiky mechanického jevu, např. vyjádřit dráhu jako funkci času, rychlost jako funkci okamžitého zrychlení apod.

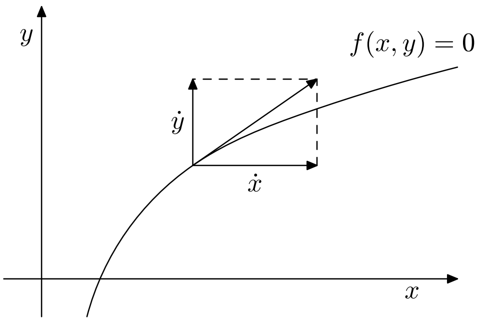
Infinitezimální postupy slavily ve druhé polovině 17. století velké úspěchy. V oblasti integrace byly použity ve formě sčítání nekonečného počtu nekonečně malých veličin, v oblasti derivování se objevilo jednotné hledisko, kterým se úlohy na určování tečen redukovaly na zkoumání nekonečně malých rozdílů veličin a jejich podílů. Bylo odvozeno několik formálních pravidel pro výpočet derivací, rozvíjely se metody související s nekonečnými řadami. Jednotný systém obecných pojmů se stanovenými pravidly však nebyl k dispozici. Chyběla symbolika, která by umožnila mechanické využívání pravidel. Teprve Newton a Leibniz sjednotili infinitezimální počet, dali mu pevný řád a výpočetní algoritmy.

I. Newton

Isaac Newton (1643 – 1727) pocházel z rodiny venkovského šlechtice z hrabství Lincolnshire. V letech 1661 – 1665 studoval v Cambridge. V letech 1665 – 1666 v hlavních rysech vypracoval rámec svého vědeckého programu a v roce 1669 se stal nástupcem I. Barrowa na Lucasově katedře v Cambridge. Barrow podle vlastních slov „uvolnil své místo schopnějšímu“. Newton na tomto profesorském místě setrval bezmála 30 let do roku 1696, kdy se stal správcem mincovny v Londýně. Zapojil se do aktivity Royal Society a dlouho stál v jejím čele. I. Newton byl fyzikem, matematikem a astronomem. Zabýval se mj. základy mechaniky, gravitačními zákony, korpuskulární teorií světla, optikou (zkonstruoval např. zrcadlový dalekohled) nebo základy hydrodynamiky.

Své úvahy v infinitezimálním počtu opíral o tzv. *teorii fluxí a fluent*, kterou vytvořil v době svého pobytu na rodném panství v Lincolnshire v letech 1665 – 1666, kdy uprchl z Cambridge před morem.

Díky znalosti Descartových idejí analytické geometrie si mohl Newton představit rovinnou křivku jako množinu průsečíků vždy dvou přímek rovnoběžných se souřadnicovými osami x a y, pohybujících se okamžitými rychlostmi $\dot{y}$ a $\dot{x}$ ($\dot{y}$ je okamžitá rychlost pohybu přímky rovnoběžné s osou x a $\dot{x}$ je okamžitá rychlost pohybu přímky rovnoběžné s osou y). Tyto okamžité rychlosti $\dot{x}$ a $\dot{y}$, které mají charakter vektorů, nazval fluxemi. Okamžitá rychlost pohybujícího se průsečíku, tj. vektor rychlosti pohybu tohoto bodu, vznikne složením obou složek pohybu $\dot{x}$, $\dot{y}$ podle známého rovnoběžníkového pravidla. Podíl $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. je směrnicí tečny ke křivce opsané průsečíkem zmíněných pohybujících se přímek.



Obr. 10. Newtonova metoda fluxí

Z našeho pohledu jsou souřadnice x, y (fluenty) pohybujícího se bodu funkcemi času t a fluxe $\dot{x}$, $\dot{y}$ derivacemi x, y podle t

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad .$$

Jejich poměr je derivace y podle x

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} \quad .$$

Čas je u Newtona jen pomocným pojmem a slouží spíše jako příklad nezávisle proměnné veličiny. Nekonečně malé přírůstky takovéto veličiny označuje písmenem „o“, *fluenty* (x, y) jsou postupně vzrůstající nebo ubývající veličiny popisující dráhu hmotného bodu, *fluxe* ($\dot{x}$, $\dot{y}$) jsou rychlosti, s nimiž se veličiny mění a momenty fluxí ($\dot{x}o$, $\dot{y}o$) jsou nekonečně malé přírůstky veličin (fluent).

Newton formuloval základní úlohy své matematické analýzy takto:

1. ze znalosti dráhy pohybu hmotného bodu v každém okamžiku nalézt rychlost tohoto pohybu v určitém čase,
2. ze znalosti rychlosti hmotného bodu v každém okamžiku určit dráhu, kterou tento bod urazí za určitý čas.

Jinými slovy,

1. nalézt vztah mezi fluxemi $\dot{x}$ a $\dot{y}$, je-li dán vztah mezi fluentami rovnicí $f(x, y) = 0$;
2. nalézt vztah mezi fluentami x, y, tj. nalézt funkci f vyhovující rovnici $f(x, y) = 0$, je-li dán vztah mezi fluxemi.

První z těchto úloh je výpočtem derivace, druhá vede k výpočtu integrálu. Ukažme, jak Newton přistupuje k jejich řešení.

Úloha 1.
Má-li z daného vztahu $f(x, y) = 0$ mezi fluentami určit vztah mezi fluxemi, dosadí do rovnice $f(x, y) = 0$ za x a y hodnoty $x + \dot{x}o$, $y + \dot{y}o$ s odůvodněním, že když je v jednom okamžiku bod v poloze dané hodnotami x a y na křivce, pak v následujícím okamžiku je jeho poloha dána hodnotami $x + \dot{x}o$, $y + \dot{y}o$, tj. dostane výraz

$$f(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o) = 0.$$

K jeho zjednodušení použije rovnici $f(x, y) = 0$ a získá vztah pouze mezi násobky nekonečně malých veličin. Potom provede dělení výrazem „o“ a nakonec zanedbá všechny členy, v nichž se ještě „o“ vyskytuje, neboť podle něho je možno považovat je ve srovnání s ostatními členy bez „o“ za „pouhé nic“. Odtud dostává hledaný vztah pro $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Ilustrujme jeho postup na příkladu funkce $y = x^n$, pro $n \in \mathbb{N}$.
Do rovnice $y - x^n = 0$ dosadíme hodnoty $x + \dot{x}o$, $y + \dot{y}o$. Rovnici

$$(y + \dot{y}o) - (x + \dot{x}o)^n = 0$$

upravíme pomocí binomického vzorce na tvar

$$y + \dot{y}o - (x^n + nx^{n-1}(\dot{x}o) + \binom{n}{2}x^{n-2}(\dot{x}o)^2 + \cdots) = 0.$$

Odtud dosazením $y = x^n$ a vydělením členem „o“ získáme

$$x^n + \dot{y}o - x^n - nx^{n-1}(\dot{x}o) - \binom{n}{2}x^{n-2}(\dot{x}o)^2 - \cdots = 0,$$

$$\dot{y} - nx^{n-1}(\dot{x}) - \binom{n}{2}x^{n-2}(\dot{x})^2 o - \cdots = 0,$$

odkud

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = nx^{n-1},$$

neboť členy $\binom{n}{2}x^{n-2}(\dot{x})^2 o + \cdots$ jsou ve srovnání s ostatními členy bez „o“ jenom „pouhé nic“.

