

# **DYSKALKULIE**

## **A DALŠÍ SPECIFICKÉ PORUCHY UČENÍ V MATEMATICE**

Růžena Blažková

BRNO 2009

MASARYKOVA UNIVERZITA  
Katedra matematiky  
Katedra speciální pedagogiky

Publikace byla vydána v rámci řešení výzkumného záměru Pedagogické fakulty MU „Speciální potřeby žáků v kontextu Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání“ č. VZ MSM 0021622443.

Recenzenti: Doc. PaedDr. Miroslava Bartoňová, Ph.D.  
Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

ISBN 978-80-210-5047-1

© Růžena Blažková

## OBSAH

Úvod .....	6
<b>1. Specifické poruchy učení .....</b>	<b>7</b>
1.1. Terminologie .....	9
1.2. Formy poruch .....	9
1.3. Klasifikace poruch učení .....	11
1.4. Definice dyskalkulie .....	12
1.5. Klasifikace dyskalkulie .....	14
1.5.1. Klasifikace podle L. Košče .....	14
1.5.2. Klasifikace podle J. Nováka .....	15
1.5.3. Klasifikace podle matematického obsahu .....	16
1.5.4. Základní kritéria .....	16
1.6. Další příčiny poruch učení v matematice .....	17
1.6.1. Obsah učiva matematiky .....	17
1.6.2. Osobnost žáka .....	17
1.6.3. Osobnost učitele .....	18
1.6.4. Vliv rodičů .....	18
1.6.5. Společenské postavené osobnosti .....	19
<b>2. Rozvoj předčíselných představ .....</b>	<b>20</b>
2.1. Pojem přirozeného čísla .....	20
2.2. Postupné vytváření pojmu čísla u dětí .....	21
2.3. Propedeutická cvičení vyplývající z běžných činností a her ...	22
2.4. Činnosti směřující k vytvoření pojmu čísla .....	24
2.4.1. Třídění .....	24
2.4.2. Přiřazování .....	25
2.4.3. Uspořádání .....	26
2.5. Přirozená čísla .....	26
2.5.1. Význam čísla .....	28
2.5.2. Počítání po jedné .....	29
2.5.3. Příprava na operace s přirozenými čísly .....	29
2.6. Geometrické představy .....	30
<b>3. Čísla přirozená .....</b>	<b>32</b>
3.1. Systematický přístup při budování pojmu přirozeného čísla	34
3.2. Budování pojmu přirozeného čísla v mladším školním věku	35
3.2.1. Teoretická podstata pojmu přirozeného čísla .....	35
3.2.2. Význam čísla, číselné soustavy .....	36
3.3. Problémy dětí v oblasti chápání pojmu přirozeného čísla ...	40
3.4. Reedukační postupy .....	41

<b>4. Porovnávání přirozených čísel</b> .....	43
4.1. Porovnávání přirozených čísel s využitím zobrazení .....	43
4.2. Porovnávání přirozených čísel s využitím číselné osy .....	44
4.3. Porovnávání přirozených čísel s využitím zápisu v desítkové Soustavě .....	45
4.4. Problémy dětí při porovnávání přirozených čísel .....	45
4.5. Reedukační postupy .....	47
<b>5. Zaokrouhlování přirozených čísel</b> .....	48
5.1. Teoretická východiska .....	48
5.2. Problémy dětí při zaokrouhlování přirozených čísel .....	49
5.3. Reedukační postupy .....	49
<b>6. Rozklady přirozených čísel</b> .....	50
6.1. Rozklad čísla na dvě části .....	50
6.2. Rozklad čísla na desítky a jednotky .....	51
6.3. Rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě .....	51
6.4. Rozklad čísla na součin činitelů .....	51
6.5. Rozklad pro dělení mimo obor násobitek .....	52
<b>7. Sčítání přirozených čísel</b> .....	53
7.1. Pamětné sčítání .....	53
7.2. Problémy dětí při pamětném sčítání .....	57
7.3. Reedukační postupy .....	58
7.4. Písemné sčítání .....	58
7.5. Problémy dětí při písemném sčítání .....	60
7.6. Reedukační postupy .....	61
<b>8. Odčítání přirozených čísel</b> .....	61
8.1. Pamětné odčítání .....	61
8.2. Problémy dětí při pamětném odčítání .....	66
8.3. Reedukační postupy .....	67
8.4. Písemné odčítání .....	67
8.5. Problémy dětí při písemném odčítání .....	69
8.6. Reedukační postupy .....	70
<b>9. Násobení přirozených čísel</b> .....	70
9.1. Násobení v oboru násobitek .....	70
9.2. Násobení mimo obor násobitek z paměti .....	73
9.3. Problémy dětí při pamětném násobení .....	73
9.4. Reedukační postupy .....	74
9.5. Písemné násobení .....	74
9.6. Problémy dětí při písemném násobení .....	76

9.7. Reedukační postupy .....	77
<b>10. Dělení přirozených čísel .....</b>	<b>77</b>
10.1. Pamětné dělení .....	77
10.2. Problémy dětí při pamětném dělení v oboru násobitek ... ..	80
10.3. Reedukační postupy .....	80
10.4. Dělení mimo obor násobitek .....	80
10.4.1. Dělení se zbytkem .....	80
10.4.2. Problémy dětí při dělení se zbytkem .....	81
10.4.3. Dělení mimo obor násobitek zpaměti .....	81
10.5. Reedukační postupy .....	82
10.6. Písemné dělení .....	82
10.7. Problémy dětí při písemném dělení .....	84
10.6. Reedukační postupy .....	84
<b>11. Používání závorek, pořadí operací .....</b>	<b>85</b>
11.1. Teoretická východiska .....	85
11.2. Problémy dětí .....	85
11.3. Reedukační postupy .....	85
<b>12. Vytváření geometrických představ .....</b>	<b>86</b>
12.1. Základní geometrické pojmy a geometrické útvary .....	87
12.2. Problémy dětí v geometrii .....	87
<b>13. Hodnocení dětí s poruchami učení .....</b>	<b>88</b>
<b>14. Individuální vzdělávací program .....</b>	<b>89</b>
<b>15. Reedukace dyskalkulie .....</b>	<b>92</b>
<b>16. Komunikace v matematice .....</b>	<b>93</b>
16.1. Komunikace v oblasti čtení matematického textu .....	94
16.2. Komunikace verbální .....	95
16.3. Komunikace verbálně symbolická .....	95
16.4. Komunikace grafická .....	96
16.5. Komunikace graficky symbolická .....	96
16.6. Komunikace obrazově symbolická .....	96
16.7. Komunikace obrazově názorná .....	97
<b>17. Výzkumné šetření .....</b>	<b>98</b>
<b>18. Závěr .....</b>	<b>100</b>
<b>Literatura .....</b>	<b>101</b>
<b>Rejstřík .....</b>	<b>104</b>

## ÚVOD

Problematika specifických poruch učení a zejména dyskalkulie je předmětem zájmu pedagogických pracovníků i širší veřejnosti, rodičů nebo prarodičů. Včasná diagnostika problémů dětí v matematice a volba vhodných reedukačních a kompenzačních postupů může ušetřit dítě mnoha nedorozumění, které výuka matematiky může přinášet.

Monografie je výsledkem dlouholeté konkrétní činnosti s dětmi, u kterých se projevovaly výukové problémy v matematice, byly pro ně sestavovány vhodné individuální vzdělávací programy a hledány cesty ke zmírnění jejich potíží. Výzkumná práce se zaměřila na případové studie, na jejichž základě se sestavovaly vhodné postupy pro konkrétní děti. Hledaly se příčiny problémů, jak v oblasti osobnostních vlastností dětí, tak v oblasti matematické podstaty učiva i vhodných výukových postupů právě pro toto konkrétní dítě. Problémy dětí jsou výrazně individuální, avšak některé přístupy k výuce mohou mít obecnější charakter a platnost. U většiny dětí bylo nutné názorné vysvětlení, které se opíralo o matematickou podstatu dané problematiky a ukázalo se jako nemožné spoléhat pouze na pamětné zvládnutí učiva. Vzhledem k současnému trendu vzdělávání dětí se specifickými vzdělávacími potřebami v rámci běžných základních škol je třeba hledat vhodné přístupy k jednotlivým dětem a účinné výukové postupy. S nimi je pak třeba seznamovat učitelskou i rodičovskou veřejnost. Při našem výzkumu se ukázalo, že některé navrhované reedukační postupy je možné uplatnit u všech dětí, které jsou v matematice méně úspěšné, tedy i u těch, které nemají dyskalkulii přímo diagnostikovanou.

Obsah publikace je zaměřen na učivo 1. stupně základní školy, zejména na obor přirozených čísel. Jednotlivé kapitoly podrobně analyzují podstatné jevy, které jsou důležité pro správné pochopení daného učiva a jsou východiskem reedukačních postupů. Pokud děti zvládnou základní elementy daného učiva, mohou být úspěšnější i v dalších tématech učiva matematiky. Kapitoly jsou vesměs uvedeny příběhem, který navozuje danou problematiku.

V závěru je prezentován výsledek výzkumu o procentuelním počtu dětí s vývojovými poruchami učení a s dyskalkulií, který byl proveden na základních školách v roce 2007.

## 1. SPECIFICKÉ PORUCHY UČENÍ

Problematika specifických poruch učení a vzdělávání žáků se specifickými vzdělávacími potřebami je aktuálním tématem jak školy, tak mnoha rodin. Inkluzivní vzdělávání žáků s poruchami učení v běžných třídách základních i středních škol vyžaduje kvalifikovaný přístup pedagoga v souvislosti s diferencovanou a individualizovanou výukou těchto žáků.

V minulosti nebyla této problematice věnována přílišná pozornost a žáci, u kterých se projevovaly problémy v učení, byli řazeni do dvou až tří skupin – prostě jim “to nešlo“, nebo byli považováni za hloupé, nebo za líné. Přitom se řádně připravovali na vyučování a zvládání školních povinností vyžadovalo nepřiměřeně mnoho času a úsilí. Častokrát se problémy vyskytovaly v jednom předmětu a v ostatních předmětech dosahovali tito žáci průměrných až nadprůměrných výsledků.

Z historického hlediska se již od starověku, např. při výuce trivia, hledaly metody, které by žákům, kteří měli se zvládním těchto základů problémy, vzdělávání usnadnily. Mnoho významných vědců a pedagogů v dalších obdobích věnovalo pozornost žákům, kteří měli výukové problémy a přitom byli intelektově na dobré úrovni. Patří mezi ně např. Erasmus Rotterdamský (1567 – 1636), Jan Amos Komenský (1592 – 1670), John Looke (1632 – 1704), Johan Heinrich Pestalozzi (1746 – 1827), Johan Fridrich Herbart (1776 – 1841) a mnoho dalších. Z našich vědců a pedagogů, kteří se poruchám učení věnovali, uveďme alespoň O. Chlupa, Z. Matějčka, L. Košče, J. Langmaiera, Z. Žlaba, ze současných např. M. Bartoňovou, V. Pokornou, O. Zelinkovou.

Specifické poruchy učení začaly být systematicky studovány psychology a speciálními pedagogy v minulém století. V roce 1976 vydal Úřad pro výchovu v USA definici specifických vývojových poruch učení v tomto znění: *„Specifické poruchy učení jsou poruchami v jednom nebo více psychických procesech, které se účastní porozumění nebo užívání řeči, a to mluvené i psané. Tyto poruchy se mohou projevovat v nedokonalé schopnosti naslouchat, myslet, číst, psát nebo počítat. Zahrnují stavy, jako je např. narušené vnímání, mozkové poškození, lehká mozková dysfunkce, dyslexie, vývojová dysfázie atd.“*

(In: Matějček 1987)

Skupina expertů Národního ústavu zdraví ve Washingtonu spolu s experty Ortonovy společnosti a dalších institucí formulovali v roce 1980 následující definici: *„Poruchy učení jsou souhrnným označením různorodé skupiny poruch, které se projevují zřetelnými obtížemi při nabývání a užívání takových dovedností, jako je mluvení, porozumění mluvené řeči, čtení, psaní, matematické usuzování nebo počítání. Tyto poruchy jsou vlastní postiženému jedinci a*

*předpokládají dysfunkci centrálního nervového systému, i když se porucha učení může vyskytovat souběžně s jinými formami postižení (např. kulturní zvláštnosti, nedostatečná nebo nevhodná výuka, psychogenní činitelé), není přímým následkem takových postižení nebo nepříznivých vlivů.“ (In: Matějček 1987)*

V roce 1992 byly v 10. revizi Mezinárodní klasifikace nemocí uvedeny v oddíle F 80 až F 89 Poruchy psychického vývoje a v části F 81 Specifické vývojové poruchy školních dovedností:

F 81.0 Specifické poruchy čtení

F 81.1 Specifické poruchy psaní

F 81.2 Specifické poruchy počítání

F 81.3 Smíšená porucha školních dovedností

F 81.8 Jiné vývojové poruchy školních dovedností

F 81.9 Vývojové poruchy školních dovedností nespecifikované

(Mezinárodní klasifikace nemocí 1992).

Postupně byly zkoumány poruchy čtení, psaní, počítání a dalších schopností a dovedností. Začaly se systematicky zkoumat příčiny těchto poruch a začaly se hledat edukační postupy, kterými by bylo možno pomoci žákům tyto problémy překonávat.

Dyskalkulie a další poruchy učení v matematice jsou také zpravidla poruchami v komunikaci mezi dítětem a světem. Kvantitativní jevy a prostorové objekty existují nezávisle na nás a je třeba najít cestu, jak je dekodovat. Souvisí to s procesem vnímání kvantity, procesem učení, procesem zobecňování. Snahou je učit děti matematice na úrovni, jaké jsou schopny, prostřednictvím zážitků, postupem „4 P“:

- POHODA – atmosféra bez napětí a strachu.
- PROŽITEK – získávání pojmů na základě vlastních prožitků při manipulativní a myšlenkové činnosti.
- POZNÁNÍ – vnímání matematických objektů a pojmů, jejich vlastností, shod a odlišností, postupné vytváření systému.
- POROZUMĚNÍ – navození „AHA efektu“ – už vím, jak a proč to tak je.

Problémy dětí v matematice mohou mít nejrůznější příčiny. Mohou to být lehké mozkové dysfunkce, nesprávný způsob vyučování, negativní postoj k matematice a k učení, nedostatečná příprava na vyučování a mnoho dalších. Příčiny jsou různé, avšak jejich analýza a pochopení problémů se dětem často nedostává. Dospělí velmi často neodkážou odhalit myšlenkové procesy, které probíhají v mozku dítěte při práci s matematickými pojmy, snaží se sice hledat pomoc, ale ta může být v mnoha případech neúčinná. Někdy je založena na pouhém pamětném zapamatování si faktů, na uplatňování nevhodných výukových metod, někdy vychází z nesprávných předpokladů a pod.



Účinná pomoc je taková, která odhalí pravou příčinu problému dítěte a připraví cílenou nápravu právě pro toto dítě. Přitom dětem nestačí pouhé procvičování na základě pamětného učení, ale jde o pochopení podstaty matematického učiva a jeho užitečnosti pro praktický život a zároveň o respektování poznávacích schopností dětí. V následujícím textu se zamyslíme nad matematickou podstatou poruch učení a uvedeme náměty pro nápravná opatření a ukázky možných reedukačních cvičení.