Odvození zůstává formálně beze změny i když předpoklad $n \in \mathbb{N}$ nahradíme předpokladem $n \in \mathbb{R}$. Použít se však musí obecnější podoba binomického vzorce, která byla Newtonovi také známa. Touto metodou Newton odvodil všechny základní vztahy pro derivování, včetně vztahů pro derivování součinu, podílu a složené funkce.

Úloha 2.

Druhá úloha spočívá v nalezení funkce y dané rovnicí $f(x, y) = 0$, je-li znám např. poměr $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Ze současného pohledu se jedná o vyřešení diferenciální rovnice typu $g(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}) = 0$. Tato úloha v sobě skrývá problém hledání primitivní funkce. Je-li znám například vztah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x),$$

jde o určení $y(x) = F(x)$, tj. o určení primitivní funkce F k funkci f.

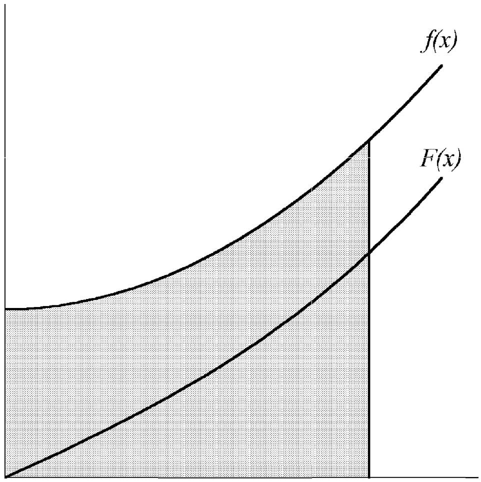
V této souvislosti pak Newton diskutoval výpočet obsahů ploch některých útvarů pomocí „antiderivování“, tj. pomocí primitivní funkce.

Jestliže pro danou kladnou funkci $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ označíme $F(z)$ obsah útvaru vymezeného grafem funkce f na intervalu $[a, z]$, osou x a přímkami $x = a$, $x = z$, pak můžeme Newtonův výsledek z r. 1666 zapsat tak, že pro výše popsanou funkci F platí

$$\frac{dF}{dx} = f \quad \text{neboli} \quad F'(x) = f(x).$$

(Zde dnes musíme být trochu opatrní a zjišťovat, pro které hodnoty $x \in [a, b]$ poslední vztah platí. Pro spojitou funkci f, a jiné si patrně Newton ani nepřipouštěl, problém nenastane a vztah $F'(x) = f(x)$ platí všude na intervalu $[a, b]$.)

Užijeme-li dnešní symboliky, pak pro výše zmíněný obsah platí $F(z) = \int_a^z f(x)dx$. Pokud lze nějakým jiným způsobem určit funkci F, pro níž je $F'(x) = f(x)$ na $[a,b]$, pak lze s její pomocí vyjádřit i plošnou velikost útvaru vymezeného grafem funkce f na intervalu $[a,b]$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, tj. integrál $\int_a^b f(x)dx$. V této situaci pak je $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, poněvadž je možné předpokládat, že je $F(a) = 0$.



Obr. 11. Vztah mezi funkcí f a její primitivní funkcí F

Tímto způsobem se na základě Newtonovy úvahy lze dostat k dnešní podobě definice Newtonova integrálu:

Je-li $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funkce, která má primitivní funkci $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, tj. platí-li $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in [a,b]$, pak existuje *Newtonův integrál* $(N) \int_a^b f(x)dx$ *funkce* f *v intervalu* $[a,b]$ a je definován vztahem

$$(N) \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

A tak Newton odvodil formuli, která svazuje integrál s derivací a dává do souvislosti problémy kvadratur s určováním tečen ke křivkám.

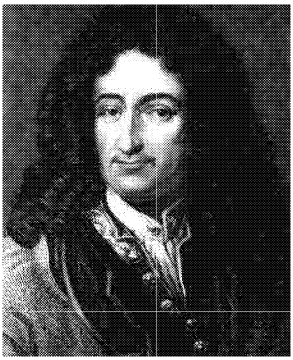
Na závěr si ještě všimněme, jak Newton pracoval s nekonečně malou veličinou. Ačkoliv stále tento pojem používal, přesnou definici neuvedl. Z jeho výpočtů vyplývá, že členy násobené činitelem „o“ pokládá ve srovnání se členy, jež „o“ neobsahují, za nuly. Neplatí to však vždy. V případě, že s veličinou „o“ dělí, pokládá ji za nenulovou. Newton si byl vědom tohoto nedostatku, ale nedovedl se s ním vyrovnat. Názory na odůvodnění teorie fluxí několikrát změnil. Při hledání východiska vytvořil „metodu prvních a posledních poměrů“, jakýsi prvopočátek teorie limit. Zavedl i pojem „limes“, i když pojem limity v dnešním smyslu nedefinoval; opíral se pouze o jeho intuitivně zřejmý význam. Otevřel tím cestu dalšímu rozvoji a upřesnění tohoto klíčového pojmu matematické analýzy.

Newtonova metoda fluxí od počátku nese znaky algoritmizace založené především na diferencování a na tom, že integrování je chápáno jako inverzní operace k diferencování.

Newton svou metodu formuloval už v rukopise z roku 1666, publikována však byla daleko později. Metodě fluxí se věnuje i v traktátu *De Methodis Serierum et Fluxionum* (*O metodě řad a fluxí*), který sepsal roku 1671 (vydán až 1736). Zde ji využívá k řešení různých úloh (hledání extrémů, určování délky křivky apod.) a věnuje se využití nekonečných řad pro řešení diferenciálních rovnic. Rozklad funkcí do mocninných řad je podstatným rysem Newtonovy metody. Připomeňme, že Newton zobecnil binomickou větu také pro racionální a záporné exponenty a tak dospěl k objevu binomické řady.