## 1.1. TERMINOLOGIE

Při práci s dětmi se specifickými vzdělávacími potřebami se často setkáváme s různými odchylkami, které se projevují snížením vnímání, pozornosti, paměti, řeči, motoriky, aj. a které jsou zpravidla způsobeny odchylkami funkce centrálního nervového systému. Přitom mohou, ale nemusí mít vliv na úspěšnost dětí ve škole. Bývají uváděny následujícími zkratkami:

LMD – lehká mozková dysfunkce

LDE – lehká dětská encefalopatie

Syndrom lehké mozkové dysfunkce se projevuje u dětí, které mohou mít průměrnou až nadprůměrnou inteligenci a jejich problémy v učení nebo v chování jsou způsobeny odchylkami funkce centrálního nervového systému.

ADD – Attention Deficit Disorder

Syndrom deficitu pozornosti bez hyperaktivity

ADHD - Attention Deficit Hyperactivity Disorder

Syndrom deficitu pozornosti s hyperaktivitou

SPU – Specifické poruchy učení

## 1. 2. FOMY PORUCH

Ve školské praxi se častokrát setkáme s dětmi, u kterých se projevují některé z následujících problémů a ty ovlivňují úroveň osvojování si matematických dovedností a vědomostí:

- **Poruchy koncentrace**

Děti se obtížně koncentrují na určitou činnost, jsou snadno unavitelné, roztěkané, snadno odbíhají od problému, nechávají se vyrušit jakýmkoliv podnětem, který nesouvisí s právě prováděnou činností. Řešení jakéhokoliv matematického úkolu či problému vyžaduje plnou koncentraci a neúspěšnost při řešení může být způsobena právě

neschopností dítěte se na problém soustředit. Děti trpí nedostatkem času, nestíhají, trvá jim déle, než proniknou do podstaty problému. Nejsou dostatečně pohotoví, rychlí – projevuje se to např. tak, že jsou neúspěšné v soutěžích zaměřených na rychlost.

- **Poruchy pravolevé orientace** – nevyhraněná lateralita (preference při užívání jednoho z párových orgánů) způsobuje dětem problémy v matematice, např. při zápisu číslic jednostranně orientovaných, víceciferných čísel, chápání vztahů na číselné ose aj.
- **Poruchy prostorové orientace** – děti žijí v trojrozměrném prostoru a přirozeně vnímají vztahy mezi objekty a rozložení předmětů v prostoru (vztahy nad, pod, nahoře, dole, vedle, vpředu, vzadu, před, za). Problémy však činí pochopení znázornění prostorové situace v rovině pomocí některého ze zobrazení (např. volného rovnoběžného promítání) na obrázku. Dítě velmi dobře ví, co je to např. krychle, ale nechápe změř čar na papíře, které zobrazují krychli a často nepochopí ani nakreslenou síť krychle a dalších těles.
- **Poruchy časové orientace** – děti vnímají časové následnosti nejprve během dne, zpravidla podle událostí a stále se opakujících činností, později pak v delším časovém období (týden, měsíc, rok). Problémy činí pochopení jednotek času a jejich převody, jednak proto, že se užívá číselné soustavy o základu šedesát (1 hodina = 60 minut, 1 minuta = 60 sekund) a jednak proto, že některým činí problémy pochopit vztahy na kruhovém ciferníku a lineárním plynutím času. Rovněž čtení časových údajů zapsaných digitálně může některým dětem přinášet problémy.
- **Poruchy sluchového vnímání** – dítě nemá poruchu sluchu, slyší dobře, ale nevnímá, co se právě řeklo. Často se dotazuje právě na to, co bylo bezprostředně vysloveno. Toto by měl dospělý vítat, neboť dítě ví, na co se má zeptat, když mu to právě uniklo. Navíc ve třídě je určitě více dětí, které také nevnímají sluchově, avšak nezeptají se.
- **Poruchy reprodukce rytmu** – vnímání rytmu a jeho reprodukce je pro matematiku velmi důležité – např. při počítání po jedné, orientace v číselné řadě, sledování zákonitostí, závislostí aj.
- **Poruchy zrakového vnímání** – dítě dobře vidí, avšak nevnímá plně zrakově to, co by měl vnímat jako matematické učivo – např. vidí sice, že 1 dm je rozdělen na 10 cm, ale matematický poznatek o vztahu těchto jednotek a jejich převodu v mozku nevznikne. Dítě není schopno rozlišit změny, orientovat se v geometrickém obrázku apod.
- **Poruchy řeči** – kromě logopedických problémů je v matematice nejdůležitější schopnost formulovat myšlenky vlastními slovy. Přesnost vyjadřování je odrazem přesnosti myšlení. Když dítě sdělí: „Já to vím, ale neumím to říci“, tak zpravidla neví, ale jen něco tuší. Pokud má dítě správně vytvořený poznatek, rozumí podstatě problému, pak jej dokáže

slovně vyjádřit. Od dětí však nevyžadujeme definice matematických pojmů.

- **Poruchy jemné a hrubé motoriky** - projevují se zejména při manipulativních činnostech při vyvozování základních pojmů a operací, při zápisech čísel, zápisech algoritmů operací, zejména pak při rýsování.
- **Poruchy chování jako důsledek poruch učení** – pokud se dětem nedaří v matematice, pak buď na sebe upozorňují jiným způsobem (předváděním se v roli šaška, nekázní), nebo se uzavrou a přestanou komunikovat, což je horší případ. Znovu navázat komunikaci s takovým dítětem bývá náročné.

### 1. 3. KLASIFIKACE PORUCH UČENÍ

Úspěšnost dítěte v matematice je ovlivňována i ostatními specifickými poruchami učení. Pro přehlednost uvedeme všechny popisované poruchy učení a zdůrazníme ty, které mají vliv na výkon žáka v matematice. V odborné literatuře jsou popisovány:

**Dyslexie** – porucha může postihovat rozlišování jednotlivých písmen, rychlost čtení, nebo správnost čtení nebo porozumění čtenému textu. Pro dyslektika je obtížné číst s porozuměním slovní zadání matematických úloh, zejména pak slovních úloh, ve kterých je třeba provést přepis textu uvedeného českou větou do matematického jazyka. Pro některé dyslektiky je náročné číst i symbolický matematický zápis. Mezi dyslektiky můžeme však najít děti, které symbolickému matematickému zápisu rozumí a ten je pak pro ně záchranou v matematice.

**Dysgrafie** - porucha postihuje osvojování si jednotlivých písmen, spojení hláska – písmeno, úpravu písemného projevu. V matematice má dysgrafik problémy s osvojením si jednotlivých číslic a znaků, spojení „číslo“ a „zápis čísla pomocí číslic“, rozlišení pojmů „číslo“ a „číslice“ a jejich zápisem, dále pak zápisu čísel v řádcích (např. neudrží stejnou velikost všech číslic v zápisu víceciferného čísla) nebo v zápisu čísel v algoritmech, kde záleží na přesnosti zápisu čísel podle jednotlivých řádů. Chyby v matematických operacích mohou být způsobené neupraveností zápisu nebo výraznou pomalostí při psaní.

**Dysortgrafie** – porucha pravopisu. Nejde o hrubé chyby způsobené neznalostí, ale o specifické problémy související např. s nerozlišováním sykavek, délky samohlásek, měkčení apod. Může se projevit při tzv. diktovaných pětiminutovkách, kdy má dítě v mysli zvládnout příliš mnoho jevů.

**Dyskalkulie** – porucha postihuje vytváření matematických představ, problémy spojené s operacemi s čísly, poruchy prostorových představ aj. Podrobně bude uvedena v celém dalším textu.

**Dyspinxie** – porucha v oblasti kresebných dovedností, neobratnost při zvládnání jemné motoriky rukou a prstů - projevuje se zejména při rýsování. Rovněž znázornění prostorové situace v rovině, na obrázku, činí dětem obtíže.

**Dysmúzie** – snížení nebo úplná ztráta smyslu pro hudbu – melodii a rytmus. Zejména ztráta smyslu pro rytmus je pro matematiku problémem.

**Dyspraxie** – porucha obratnosti, může mít vliv na upravenost matematických písemných prací, na upravenost rýsovaných obrázků, což může být také způsobeno nešikovností dětí.

#### 1. 4. DEFINICE DYSKALKULIE

Pod pojmem dyskalkulie je označována specifická porucha matematických schopností. Dítě podává v matematice podstatně horší výkony, než by se daly vzhledem k jeho inteligenci očekávat. To znamená, že např. při testování pomocí testů inteligence a testů matematických schopností dítě dosahuje v matematickém testu podstatně horší výsledek než je výsledek inteligenčního testu. Např. H. Simon (2006) uvádí, že v rámci měření inteligence dosáhne dítě více než 70 bodů, výsledky matematického testu se pohybují v dolních 10 % stejné věkové skupiny a odchylka inteligenčního testu je o 1,5 standardních odchylek od výsledku matematického testu. Může se tedy stát, že u mnoha dětí se dyskalkulie jako vývojová porucha učení pomocí testů nepotvrdí, avšak dítě problémy v matematice má.

V literatuře jsou zveřejňovány různé definice dyskalkulie, uvedme alespoň některé. Podle 10. revize Mezinárodní klasifikace nemocí "Duševní poruchy a poruchy chování" patří dyskalkulie mezi "Specifické vývojové poruchy školních dovedností" pod kód F 81.2. (1992).

*„Tato porucha zahrnuje specifické postižení dovednosti počítat, kterou nelze vysvětlit mentální retardací ani nevhodným způsobem vyučování. Porucha se týká ovládnutí základních početních úkonů (sčítání, odčítání, násobení a dělení) spíše než abstraktnějších dovedností jako je algebra, trigonometrie, nebo diferenciální počet.“*

Poznamenejme však, že pokud má dítě problémy v oblasti zvládnutí základních početních úkonů, tak tyto problémy se projeví i v dalších oblastech matematiky, např. v algebře, kde pracuje s koeficienty v algebraických výrazech nebo v rovnicích, nebo exponenty u proměnných a zde se aritmetické problémy znovu objevují.

Další definici dyskalkulie formuloval Ladislav Košč v roce 1985: *"Vývojová dyskalkulie je strukturální porucha matematických schopností, která má svůj původ v genově nebo perinatálními vlivy podmíněném narušení těch částí mozku, které jsou přímým anatomicko-fyziologickým substrátem věku přiměřeného dozrání matematických funkcí, které však zároveň nemají za následek snížení všeobecných rozumových schopností."*

Na tuto definici navazuje J. Novák a podává rozšířenou definici dyskalkulie: *"Vývojová dyskalkulie je specifická porucha počítání projevující se zřetelnými obtížemi v nabývání a užívání základních početních dovedností, při obvyklém sociokulturním zázemí dítěte a celkové úrovni všeobecných rozumových předpokladů na dolní hranici pásma průměru nebo výše a s příznačnou vnitřní strukturou v jejímž rámci je výrazně snížena úroveň matematických schopností a narušena skladba za přítomnosti projevů dysfunkcí centrální nervové soustavy podmíněných vlivy dědičnými nebo vývojovými"*. (Novák 2004).

Na základě naší zkušenosti z konkrétní práce s dětmi, které mají rozumové předpoklady v pásmu průměru, nebo dokonce nadprůměru a u kterých se vyskytovaly problémy v matematice, usuzujeme, že není v přístupu k dítěti rozhodující, zda je či není dyskalkulie diagnostikována, ale že je důležité pochopit individualitu dítěte, jeho specifické problémy v matematice a hledat adekvátní reedukační postupy právě pro toto dítě. Tyto naše zkušenosti jsou v souladu se závěry H. Simona (2006), který v na str. 159 uvádí:

*„Poté, co jsme se seznámili s tolika definicemi a pokusy o definici dyskalkulie (specifické vývojové poruchy matematických schopností, aritmastenie), je třeba ujasnit si dvě věci:*

- 1. Neexistuje žádný jasně definovaný jev „dyskalkulie“. Každé dítě má svůj vlastní soubor potíží s porozuměním, typů chyb, příčin atd.*
- 2. Není pravděpodobně nutné nalézt přesnou definici dyskalkulie.“*

Je však nutné hledat zejména příčiny poruch a rozlišovat je alespoň pole tohoto schématu:

1. Příčiny, které jsou podmíněny vlivy tzv. částečně odstranitelnými, jako je např. styl učení, způsob výuky, vhodnost přípravy na výuku, motivace k učení apod.
2. Příčiny, které jsou odstranitelné obtížněji, jako jsou dědičné vlivy nebo narušení činností těch částí mozku, které mají vliv na utváření matematických schopností.
3. Příčiny, které jsou způsobeny nízkým nadáním pro matematiku nebo nízkým nadáním všeobecně.

Je tedy rozdíl, zda pracujeme s dětmi, které mají specifickou poruchu učení a dětmi, které mají problémy v matematice zaviněné jinou příčinou. Volba nápravných reedukačních a kompenzačních cvičení je pro tyto děti odlišná

v tom smyslu, že některé děti mohou matematické učivo zvládnout vhodným doučováním běžnými výukovými postupy, jiné však potřebují vypracování takových mechanismů, které nahradí postižené funkce nebo je vhodným způsobem rozvíjejí. Problémům je třeba věnovat pozornost zejména v rámci inkluzivního vzdělávání dětí v základních školách.

## **1. 5. KLASIFIKACE DYSKALKULIE**

### **1. 5. 1. Klasifikace podle L. Košče**

Ladislav Košč (1978) uvedl klasifikaci dyskalkulie podle základních problémů, které se u dětí vyskytují v souvislosti s vývojem a budováním matematických pojmů a vztahů, se čtením a psáním matematických výrazů a dělí ji následovně:

#### **Dyskalkulie praktognostická**

- porucha manipulace s konkrétními předměty nebo symboly,
- porucha při tvoření skupin předmětů,
- nepochopení pojmu přirozeného čísla,
- neschopnost porovnat počet prvků,
- neschopnost diferenciacie geometrických útvarů,
- porucha prostorového faktoru.

#### **Dyskalkulie verbální**

- problémy se slovním označováním počtu předmětů, operačních znaků,
- neschopnost vyjmenovat řadu čísel v určitém uspořádání,
- nepochopení vysloveného čísla,
- nepochopení slovního vyjádření matematických symbolů a znaků.

#### **Dyskalkulie lexická**

- neschopnost číst matematické symboly (číslice, čísla, znaky pro porovnávání, znaky operací),
- záměna tvarově podobných číslic,
- porucha orientace v prostoru,
- porucha pravolevé orientace.

#### **Dyskalkulie grafická**

- neschopnost psát matematické znaky (číslice, čísla, a další),
- porucha při zápisu víceciferných čísel,
- neschopnost psát čísla podle diktátu,
- neschopnost zápisu čísel pod sebou (číslíc téhož řádu),
- problémy při rýsování obrazců,

- porucha pravolevé a prostorové orientace.