Newton dále rozpracoval substituční metodu výpočtu integrálu, vypracoval tabulky integrálů, konstruoval přibližné iterační metody pro řešení rovnic typu $f(x) = 0$, získal mocninné řady pro mnoho funkcí apod.

Své stěžejní dílo *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (*Matematické principy přírodní filozofie*) Newton zveřejnil tiskem v roce 1687. Tato kniha je v první řadě výkladem mechaniky, obsahuje však také bohatý matematický aparát. Newton se zde nezmiňuje o své metodě fluxí, dílo je však plné infinitezimálních a limitních úvah. Ty se staly zárodkem důležitých pojmů a metod, které byly posléze rozsáhle zobecněny a rozvinuty v infinitezimálním počtu.



G. W. Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) se narodil v Lipsku a zde pak vystudoval logiku, filozofii a právo. Po studiích vstoupil do služeb mohučského kurfiřta, s jehož diplomatickým posláním v roce 1672 odjel do Paříže, kde strávil téměř čtyři roky. Zde navázal styky s vědci sdruženými kolem Akademie věd a zejména pak s Ch. Huygensem, který v něm vzbudil silný zájem o matematiku. V roce 1673 krátce pobýval v Londýně, kde navázal kontakty s anglickými vědci a stal se zahraničním členem Royal Society. V roce 1676 se po návratu do Německa stal knihovníkem a kancléřem hannoverského knížete. Podílel se na organizování Akademie věd v Berlíně; ve službách Hannoveru zůstal dalších čtyřicet let, až do konce svého života.

Leibniz byl profesionální diplomat a právník. Zabýval se filozofií, přírodními vědami, jazykovědou, historií, teologií, logikou, ale i technickými vynálezy – zkonstruoval např. počítací stroj. Svou všestranností představoval vůdčí osobnost duchovního života tehdejší kontinentální Evropy.

V matematice byl Leibniz úplný samouk. Ke studiu matematiky ho přivedly diskuse s Huygensem. Velmi rychle se seznámil s pracemi Descarta, Pascala, Gregoryho a Barrowa a začal samostatně rozvíjet infinitezimální počet. Jeho základy a symboliku vypracoval v roce 1675.

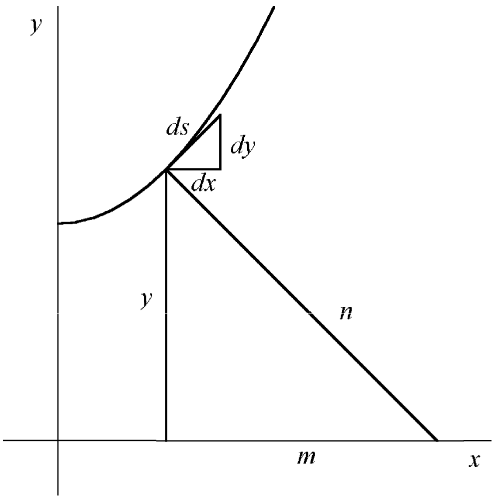
Připomeňme pouze na okraj, že během svého pobytu v Paříži Leibniz objevil a popsal vlastnosti nekonečné řady, která je dnes nazývána po něm. Tato řada, která se odvozuje z rozvoje funkce arkustangens, dává při $x = 1$ hodnotu

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad .$$

V Paříži se Leibniz také seznámil s Pascalovou ideou tzv. *charakteristického trojúhelníka,* který Pascal využil v jisté speciální situaci. Pascalovu myšlenku pak Leibniz zobecnil pro libovolné křivky.

Věnujme se Leibnizově konstrukci podrobněji.

Nechť je dána křivka pomocí funkce $y = f(x)$ a nechť je na ní dán bod A, kterým prochází tečna ke grafu zmíněné funkce. Utvořme pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož jeden vrchol je dán bodem A, přepona ds je dána úsečkou s krajním bodem A a leží na tečně ke křivce ($ds = |AC|$), odvěsny dx a dy jsou rovnoběžné s odpovídajícími osami souřadnic ($dx = |AB|$, $dy = |BC|$). V bodě dotyku A tečny ke křivce uvažujme kolmici k této tečně. Touto kolmicí, osou x a přímkou procházející bodem A, která je rovnoběžná s osou y, je vytvořen pravoúhlý trojúhelník APR ($|AP| = y$, $|PR| = m$ a $|AR| = n$), který je podobný trojúhelníku ABC, viz obr. 12.



Obr. 12. Leibnizův charakteristický trojúhelník

Trojúhelník APR je právě onen charakteristický trojúhelník, který byl předmětem mnoha spekulací v souvislosti s infinitezimálními veličinami. Už označením dx, dy a ds pro strany trojúhelníka ABC je svým způsobem naznačeno, že na ně budeme hledět jako na infinitezimální veličiny; můžeme si například představit, že strana dx bude konvergovat k nule, trojúhelník ABC se tak bude zmenšovat a přitom se stále zachová jeho podobnost s charakteristickým trojúhelníkem APR. Z podobnosti výše popsaných trojúhelníků dostaneme vztah

$$(*) \qquad \frac{m}{y} = \frac{dy}{dx} \quad \text{neboli} \quad mdx = ydy.$$

Leibniz zkoumal i význam dalších vztahů plynoucích z podobnosti zmíněných trojúhelníků. My však zůstaneme jen u vztahu (*). Leibnizova představa skutečně vycházela z představy, že trojúhelník je infinitezimální, tj. že např. dx je nekonečně malé (dnes bychom mohli říci, že veličina dx konverguje k nule). Situaci popsanou výše si představil v každém bodě křivky a veličiny vystupující na obou stranách vztahu (*) sečetl. Těmto součtům (nekonečně mnoha nekonečně malých) veličin říkal integrál a dospěl tak ke vztahu

$$(**) \qquad \int mdx = \int ydy.$$

Dále z (*) dostal rovnost $m = y\dfrac{dy}{dx}$ a vztah (**) přepsal do tvaru

$$(***) \qquad \int y\frac{dy}{dx}dx = \int ydy$$

a ve formě určitého integrálu pak

$$\int_a^b y\frac{dy}{dx}dx = \int_{y(a)}^{y(b)} ydy = \frac{1}{2}y^2|_{y(a)}^{y(b)} = \frac{1}{2}[y(b)^2 - y(a)^2].$$

Když v této situaci chtěl Leibniz například určit integrál $\int_a^b x^n dx$, vedl úvahy tak, aby určil funkci y, pro kterou by bylo $y\dfrac{dy}{dx} = x^n$. Za tím účelem položil $y(x) = \alpha x^k$ a hledal odpovídající hodnoty α a k. Po dosazení dostal

$$y(x)\frac{dy}{dx}(x) = \alpha x^k \cdot \alpha k\; x^{k-1} = \alpha^2 k\; x^{2k-1} = x^n$$

a odtud pak $\alpha^2 k = 1$, $2k - 1 = n$, tj. $k = \dfrac{n+1}{2}$ a $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}$. Hledaná funkce y má proto tvar $y(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}x^{\frac{n+1}{2}}$. S touto funkcí pak Leibniz z výše uvedeného vztahu pro integrál dostal známý vztah

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{2}y^2|_{y(a)}^{y(b)} = \frac{1}{2}[\frac{2}{n+1}b^{n+1} - \frac{2}{n+1}a^{n+1}] = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Uvedené „leibnizovské“ úvahy jsou z dnešního hlediska velmi nepřesné, i když jsme se zde snažili užívat dnešních symbolů a způsobu vyjadřování. S infinitezimálními veličinami Leibniz zachází velkoryse; např. přechod od vztahu

(*) k (**) v sobě obsahuje operaci, která představuje nekonečný součet nekonečně malých veličin, nebo ve vztahu (***) Leibniz vlastně „vykrátil“ na levé straně dx a dostal pravou stranu tohoto vztahu. V dnešní době aritmetizované analýzy s takovými výpočty zacházíme opatrněji, protože pracujeme s pojmy upřesněnými pomocí limity a nikoliv s infinitezimálními veličinami.

Poznamenejme, že současná matematika se však k „leibnizovským“ postupům práce s infinitezimálními veličinami vrátila – v rámci formálně vybudované teorie nestandardní analýzy lze užívat s dobrým svědomím to, co ve svých vzorcích provozoval Leibniz s infinitezimálními veličinami (např. i ono „vykrácení“ veličinou dx v (***)).

Leibniz se pokusil vysvětlit vztahy mezi nekonečně malými veličinami vyšších řádů tvrzením, že nebeská klenba se má k zemi jako země k zrnku prachu, a země opět se má k zrnku prachu jako zrnko prachu k magnetické částečce. Mínil tím zřejmě, že x je jako nebeská klenba, dx země, $(dx)^2$ zrnko prachu, $(dx)^3$ magnetická částečka, a pokládal tedy ve svých úvahách $(dx)^2$ za nulovou veličinu.

V práci z roku 1693 Leibniz ukázal, že problém kvadratur se převádí na problém nalezení funkce, která má dán „zákon sklonu“, tj. strany jejího charakteristického trojúhelníka jsou v daném poměru. Odvodil tedy vztah

$$\int_0^x f(x)dx = F(x), \text{ když } \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

za předpokladu, že $F(0) = 0$. V tomto tvrzení se skrývají dvě důležitá fakta: souvislost mezi integrálem a derivací a vztah pro výpočet určitého integrálu jako rozdílu funkčních hodnot primitivní funkce.

V souvislosti s výpočtem neurčitého integrálu řešil Leibniz diferenciální rovnici $y' = f(x)$ a ukázal, že řešením je nekonečně mnoho křivek, z nichž lze vybrat jednu procházející daným bodem, tj. splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

Na základě souvislosti mezi diferencováním a integrováním vypracoval Leibniz tzv. teorii transmutace, která v sobě obsahuje integrování, rozklad do řad i metodu charakteristického trojúhelníka. Obsahem transmutační věty je rovnost

$$\int_a^b ydx = [xy]_a^b - \int_{f(a)}^{f(b)} xdy,$$

jenž je zárodkem metody integrace per partés.

Leibniz kladl velký důraz na symboliku; vytvářel ji tak, aby usnadňovala pochopení podstaty jeho algoritmů a podpořila algoritmizaci nových poznatků. V Paříži dne 29. října 1675 napsal, že *bude užitečné místo „součtu všech l“ psát od nynějška $\int l$* (znak $\int$ je odvozen z prvního písmene slova summa), *a že vzniká nový druh počtu, nová početní operace, která odpovídá sčítání a násobení. Druhý druh počtu vzniká, když z výrazu $\int l = a$ získáme $l = a\frac{y}{d}$* (d je první písmeno slova differentia). *Jako totiž operace $\int$ zvětšuje rozměr, tak jej d zmenšuje. Znak $\int$ znamená pak součet, d diferenci.* Svou symboliku Leibniz neustále vylepšoval, např. už v dopise z 11. listopadu 1675 změnil $\frac{y}{d}$ na dy.

V pozdějším období už užívá nám velmi blízkého zápisu, např. v práci z roku 1686 čteme ... *jestliže* $\int xdx = \frac{x^2}{2}$, *pak* $d(\frac{x^2}{2}) = xdx$...

Leibniz sice zavedl operační symbol pro integrování, název *integrál* však pochází od Jakoba Bernoulliho.

Leibniz zformuloval základy svého infinitezimálního počtu na podzim roku 1675. Předložil pravidla pro řešení úloh tečen a kvadratur, vztah mezi integrováním a derivováním a zavedl novou symboliku. Svoji teorii založil na myšlence charakteristického trojúhelníka, na Descartově analytickém vyjádření geometrických křivek a na teorii nekonečných řad. Vycházel z analyticko-geometrických přestav, které vyjadřoval aritmetickým a algebraickým jazykem. V této oblasti se rychle stal vůdčím badatelským duchem. Na rozdíl od Newtona, Leibniz seznamuje se svými výsledky vědce formou dopisů a publikuje v existujících žurnálech, např. v *Acta Eruditorum* v Lipsku, která v roce 1680 sám založil. Zde také roku 1684 vydal práci *Nová metoda maxim a minim ...*, která sehrála v rozvoji infinitezimálního počtu klíčovou roli.

Řešení infinitezimálních úloh přivedlo Leibnize ke zkoumání křivek a funkcí. Na obecnou křivku Leibniz nahlížel jako na mnohoúhelník sestavený z nekonečně mnoha nekonečně malých úseček: ... *nalézt tečnu ke křivce, to znamená vést přímku spojující dva body křivky, jejichž vzdálenost je nekonečně malá nebo též prodloužit stranu nekonečně úhlového mnohoúhelníka, který je pro nás s křivkou totožný* ... . Kromě algebraických křivek se zabýval i křivkami, které nemohou být popsány algebraickým výrazem a zavedl pro ně nový termín (*transcendentní*), který je užíván dodnes.

Všimněme si, jak Leibniz pracuje s nekonečně malou veličinou. Jak již bylo řečeno, tečna je podle něho přímka, která prochází dvěma body křivky, jež jsou nekonečně málo od sebe vzdáleny. Podle Leibnize lze tuto nekonečně malou vzdálenost vyjádřit vždy jako funkci diferenciálu dx. S diferenciálem pak nakládal velmi odvážně. Někdy považoval dx za úplně libovolnou veličinu a dy vypočítal na základě dx, jindy pokládá dx, dy za veličiny úměrné okamžitým přírůstkům hodnot x a y.