### **Dyskalkulie operační**

- narušená schopnost provádět matematické operace s přirozenými čísly (ale i s dalšími čísly),
- záměna jednotlivých operací
- poruchy při osvojování si pamětných spojů,
- neschopnost respektovat prioritu při provádění více operací různé parity,
- problémy při písemných algoritmech jednotlivých operací.

### **Dyskalkulie ideognostická**

- porucha v oblasti pojmové činnosti,
- porucha chápání matematických pojmů a vztahů mezi nimi,
- porucha při zobecňování,
- problémy při řešení slovních úloh.

## **1. 5. 2. Klasifikace podle J. Nováka**

Narušení matematických schopností má mnoho nejrozličnějších příčin a projevů a klasifikaci v obecnějším náhledu uvádí J. Novák (2004):

**Kalkulastenie** - rozumí se jí mírné narušení matematických vědomostí a dovedností způsobené např. nedostatečnou stimulací ve škole nebo v rodině, přitom rozumové i matematické schopnosti jsou v pásmu průměru.

Podrobněji klasifikuje kalkulastenie dále na kalkulastenie emocionální (nevhodné reakce okolí na problémy v matematice), kalkulastenie sociální (vliv sociálního prostředí, nedostatečná příprava do školy) a kalkulastenie didaktogenní (nevhodné výukové styly právě pro toto dítě).

**Hypokalkulie** - je porucha základních početních dovedností, jejíž příčinou může být nerovnoměrná skladba matematických schopností, při celkové úrovni rozumových schopností v pásmu průměru i nadprůměru.

**Oligokalkulie** - vyznačuje se narušenou strukturou matematických schopností, a nízkou úrovní všeobecných rozumových schopností.

**Vývojová dyskalkulie** v podstatě používá klasifikaci dyskalkulie podle L. Košče.

**Akalkulie** - je porucha zvládnutí početních operací a početních dovedností, která mohla vzniknout např. na základě prožitého traumatu, přitom dříve byly dovednosti rozvinuty přiměřeně.

### 1. 5. 3. Klasifikace podle matematického obsahu (R.Blažková)

Klasifikace je zaměřena na oblasti učiva, ve kterých se projevují problémy dětí vzhledem k matematickému učivu. Pochopení a zvládnutí jedné oblasti je nezbytným předpokladem k pochopení a zvládnutí oblasti další. Jde zejména o tyto oblasti:

**Vytváření pojmu čísla** – nejprve přirozeného čísla, později čísla desetinného, zlomku, racionálního čísla, obecně reálného čísla.

**Čtení a zápis čísel**, numerace, usprádnání, porovnávání čísel, zaokrouhlování čísel přirozených a desetinných.

**Operace s čísly**, nejprve s čísly přirozenými, později s čísly v dalších číselných oborech.

**Slovní úlohy**, přepis slovního vyjádření do matematického symbolického jazyka, řešení matematické úlohy a její interpretace do reality.

**Geometrická a prostorová představivost**, chápání rozmístění a vztahů předmětů v prostoru a jejich znázornění v rovině.

**Počtení geometrie**, uvědomění si velikosti útvarů, odhady, výpočty.

**Jednotky měř**, pochopení každé z jednotek, převody jednotek.

K tomuto třídění jsme dospěli po dlouholeté práci s dětmi, kdy se ukázalo, že pokud dítě nepochopí podstatu matematického pojmu, neví jak má postupovat a proč má tak postupovat, kdy jsou výsledky operací vyvozovány pouze pamětně, bez opory o pochopení, bez zážitků, není náprava efektivní. Např. problémy se čtením (dyskalkulie lexická) se projevují jak při čtení matematických číslic, čísel, symbolů a výrazů, tak při pochopení zadávacího textu, textu slovních a aplikačních úloh apod. Analogicky problémy se psaním (dyskalkulie grafická) se projevuje ve všech tématech matematického učiva.

### 1. 5. 4. Základní kritéria, podle kterých lze kvalifikovat dyskalkulii

Základní kritéria, podle kterých lze kvalifikovat specifickou vývojovou poruchu v matematice – dyskalkulii, lze uvést takto:

- existuje zřetelný rozpor mezi zjištěnou inteligencí dítěte a jeho úspěšností v matematice,
- úroveň rozumových schopností není v pásmu podprůměru, problémy dítěte nevznikly na základě nemoci nebo na základě sociálním nebo emocionálním,
- dítě je obklopeno normálním rodinným zázemím, které poskytuje pozitivní motivaci,
- na základě odborného vyšetření lze identifikovat dysfunkci centrální nervové soustavy, dysfunkci kognitivních center mozku.



Je třeba si uvědomit, že neexistuje úplná matematická negramotnost nebo tzv. matematická slepota, že každé dítě se určitým způsobem k matematickým pojmům dostane. Dospělý využívá těch matematických poznatků, které jsou nezbytné v jeho profesi.

## **1. 6. DALŠÍ PŘÍČINY SPECIFICKÝCH PORUCH UČENÍ V MATEMATICE**

Kromě specifických poruch učení má na úspěšnost dítěte v matematice vliv řada dalších faktorů. Problémy dětí v matematice mohou být působeny jednak obsahem samotné matematiky, avšak můžeme je najít i v osobnosti žáka, v osobnosti učitele nebo i v rodičích.

### **1. 6. 1. Obsah učiva matematiky**

Matematika je disciplína, která pracuje s abstraktními pojmy a jejich správné vytváření je náročné na psychiku žáka. Má přesnou logickou výstavbu a je budována deduktivně. Proces zobecňování a abstrakce vyžaduje schopnost postupně přecházet od konkrétních představ k obecnějším, a to je pro děti velmi složité. I když se ve školské matematice využívají vesměs induktivní přístupy, určité zobecnění a abstrakce jsou nutné (například již při vytváření pojmu přirozeného čísla). Navíc školská matematika je předmětem, kdy každý prvek nižší úrovně je nezbytným předpokladem zvládnutí prvků vyšší úrovně, tedy děti si musí to, co se již dříve naučily, neustále pamatovat. Například zvládnutí pamětného počítání je nezbytné při počítání písemném, tedy při výuce algoritmů početních operací. Přitom děti neustále využívají paměti dlouhodobé, krátkodobé i pracovní. Podrobně o jednotlivých příčinách problémů bude pojednáno v dalším textu. Zde můžeme uvést pouze zásadní stanovisko:

- a) nejprve je nutné pochopení každého z matematických pojmů,
- b) podle schopností dítěte je třeba stanovit míru vědomostí a dovedností, které je schopno vzhledem ke své poruše učení zvládnout,
- c) neustále je třeba posilovat paměť.

### **1. 6. 2. Osobnost žáka**

Děti se nerozvíjejí stejně rychle, některé myšlenkové operace může mít vyvinuty poněkud později, avšak přitom není snížena úroveň jeho rozumových schopností a ani nemusí trpět specifickou poruchou učení. Příčiny neúspěchů dítěte v matematice mohou být způsobeny určitou nedozrálostí vzhledem k danému učivu. Častokrát se stává, že dítě v daném okamžiku učivo nechápe, ale po určitém časovém úseku (např. za půl roku) chápe toto učivo již bez problémů.

Další příčiny problémů dítěte v matematice souvisejí s jeho volnými vlastnostmi. Matematika vyžaduje každodenní systematickou práci (v malých kvantech). Pokud dítě není schopno k této práci se samo přimět a pokud v jeho okolí není nikdo, kdo by mu pomohl, nemá šanci na úspěch v matematice. Většinou se objeví problém v některém úseku učiva a dítě již není schopno samo navázat a zvládat učivo následující. S malou úspěšností dítěte v matematice souvisí také jeho nepozornost, nezáměr, ale také malé sebevědomí, úzkost, ztráta naděje na úspěch, role outsidera mezi dětmi aj.