Svoji metodu Leibniz v dalším období sám rozvíjel a zdokonaloval. Některé nejasnosti jeho nové metody přiměly Jakoba Bernoulliho, aby se začal infinitezimálním počtem sám zabývat. Leibniz pak v Jakobu a Johannu Bernoulliových na sklonku 17. století nalezl horlivé spolupracovníky, se kterými za dvacet let mimořádně rozvinul a obohatil „novou analýzu“. To byl základ, na němž dále pracovali další Bernoulliové, l'Hospital, a zejména pak L. Euler.

Srovnáme-li přístup Newtona a Leibnize k infinitezimálmínu počtu, který oba nezávisle objevili a rozvíjeli, pak lze vedle centrální společné myšlenky o vzájemné inverzi derivování a integrování pozorovat značné rozdíly. Leibniz sleduje vytváření obecných metod a algoritmů a snaží se sjednotit přístup k různorodým problémům. Newton klade důraz na konkrétní výsledky a více se věnuje řešení úloh praktického charakteru. Newton je v otázkách symboliky lhostejný, zatímco Leibniz promýšlí symboly a vhodná označení, aby napomáhala věcnému pochopení. Newton při diferenciálních postupech vychází z intuitivní představy o spojitém pohybu, sleduje přírůstky v čase. Jeho cílem je určit fluenty z fluxí, tj. přidržuje se koncepce neurčitého integrálu. Pro Leibnize je integrál „nekonečný součet diferenciálů“. Nekonečné řady jsou u Newtona ústředním pojmem a prostředkem, Leibniz je využívá spíše okrajově.

Jak bylo uvedeno, Newton vytvořil svůj infinitezimální počet v letech 1665 – 1666 a své poznatky nezveřejnil. Leibniz své výsledky získal v letech 1672 – 1676 a usilovně je šířil.

I když se Newton a Leibniz dostali do rozsáhlého prioritního sporu, který nepůsobil pozitivně na jejich následovníky, vytvořili aparát moderní matematické analýzy. Ten ve své zárodečné podobě byl dlouho základem matematického uvažování a bouřlivě se během osmnáctého století rozvíjel.

Celé toto období lze stručně charakterizovat těmito nejvýznamnějšími výsledky:

- Došlo k vzájemnému propojení metod integrování a diferencování. Diferenciální metody se staly prvotními, z nich se při infinitezimálních úvahách nadále vycházelo. Integrál funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se začal počítat na základě fundamentálního vztahu

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

  kde $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ je funkce primitivní k funkci f na intervalu (a, b), tj. taková, že platí

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \text{ pro každé } x \in (a, b).$$

- „Statický“ určitý integrál se propojil s „dynamickým“ neurčitým integrálem zejména pod vlivem mechanických představ o pohybu.
- Matematické metody byly přímo odvozeny z potřeb fyziky a byly s ní těsně svázány.
- Vytvořil se základní názor na pojem funkce, která se tak stala hlavním objektem zkoumání nové vědní disciplíny (matematické analýzy).
- Byla vytvořena promyšlená symbolika a bohatý algoritmický aparát.

V souvislosti s těmito výsledky zavládko všeobecné přesvědčení, že dříve či později bude dořešeno vše, co s matematickou analýzou souvisí. Projevilo se to například v přesvědčení, že funkci bude *vždy* možné derivovat a že ji bude možné *vždy* integrovat tak, že se užije výše uvedeného fundamentálního vztahu. Jestliže se nám dnes takové přesvědčení zdá být poněkud přehnané, je to zejména tím, že máme jinou představu o tom, co je to funkce. Newtonovo přesvědčení se opíralo o to, že „jeho“ funkce byly v podstatě polynomy.

5. Matematická analýza 18. století ve vztahu k integrálu

V 18. století se matematická analýza konstituovala jako samostatná věda nezávislá na mechanice a geometrii. Stal se z ní užitečný nástroj k řešení konkrétních problémů fyziky, astronomie a dalších vědních disciplín. Od základního proudu, kterým byl diferenciální a integrální počet, se oddělilo několik nových silných odvětví: variační počet, diferenciální geometrie, nekonečné řady, obyčejné a parciální diferenciální rovnice, speciální funkce a funkce komplexní proměnné.

Osmnácté století se neslo ve znamení velké ofenzívy matematické analýzy do oblasti, které bychom dnes říkali aplikace matematiky. Tehdy ovšem nebylo možné např. odlišit matematika od fyzika. Dá se říci, že téměř všichni matematikové 17. a 18. století byli zároveň i fyziky – Newton, Euler, Lagrange, Laplace, d'Alembert aj. A byla to právě fyzika, která přicházela s potřebou rozšiřovat pojmy matematické analýzy a také zobecňovat integrál. Např. problémy chvění struny, vedení tepla nebo zkoumání potenciálu rychlosti vedly k rozvoji diferenciálních rovnic, nekonečných Fourierových řad a integrálu.

Úvodem připomeňme hlavní úspěchy a problémy matematické analýzy na konci 17. století.

Hlavním předmětem zkoumání se staly proměnné veličiny, studium pohybů a změn vůbec. Byly nalezeny matematické popisy řetězovky (křivky, kterou vytváří těžké vlákno zavěšené na svých koncích), křivek zrcadel, geodetických křivek na plochách, tvarů zatížených nosníků, tvarů plachet napjatých větrem atd. V souvislosti s tím bylo třeba řešit čistě matematické problémy spojené s určováním tečen a normál křivek, poloměrů a středů křivostí, inflexních bodů a výpočty maxim a minim.

Matematici 17. století obohatili matematiku o pojmy, které vystihovaly přírůstky veličin o nekonečně malé hodnoty. Starý geometrický a slovní popis ustupoval novějšímu způsobu algebraického zápisu vztahů pomocí symbolů pro veličiny a jejich přírůstky, který vedl k diferenciálním rovnicím v Leibnizově škole a k rovnicím s fluxemi v Newtonově škole.

Na konci 17. století začali bratři Bernoulliové a Leibniz používat termín funkce. O několi let dříve zavedl Leibniz termíny proměnná, konstanta a parametr.

Pokud jde o názvy „diferenciální počet“ a „integrální počet“, zavedl první z nich Leibniz už v roce 1684 a to místo dříve používaného názvu „přímá metoda tečen“. Název „integrální počet“ (calculus integralis) zavedl Leibniz roku 1698 po dohodě s Johannem Bernoullim, a to místo dřívějšího termínu „inverzní metoda tečen“ neboli „sumační počet“ (calculus summatorius).