Velmi důležité je sledovat tzv. psychické bariéry, kterými jsou např. syndrom bílého papíru – obavy z písemných prací, pětiminutovek, dále obavy ze sloupců příkladů, slovních úloh, některého tématu aj. Tyto psychické problémy jsou velmi závažné a je třeba je vnímat jako varovné signály v práci učitele a v komunikaci s dítětem. Podezírat dítě, že něco tzv. předstírá, je velmi nebezpečné.

### **1. 6. 3. Osobnost učitele**

Nejčastější příčiny poruch učení dětí v matematice, související s osobností učitele, jsou způsobeny nedostatečnou odbornou znalostí učitele, jak v oblasti matematiky, tak v oblasti pedagogicko psychologické a speciálně pedagogické. Dále jsou příčiny poruch ve stylu výuky, který může být dobrý, ale není vhodný právě pro toto dítě, volbě metod práce, dále pak v oblasti komunikace s dětmi, v neostatečné trpělivosti učitele, formálním přístupu k práci s těmito dětmi. Příčiny mohou být také v nedostatečné motivaci dětí k učení i nedostatečné motivaci matematického učiva, v nezvládnutí problematiky hodnocení a klasifikace apod. Pro dítě je velmi málo motivující učitelovo očekávání sníženého výkonu dítěte s poruchou učení bez naděje na zlepšení, nebo nedostatek empatie učitele k dětem s dyskalkulií.

### **1. 6. 4. Vliv rodičů**

Reakce rodičů na poruchy učení v matematice je různá a můžeme uvést několik skupin podle jejich vztahu k dítěti. Do první skupiny můžeme zařadit rodiče, kteří mají pro dítě plně pochopení, spolupracují s pedagogicko psychologickou poradnou i učitelem matematiky a snaží se dítěti pomoci vzhledem k jeho handicapu. Pomáhají mu překonávat problémy v matematice a neočekávají nereálné výsledky. Druhá skupina rodičů jsou rodiče ambiciózní, nepřiměřeně ctižadostiví, kteří nejsou schopni smířit se s tím, že mají dítě s problémy v matematice. Tito rodiče buď dítě odmítají nebo zaujímají trpitelské stanovisko (proč právě my máme takové dítě), nebo dítě přetěžují neustálým doučováním a nepřiměřenými nároky. Někteří rodiče děti trestají, ale nikoliv fyzicky, ale psychicky. Další skupinou rodičů jsou rodiče, kteří se snaží za každou cenu dítěti pomáhat tak, že vymýšlejí nejrůznější postupy a didaktická

zjednodušení, která se však v budoucnu v dalším učivu projeví jako chybná a způsobí dětem další problémy. Další skupina rodičů se sice o dítě zajímá, ale rezignuje a nechá dítě bez odborné pomoci (nedá se nic dělat, my jsme na matematiku také „nebyli“). Existuje také skupina rodičů, kteří nespolupracují ani s poradnou, ani s učitelem a o dítě se nestarají. Práce s rodiči je někdy náročnější než práce s dětmi.

### 1. 6. 5. Společenské postavení osobnosti

Dyskalkulie je specifická porucha učení, avšak dítě má průměrnou až nadprůměrnou inteligenci a často nemusí ovlivnit ani jeho vysokoškolské studium. Postavení člověka ve společnosti může být ovlivněno jeho vývojem v dětství a vztahem k matematice. Buď při rozhodování o volbě povolání vyhledává takové, kde se s matematikou příliš neseťká – např. obory umělecké nebo humanitní, nebo naopak její jeho vývojová porucha nemusí ovlivnit v oborech přírodovědných. Mnoho významných osobností mělo v dětství problémy v matematice a přesto dosáhli vynikajících úspěchů, někteří právě v matematice a fyzice.

Např. o fyzikovi George Gamovovi v publikaci *My World Line* se lze dočíst, že známá astronomka Věra Rubinová, jeho studentka, o něm prohlásila: „*Neuměl psát ani počítat. Chvilí by mu trvalo, než by vám řekl, kolik je 7 krát 8. Ale jeho rozum byl schopn chápat vesmír.*“ (Gamov 2000, str. 153).

Matematik N.N.Luzin patřil k lidem s pomalou reakcí. Také se pomalu vyvíjel, ve škole neprosplval, dokonce právě v matematice.

David Hilbert, jeden z největších matematiků 20. století dělal dojem tupého, pomalu uvažujícího člověka, který těžko chápe, co mu kdo vykládá. (Blažková a kol. 1995).

Albert Einstein, největší fyzik 20. století, ve škole propadal, měl velké potíže se čtením.

Thomas Alva Edison patřil k horší části třídy, nikdy nezvládl dovednosti jako je psaní, pravopis a také aritmetika.

Mohli bychom uvést mnoho příkladů, kdy zdánlivě „tupý“ a ve škole neprosplvající žák se v budoucnu projeví jako génius.

Je tedy nezbytné přistupovat k dětem s poruchami učení citlivě, snažit se pochopit jejich problémy a hledat cesty, jak jim učení usnadnit. Člověk s poruchou učení se v dospělosti s problémy nějakým způsobem vyrovná, avšak vždy, když řeší situaci, ve které jsou dominantní oblasti, které mu činí potíže, vždy si je uvědomí a musí vynaložit velké úsilí na to, aby je zvládl. Většina dospělých lidí své problémy tají z obavy ze společenské degradace. Pomocí kompenzačních pomůcek (kalkulátor, počítač) lze řadu problémů eliminovat, zejména z oblasti numerických výpočtů. Avšak problémy se z oblasti operací

s přirozenými čísly přesunou do dalších matematických témat, např. počítání s mocninami a s algebraickými výrazy, řešení rovnic, řešení slovních úloh, kde se znovu projeví dyskalkulické potíže na vyšší úrovni matematického učiva.

## 2. ROZVOJ PŘEDČÍSELNÝCH PŘEDSTAV

Pro budoucí úspěšnost dítěte v matematice je vhodné nepromarnit všechny příležitosti, které od nejranějšího věku napomáhají dítěti chápat kvantitu a prostorové vztahy.

V předškolním věku by dítě mělo postupně zvládat tyto dovednosti (RVP pro předškolní vzdělávání 2005):

- Chápat základní číselné a matematické pojmy, elementární matematické souvislosti a podle potřeby je prakticky využívat (porovnávat, řadit a třídit soubory předmětů podle určitého pravidla, orientovat se v elementárním počtu zhruba do šesti, chápat číselnou řadu v rozsahu první desítky, poznat vztahy „více“, „méně“, „stejně“, první, poslední, apod.).
- Chápat prostorové vztahy a pojmy (např. dole, nahoře, před, za, pod, uprostřed, u, vedle, mezi, vpravo, vlevo) v rovině i v prostoru.
- Částečně se orientovat v čase.
- Řešit kognitivní problémy, úlohy a situace, myslet kreativně, vymýšlet postupy a realizovat své nápady.
- Vyjadřovat svou fantazii v tvořivých činnostech.

Důležité je, že se v předškolním věku nejedná o systematické vzdělávání dětí, o výuku, ale využívá se všech běžných denních činností dětí, které neustále provádějí. Matematické představy nejsou odděleny od konkrétních činností, dítě se rozvíjí v rámci integrovaného přístupu. Je však nutné mít na paměti, že rozvoj dětí není rovnoměrný, že každé dítě má svůj vlastní čas k pochopení toho či onoho pojmu. Dostatek podnětů v předškolním věku může poruchám učení částečně předcházet.

Povšimněme si nejprve, jaké myšlenkové pochody předcházejí vytvoření správné představy přirozeného čísla.