Nejvážnějším problémem matematické analýzy na konci 17. století byl však její nespolehlivý základ – úvahy o nekonečně malých veličinách.

Leibniz sám měl jisté pochybnosti o aktuální existenci infinitezimálních veličin, jeho opatrnost však nesdíleli jeho následovníci, například bratři Bernoulliové. Nekriticky přijali infinitezimální veličiny jako skutečné matematické entity a bez pochybností o základech matematické analýzy rychle tuto vědu rozvíjeli a používali pro praktické výpočty. Tento postoj byl v rozvoji matematiky v 18. století dominantní.

Ozvaly se však i kritické hlasy. Např. roku 1734 se anglikánský biskup **George Berkeley** (1685 – 1753) kriticky vyjádřil o infinitezimálních veličinách, které přirovnal k „duchům zemřelých veličin“ – ty jednou jsou nulové a pak zase nejsou, podle potřeby operací, které se s nimi provádějí. Jeho hlavní odpor byl namířen proti Newtonově teorii fluxí, zvláště pak proti fluxím vyšších řádů.

Stejně jako Newton měl své odpůrce, tak i Leibniz musel čelit mnoha výtkám. Jedním z jeho nejzanícenějších kritiků byl **Bernhard Nieuwentijt** (1654 – 1718), který tvrdil, že diferenciály vyšších řádů nemají žádný smysl. Jeho výtky však nepatřily jen Leibnizovi, ale všem přívržencům diferenciálního počtu, zvláště pak bratřím Bernoulliům a l'Hospitalovi.

Tyto kritiky vyvolaly živou polemiku, která pak pokračovala mezi matematiky s velkou intenzitou celé 18. století a která vedla k pokusům vyložit základní pojmy infinitezimálního počtu bez logických sporů. Někteří se snažili vyhýbat použití nekonečně malé veličiny a pracovali jen s konečnými přírůstky Δx, jiní se zabývali limitním přechodem a připravovali půdu pro definici spojitosti, limity a derivace, jak je zavedli později Cauchy a Bolzano. Další skupinu matematiků tvořili ti, kteří odmítali pojem nekonečně malé veličiny vůbec a snažili se odůvodnit infinitezimální počet algebraickou cestou.

Z těch, kteří se snažili tyto problémy vyřešit tím, že pracovali jen s konečnými diferencemi, jmenujme Newtonova následovníka **Brooka Taylora** (1687 – 1731), který je však znám především publikací vztahu pro rozvoj funkcí do mocninných řad, tzv. Taylorovou řadou:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

Dalším obhájcem Newtových idejí byl **Colin Maclaurin** (1698 – 1746); rozpracoval jeho metodu fluxí a uplatnil kinematický přístup při konstrukci rovinných křivek různých stupňů. Na obranu Newtona proti kritice Berkeleyho napsal knihu *Treatise of Fluxion* (1742), v níž pomocí pohybu objasňoval fluxe vyšších řádů a to zavedením zrychlení vyšších řádů. Jméno Maclaurina je také spojováno s Taylorovou řadou se středem v bodě nula. Maclaurin se na rozdíl od Taylora zabýval i otázkami konvergence řad a vytvořil dokonce tzv. integrální kritérium pro nekonečné řady.

První skutečný krok k vyřešení problémů o nichž mluvil Berkeley udělal **Jean Baptiste Le Rond d'Alembert** (1717 – 1783) tím, že se pokusil definovat derivaci jako limitu poměru přírůstků veličin. Jeho myšlenky bychom dnes zapsali vztahem

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Tato jeho definice je nesporným krokem k dnešní definici derivace pomocí limity, na rozdíl od dřívějších pojetí derivace jako poměru diferenciálů nebo fluxí.

J. d'Alembert

Stejně jako Maclaurin, tak i d'Alembert vyšel při svých úvahách z Newtonovy teorie fluxí. Své názory vyložil ve statích *Différentielle* a *Limite*. D'Alembertova metoda se jen nepatrně lišila od Newtonovy metody prvních a posledních poměrů; d'Alembert však přiblížil toto pojetí matematikům Evropy tím, že používal Leibnizovy symboliky. Jeho definice zněla asi takto: *Jedna veličina je limitou druhé veličiny, jestliže tato druhá se může přiblížit k první více, než je libovolná daná veličina, ať je tato poslední jakkoli malá, přičemž však přibližující se veličina nikdy nemůže předstihnout veličinu, ke které se blíží.* Aby se vyhnul operacím s nulami, vyslovil d'Alembert ještě požadavek, že limita se nesmí ztotožnit s žádnou hodnotou proměnné.

Velkou nevýhodou nově vznikající teorie limit bylo to, že neměla žádný algoritmický aparát, který by sloužil k nalezení limit. Proto se v 18. století objevila ještě jedna koncepce základů analýzy, a to koncepce „algebraická“. Její podstata byla v tom, že chtěla derivace funkcí nalézt algebraickým způsobem nikoliv pomocí mlhavých pojmů nekonečně malé veličiny a limity.

Tento přístup prosazuje **Joseph Louis de Lagrange** (1736 – 1813) ve své knize *Théorie des Fonctions Analytiques* (1797), která měla dát pevné základy infinitezimálnímu počtu tím, že ho redukovala na algebru. Lagrange přitom odmítl teorii limit, jak byla naznačena Newtonem a formulována d'Alembertem. Jeho metoda se opírá o konstrukci a vlastnosti Taylorovy řady, kterou odvozuje i se zbytkem, přičemž ukazuje zcela naivním způsobem, že „libovolnou funkci“ lze čistě algebraickým postupem rozvinout v tuto řadu.

Ačkoliv se ukázalo, že tento „algebraický“ přístup je neuspokojivý, mj. proto, že Lagrange nevěnoval dostatečnou pozornost otázce konvergence řad, znamenalo abstraktní zkoumání funkce značný krok vpřed. Zde se poprvé objevila teorie funkcí jedné reálné proměnné s aplikacemi na velkou řadu problémů algebry a geometrie. Taylorova řada hrála centrální roli v teorii nekonečných řad, která se v 18. století mohutně rozvíjela, a vedla také matematiky ke studiu základních vlastností spojitých funkcí.

Jak již bylo řečeno, základy matematické analýzy v období jejího vzniku skutečně stály na nejasných představách; používání metod pro praktické výpočty bylo spíše otázkou víry než rozumu. K situaci se dosti příléhavě vyjádřil ď Alembert: „Jděme vpřed, důvěra se dostaví později!“ Onen postup vpřed je nejtypičtějším znakem rozvoje matematické analýzy 18. století. Díky rozvoji integračních metod bylo získáno mnoho důležitých transcendentních funkcí, díky rozvoji nekonečných řad mohly být tyto funkce integrovány atd.

Ilustrujme tyto vzájemné vztahy mezi integrováním a nekonečnými řadami na několika příkladech. Již v 17. století dokázali Wallis, Newton, Leibniz a Gregory pomocí integrace rozložit funkci $\mathrm{tg}^{-1}\, x$ (tj. funkce inverzní k funkci

$\operatorname{tg} x$) do nekonečné řady:

$$\operatorname{tg}^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots)dt =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Obdobně odvodili rozvoj funkce logaritmické

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots ,$$

a díky znalosti inverzních funkcí i funkci exponenciální e^x. A tak byly získány mnohé důležité transcendentní funkce – logaritmy, exponenciální a hyperbolické funkce, ... – pomocí integrace algebraických funkcí a využitím inverzních operací.

K rozkladu racionálních funkcí do mocninných řad sloužila binomická řada

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots ,$$

kterou nezávisle na sobě objevili Newton (1668) a J. Gregory (1670).

Uveďme nyní několik dalších významných matematiků 18. století, kteří svými objevy v různých oblastech matematické analýzy přispěli i když nepřímo k rozvoji integračních metod a k upřesňování základů, na nichž byl integrální počet vystavěn.

Mezi významné matematiky přelomu 17. a 18. století patří bezpochyby bratři **Jakob Bernoulli** (1654 – 1705) a **Johann Bernoulli** (1667 – 1748). Jakob studoval na univerzitě v Basileji, kde se také roku 1687 stal profesorem matematiky. Mladší bratr Johann studoval také v Basileji, byl žákem Jakoba a po jeho smrti nastupuje na jeho profesorské místo.

Spolu se stávají prvními následovníky Leibnize, s nímž vedli rozsáhlou korespondenci. V devadesátých letech 17. století si osvojili Leibnizovu analýzu a dále ji rozvíjeli.

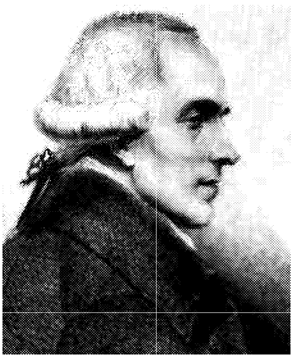
Johann Bernoulli napsal v letech 1691 – 1692 dvě malá pojednání o diferenciálním a integrálním počtu. Krátce potom vyučoval mladého markýze de l'Hospitala a předal mu některé své výsledky. Markýz **Guillaume François de l'Hospital** (1661 – 1704) je roku 1696 publikoval ve své knize *Analyse des infiniment petites pour l'intelligence des lignes courbes* (*Analýza nekonečně malých veličin ve studiu křivek*), která se stala první učebnicí diferenciálního a integrálního počtu. Kniha je dnes známa především díky Bernoulliho výsledku, tzv. „l'Hospitalovu pravidlu" pro určení limity podílu dvou funkcí, v němž se jak čitatel, tak jmenovatel blíží k nule.

Jakob i Johann se také v těsné souvislosti s výpočty integrálů věnovali problematice nekonečných řad, využívali je při výpočtech integrálů složitých algebraických a transcendentních funkcí. Johann je např. autorem vynikajícího výsledku

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots,$$

který je možno dokázat užitím rozkladu do řad a integrací po částech. Na konci 17. století se stal velkým problémem součet řady $\sum \frac{1}{n^2}$. Bratři Bernoulliové se v sérii prací z let 1689 – 1704 pokoušeli najít součet této řady. I když dokázali najít součty mnoha řad, mezi nimi např. $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, $\sum \frac{1}{n^2-1}$, výše zmíněnou řadu se jim sečíst nepodařilo. Tento problém nakonec rozřešil Euler a to teprve v letech 1735 – 36.

Oba bratři se také hodně věnovali vlastnostem speciálních křivek (Jakob si dokonce nechal vytesat logaritmickou spirálu na svůj náhrobek). Z výsledků Jakobových jmenujme např. použití polárních souřadnic, studium řetězovky, lemniskáty, spolu s Johannem studovali např. izochronu (křivka, po níž padá těleso rovnoměrnou rychlostí), brachystochronu (křivka, po níž urazí hmotný bod nejrychleji vzdálenost mezi dvěma body v gravitačním poli) nebo tautochronu (křivka, po níž hmotný bod v gravitačním poli dosáhne nejnižšího bodu v čase nezávislém na výchozím bodě). V těsné souvislosti se studiem těchto křivek Jakob i Johann rozpracovávali teorii obyčejných diferenciálních rovnic. Na jejich práci navázal Johannův syn **Daniel** (1700 – 1782), který vytvořil teorii chvění strun a vykonal pionýrskou práci v oboru parciálních diferenciálních rovnic. Z dalších oborů, do kterých Bernoulliové výrazně zasáhli, jmenujme ještě variační počet a teorii pravděpodobnosti.



P. S. Laplace

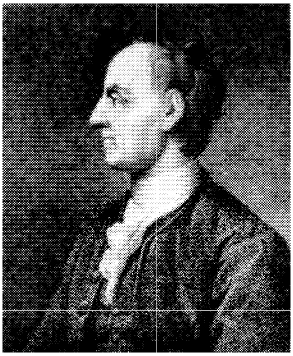
Dalším významným matematikem a fyzikem 18. století byl markýz **Pierre Simon de Laplace** (1749 – 1827). V matematické analýze je jeho životním dílem pětisvazková *Méchanique céleste.* Zde uvádí např. integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi},$$

dnes známý jako Laplaceův pravděpodobnostní integrál, rovnici pro potenciál nebo tzv. Laplaceovu integrální transformaci sloužící k řešení diferenciálních rovnic operátorovou metodou.

Největším matematikem 18. století je **Leonhard Euler** (1707 – 1783).

Euler byl žákem Johanna Bernoulliho. Celý svůj život věnoval matematice. Celkový počet jeho děl a prací dosahuje závratného čísla 886. Euler přispěl významnými objevy ke všem odvětvím matematiky (kombinatorika, teorie čísel, diferenciální rovnice, variační počet, ...). Kromě obrovského množství vědeckých děl napsal řadu rozsáhlých učebnic, které měly takovou autoritu, že ustálily symboliku v mnoha matematických odvětvích. Ani úplná ztráta zraku nepodlomila jeho mimořádnou výkonnost. Slepý Euler, který měl fenomenální paměť, v následujících letech alespoň diktoval své objevy.



L. Euler

Připomeňme, že Euler jako první definuje logaritmus jako exponent, zavádí známé číslo e jako základ přirozeného logaritmu; definuje ho pomocí nekonečné řady a vypočítává na 23 desetinných míst.