### 2. 1. Pojem přirozeného čísla

Při zkoumání, jakým způsobem se vytváří pojem čísla u dětí je dobré poučit se z historie, jakým způsobem se vytvářel pojem přirozeného čísla v historickém vývoji člověka a jakým způsobem je tento pojem budován v matematice jako vědecké disciplíně, neboť obojí je východiskem chápání vývoje číselných představ u dětí od nejranějšího věku.

Pojem přirozeného čísla se v historickém vývoji vytvářel složitě, mnoho roků a člověk musel učinit velký pokrok v rozvoji svých myšlenkových procesů,

aby byl schopen chápat kvantitu, tj. aby abstrahoval od viditelných vlastností předmětů a byl schopen pochopit, kolik jich je. Člověk vnímal skupiny předmětů, které ho obklopovaly a nejprve přiřazováním poznával, zda je předmětů stejně nebo je některých více či méně (např. za každou ovci ve stádě položil kamének). Počet byl tedy nejprve vyjadřován přiřazováním, tj. vytvářením ekvivalentních množin stejných předmětů, např. prstů na rukou, kamének, dřívků, zářezů apod. Další složitý vývoj přinesl schopnost zapsat tuto skutečnost a vyjádřit ji slovem a postupně se tak vyvíjely číslice, číslovky a číselné soustavy.

V matematice se pojem přirozeného čísla buduje buď pomocí čísel kardinálních nebo čísel ordinálních nebo pomocí Peanovy množiny. Při velmi stručném přiblížení můžeme uvést:

Pojem čísla kardinálního se opírá o pojem tříd navzájem ekvivalentních množin a přirozená čísla zaváděná pomocí čísel kardinálních dávají vesměs odpověď na otázku „kolik to je“. Pojem čísla ordinálního se opírá o uspořádané množiny a podobná zobrazení mezi uspořádanými množinami a přirozená čísla pomocí nich zaváděná dávají většinou odpověď na otázku „kolikátý“. Přirozená čísla budovaná pomocí Peanovy množiny vycházejí z prvního prvku a pomocí tohoto prvku a pojmu následovníka se vybuduje množina všech přirozených čísel. Teoretické základy budování pojmu přirozeného čísla jsou uvedeny v publikacích aritmetiky a algebry a didaktické přístupy k zavádění přirozených čísel v publikacích didaktiky matematiky.

## **2.2. Postupné vytváření pojmu čísla u dětí**

Všimějme si, jak dvouleté až tříleté dítě vnímá počet věcí kolem sebe. Nejprve ukazuje: tam jsou dvě, tam také jsou dvě, později tři. Když mu ukážeme hromádku prvků o větším počtu než tři, odmítá říct, kolik to je a zpravidla řekne: „to je moc“. Postupně však vnímá další čísla, až v šesti letech je schopno určit počet prvků ve skupinách, ve kterých je jich šest až deset. Při vnímání počtu předmětů musí dítě učinit obrovský pokrok ve svém myšlení, a to tak, že postupně přestává vnímat viditelné vlastnosti předmětů, jako je barva, tvar, materiál ze kterého jsou zhotoveny, zda jsou živé či neživé a všímá si pouze toho, kolik jich je. To znamená, že začne vnímat, že mezi určitými skupinami objektů existuje něco společného, co nesouvisí s jejich viditelnými vlastnostmi, ale s tím, že mají prvky, které se dají vzájemně jednoznačně přiřadit, tj. že jich je stejně. Přitom se však nejde o žádnou cílenou výuku matematiky, ale všechny nové poznatky dítě získává prostřednictvím her a běžných činností souvisejících s jeho životem. Současně se rozvíjí jeho komunikace verbální (zdokonaluje se jeho řeč) i nonverbální (využívá např. své značky v mateřské škole, kreseb, symbolů). Postupně se zkvalitňuje jeho vnímání, paměť, představivost i pozornost, což je nezbytné pro jeho další matematický rozvoj. Děti jsou přirozeně tvořivé a jejich tvořivosti je třeba účelně využít a dávat jim takové podněty, které přispívají k rozvoji jejich myšlení.

Číslo, podobně jako jiné abstraktní pojmy, nemůžeme vnímat smysly, vnímáme pouze reprezentanty těchto čísel. Například reprezentantem čísla čtyři mohou být čtyři auta, čtyři děti, čtyři jablíčka apod. Ale také např. bydlíme ve čtvrtém poschodí, náš dům má číslo 4, jsou čtyři hodiny, mám 4 roky apod. Děti se seznamují s kvantitativní stránkou jevů v kontaktu s okolním světem, pomocí konkrétních předmětů se postupně propracovávají k obecnějšímu chápání až k pochopení abstraktního pojmu čísla. Mnohokrát opakovaná činnost s konkrétními předměty vede k získávání zkušeností dětí, že nezáleží na tom, s jakými předměty pracují, ale pouze na tom, že je jich stejně. Musí se také naučit číslo pojmenovat a zapsat. K tomu, aby proces vytváření čísla byl pro děti snadný, využíváme mnoho činností, ve velké většině nematematických. Např. při skládání kostek domina, hraní hry Člověče, nezlob se apod. Přitom však se nemůže nic uspěchat, protože k pojmu čísla se každé dítě dopracuje samostatně vlastní činností, až mu tzv. „svitne“.

Co všechno může dítě vnímat na konkrétních předmětech? Dejme do neprůhledného sáčku např. 4 koláče a nechme děti povídat, co všechno o nich mohou říct. Sledujme, jaké mají představy – zrakové, chuťové, čichové, hmatové, čím jsou koláče naplněny, kam je mohou přemístit (např. na talíř). Kolik z dětí je však již ve „světě matematiky“ a zeptá se “kolik jich je” ?

V první fázi se děti naučí chápat čísla 1 až 5, později čísla do deseti a nulu. Měly by umět vytvořit skupinu o daném počtu prvků, zapsat počet prvků dané skupiny, čísla porovnávat. Než se však dospěje k pojmu přirozeného čísla, je třeba dávat dětem mnoho podnětů, které souvisí s jejich hrami a činnostmi, které běžně každý den provádějí a které s matematikou zdánlivě nesouvisí. V tomto období není vhodné učit děti počítat po jedné, protože tímto se zpravidla učí pouze vyjmenovat řadu slov beze smyslu, slov která zatím nemají reálnou představu vysloveného čísla. Pokud se tato fáze podcení, dochází u některých dětí problémům při vytvoření pojmu čísla.

### **2.3. Propedeutická cvičení k vytvoření pojmu čísla vyplývající z běžných činností a her**

S dětmi provádíme elementární cvičení, která jsou propedeutikou k pozdějšímu chápání pojmu čísla. Nejprve se jedná se o běžné činnosti s hračkami, obrázky a dalšími předměty, využívají se pohádky, hry apod., přičemž se vždy vyčleňují některé charakteristické vlastnosti se zapojením více smyslů.

#### **Práce s předměty**

Dětem předkládáme různé předměty, které je obklopují a snažíme se o to, aby děti uvedly názvy nebo jména předmětů – co to je, jak se to jmenuje. Zároveň zkoumají a pojmenovávají viditelné vlastnosti předmětů - jaké jsou, zda jsou živé či neživé, jaká je jejich barva, jaký je jejich tvar, z jakého jsou materiálu.

Nejprve pracujeme s izolovanými předměty, později s dvojicemi, trojicemi předmětů a skupinami více předmětů.

### **Identifikace** předmětů prostřednictvím smyslů

Děti mohou identifikovat předměty, osoby, zvířata pohledem, hmatem, chutí, čichem apod., tedy svými smysly.