Roku 1748 vydává *Introductio in analysin infinitorum* (*Úvod do analýzy nekonečného*), kde mimo jiné vykládá teorii nekonečných řad včetně rozvojů funkcí e^x, $\sin x$, $\cos x$ a vztahu $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$. Tento vztah, který dává do souvislosti funkci exponenciální a funkce $\sin x$ a $\cos x$, byl však objeven už dříve, zřejmě Johannem Bernoullim. Křivky a plochy vyšetřuje Euler algebraicky tak lehce, že lze tuto knihu považovat za první učebnici analytické geometrie.

Za učebnice diferenciálního a integrálního počtu, jakož i teorie diferenciálních rovnic, lze považovat *Institutiones calculi differentialis* (*Základy diferenciálního počtu*) z roku 1755 a třísvazkovou *Institutiones calculi integralis* (*Základy integrálního počtu*) z let 1768 – 1774.

Pro ilustraci uveďme např. způsob, jakým Euler derivuje nekonečné řady a funkce. Jeho přístup je založen na výpočtu diferenciálu $dy = y(x+dx) - y(x)$. K jeho úpravě využívá binomického rozvoje a stejně jako matematikové 17. století zanedbává diferenciály vyšších řádů $(dx)^2, (dx)^3, \ldots$. Ukažme jeho postup na následujících příkladech:

Příklad 1. Derivace funkce $y = x^n$:

$$dy = (x+dx)^n - x^n = (x^n + nx^{n-1}dx + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}(dx)^2 + \cdots) - x^n$$

$$dy = nx^{n-1}dx \quad \text{a odtud} \quad y' = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

Příklad 2. Derivace funkce $y = \sin x$:

$$dy = \sin(x+dx) - \sin x = \sin x \cos dx + \cos x \sin dx - \sin x =$$

$$= (\sin x)(1 - \frac{(dx)^2}{2!} + \frac{(dx)^4}{4!} - \cdots) + (\cos x)(dx - \frac{(dx)^3}{3!} + \frac{(dx)^5}{5!} - \cdots) - \sin x$$

$$dy = \cos x dx \quad \text{a odtud} \quad y' = \cos x.$$

Tímto způsobem Euler derivuje také součin a podíl dvou funkcí, logaritmickou a exponenciální funkci aj.

Euler se také pokusil objasnit pojem nekonečně malé veličiny. Jeho názory na tento pojem se však s postupem času mění. Nejdříve s určitostí tvrdí, že nekonečně malá veličina není rovna nule, později dokazuje, že rovna nule je. V podstatě se však tomuto pojmu snaží vyhnout. Je zajímavé si také všimnout, jak Euler zavádí nekonečně velkou veličinu: pro něho je výsledkem dělení konečné veličiny veličinou nekonečně malou, tj. $\frac{a}{dx} = \infty$ a analogicky $\frac{a}{\infty} = dx$.

Centrální roli v Eulerově analýze hrál rozvoj „speciálních funkcí“ do nekonečných mocninných řad. V první polovině 18. století bylo objeveno, že všechny známé rozvoje funkcí jsou jen speciálním případem Taylorovy řady, o které jsme se již zmínili. Plný význam Taylorova rozvoje byl však pochopen teprve tehdy, když ho Euler v roce 1755 použil ve své knize o diferenciálním počtu. Euler byl pravděpodobně největším matematikem v manipulování se řadami. Jedním z důkazu jeho skvělého úsudku je nepochybně součet řady $\sum \frac{1}{n^2}$. Jako první dospěl k následujícímu výsledku $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$.

Euler poprvé jasně formuloval názor, že matematická analýza je obecná věda o funkcích. Pojem funkce však byl poněkud odlišný od toho, jak jej známe dnes. Obecně lze říci, že „v době Eulera“ se pod pojmem funkce rozuměl jistý analytický výraz reprezentovaný mocninnou řadou.

První definici funkce v našem současném pojetí podal v roce 1718 Johann Bernoulli:

Funkcí proměnné veličiny se nazývá veličina, která je sestavena libovolným způsobem z proměnné veličiny a konstant.

Euler byl v roce 1748 přesnější:

Funkce proměnné veličiny je analytický výraz sestavený libovolně z této proměnné veličiny a konstantních veličin.

Sám Euler však cítil, že pojetí funkce jako analytického výrazu pro matematiku nestačí. Roku 1755 uvádí novou, širší definici:

Když některé veličiny závisí na jiných tak, že při změně těchto (druhých) se také pozmění, říkáme, že první jsou funkcí druhých. Tento název má mimořádně široký charakter a zahrnuje všechny možné způsoby, jak lze jednu veličinu vyjádřit pomocí jiných veličin.

J. Fourier

Euler se viditelně snažil o co nejobecnější pojetí funkce. Postupně se totiž ukazovalo, že úzce chápaná analytická koncepce vede k vážným nejasnostem a potížím. Obzvláště zřetelně to vystávalo například při řešení problému kmitající struny, jednoho z nejdůležitějších problémů matematické fyziky 18. století.

Významným stimulem pro další vývoj pojmu funkce (ale i integrálu) bylo rozšiřování a prohlubování poznatků o trigonometrických řadách.

Významným matematikem, který se zabýval zkoumáním funkcí a jejich vlastností byl **Joseph Fourier** (1768 – 1830). Ten postupně narušil vžité představy o tom, že funkce, které lze vyšetřovat, musí být spojité. Připouštěl však jen konečný počet bodů nespojitosti.

Příklady „hodně“ nespojitých funkcí se objevily až později. Např. roku 1829 uvedl P. G. L. Dirichlet funkci nespojitou v každém bodě, dnes známou jako Dirichletovu funkci. Dirichlet už podává moderní definici funkce: *y je funkce x, jestliže každé hodnotě x z daného intervalu odpovídá jediná hodnota y* a dodává, že není podstatné, jestli existuje vzorec, který by tuto závislost popisoval.

Pojem spojitosti funkce, jak jej známe dnes, byl zaveden Bolzanem a Cauchym až v 19. století.

⋆ ⋆ ⋆

Přínosem období 16. – 18. století byly jednak dílčí výsledky ve výpočtech obsahů a objemů a zejména pak vytvoření diferenciálního a integrálního počtu Newtonem a Leibnizem. Tím byl položen základ pro počítání s nekonečně malými veličinami a připravena půda pro přesnou definici integrálu pomocí integrálních součtů, s níž jsme se v její intuitivní podobě setkali např. u Archiméda.

Pro 18. století je typický rozvoj výpočetních postupů, které byly užívány zejména ve fyzikálních resp. technických aplikacích matematiky.