### **Charakteristika** předmětů

Děti provádějí charakteristiku předmětů z různých hledisek, např. jaké to je, k čemu to je, co dělá, kdo to je, kdo něco dělá apod.

### **Diferenciace**

Jedná se o hledání shod a rozdílů mezi předměty - je to stejné jako ..., je to jiné než ..., čím se liší – např.

který předmět (obrázek) nepatří mezi ostatní,

který předmět (obrázek) má jinou barvu než ostatní,

který předmět (obrázek) má jiný tvar než ostatní,

který předmět (obrázek) má jinou velikost než ostatní,

který předmět (obrázek) má jinou polohu než ostatní apod.

### **Vyhodnocení** situací

Jde o pohled zpět, utvrzení správnosti a rozhodnutí: Je to tak? Je to správně?

### **Komparace (srovnání)**

Porovnávání předmětů probíhá z mnoha hledisek. Předměty jsou stejné, podobné, nejsou stejné, jsou různé. Děti rozhodují: V čem se liší, v čem jsou stejné (např. v pohádce Dlouhý, Široký a Bystrozraký – porovnáváme výšku, šířku, tloušťku apod.). Nejprve porovnáváme objekty, které dítě vidí současně, později s tím, co je uchováno v paměti (jak to bylo před tím, je to tak, jak to bylo původně, jak to má být, co se změnilo). Pro matematiku je to důležitá činnost – např. při psaní čísel porovnává dítě to, co napíše, s předlohou, se vzorem na začátku linky v sešitě. Dále se porovnávají předměty v různých polohách – vedle sebe, pod sebou, jinak umístěné.

Dále se porovnává se množstvím -upevňují se vztahy více, méně, stejně – což je příprava na porovnávání čísel.

### **Zpřesňování**

Jde o zpřesňování původní, vstupní informace, většinou s využitím smyslového vnímání. Využíváme otázek typu: Kdo je to? Co je to? Dalšími poskytnutými informacemi přibližujeme přesný význam - např. hra na řemesla, které zvíře myslím, apod. Zde se uplatňuje orientace na sluch (ptáme se slovy) nebo na zrak (předvádíme pantomimu), nebo a hmat (hmatem se určuje předmět). Může se také určovat kvantita nebo vzájemné postavení objektů.

### **Negace**

Spočívá na využití předpony “ne” – např. je to živé – neživé, létá to, nelétá to, je to modré, není to modré. Přitom dbáme na jasné vyjádření, kdy předmět danou vlastnost má, či nemá (např. negace „je to bílé“ není „je to černé“).

### **Závislosti**

Využíváme pravidelného opakování skupin prvků, rytmizace – vytváření dvojic, trojic prvků, které se pravidelně opakují (navlékání korálek různých barev, stavby hradeb z krychlí apod.).

### **Gradace**

Jde o určení polohy nebo pořadí prvků v realitě i na obrázku - je to blíží než, dál než, vlevo od, vpravo od, nad, pod, za.

## **2.4. Činnosti směřující k vytvoření pojmu přirozeného čísla**

Mezi činnosti, které cíleně směřují k vytváření předpokladů pro správné pochopení přirozeného čísla patří klasifikace, přiřazování, uspořádání.

### **2.4.1. Třídění (klasifikace)**

V matematice souvisí třídění s rozkladem množiny. Při rozkladu množiny na podmnožiny musí být splněny požadavky:

1. Každý prvek základní množiny musí být zařazen do některé z podmnožin.
2. Žádný prvek nemůže být současně ve dvou podmnožinách.
3. Sjednocením všech podmnožin je základní množina.

Třídění se provádí podle určité charakteristické vlastnosti, děti mají za úkol roztrždit dané předměty na ty, které požadovanou charakteristickou vlastnost mají a na ty, které ji nemají. Přitom charakteristická vlastnost musí být stanovena jednoznačně (např. nestačí určit malý – velký, když se třídí více předmětů různých velikostí). Vzniknou tak dvě, později více skupin a přitom každý prvek musí být zařazen v některé ze vzniklých skupin podle daného kritéria. Nejprve se provádí třídění dichotomické (na dvě skupiny), později trichotomické (na tři skupiny), atd. Třídíme předměty např. podle barvy, velikosti, tvaru, materiálu a mnoha dalších vlastností.

Vymezení charakteristické vlastnosti se provádí na předmětech denní potřeby, např. vybírá se co se jí, co se obléká, sportovní náčiní, pracovní nářadí, čím jezdíme apod. Jídlo se pak dále vymezuje např. na ovoce, zeleninu, pečivo, mléčné výrobky apod., sportovní náčiní podle jednotlivých sportů atd.

Provádí se zařazování předmětů do skupin podle stejné vlastnosti, např.:

Panenko – chodící, nechodící.

Auta – osobní, nákladní.

Kostky ze stavebnice, (např. 2 velikosti, 3 barvy, 4 tvary).

Geometrické tvary (trojúhelníky, čtverce, kruhy).

Umístování příborů do příborníku (lžíce, vidličky, nože, malé lžičky).

Ukládání nádobí do skříňky – hrníčky, talířky, talíře hluboké, mělké.

Třídění předmětů provádějí děti prakticky při každém úklidu hraček.



### 2.4.2. Přiřazování

Při přiřazování předmětů poznávají děti skupiny objektů, které mají společné to, že každému prvku v jedné skupině je přiřazen právě jeden prvek druhé skupiny a naopak (prvky jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny). Přitom si děti postupně uvědomují, že skupiny, jejichž prvky lze vzájemně jednoznačně přiřadit, mají stejně prvků a že nezáleží na tom, jakého druhu prvky jsou. Postupně zvyšujeme náročnost na abstrakci – od konkrétních předmětů k symbolům a k číslu. Přiřazujeme tedy:

#### a) předměty předmětům

Pro pochopení pojmu přirozeného čísla je vhodné využívat činností, kdy děti přiřazují předměty předmětům (zpočátku tak, aby v obou skupinách bylo předmětů stejně - vytvářejí dvojice). Umisťují např. panenky do kočárků, auta do garáží, přiřazují děvčata chlapcům, pomeranče dětem, hrníčky na podšálky, vajíčka do kalíšků, apod. Velmi vhodnou činností je prostírání nádobí a příborů na stůl - u stolečku sedí Jirka, Petr, Terežka, Irenka, každému přiřadíme talířek, lžičku, skleničku.

Dále můžeme využívat i pohádkových postav nebo postav z večerníčků - kdo ke komu patří:

Hurvínek - Spejbl, Maková panenka – motýl Emanuel, Rumcajs – Manka, Mach – Šebestová, Křemílek – Vochomůrka, Jeníček – Mařenka, Zlatovláska – Jiřík, Bob – Bobek, Ája – Fík, atd.

#### b) symboly předmětům

Vybereme několik dětí, jindy hraček (do pěti), přiřazujeme prsty, kamínky, tyčinky, obrázky apod.

#### c) symboly symbolům

Obrázkům přiřazujeme např. puntíky, tyčinky, tyčinkám puntíky apod. Např. nakresli tolik čárek, kolik je na obrázku pejsků, nakresli tolik puntíků, kolik je na obrázku kočiček.

#### d) předmětům a symbolům čísla

Skupinám předmětů nebo symbolů přiřadíme číslo – kolik jich je.

Každý správný postup, který by mohl napomoci vybudování pojmu přirozeného čísla, je velmi potřebný. Dostatek rozmanitých činností a před tím, než uvede číslo je předpokladem vytvoření potřebné abstrakce.

### 2.4.3. Uspořádání

Uspořádání děti vnímají zcela přirozeně na naprosto nematematických činnostech, při hrách, prostřednictvím pohádek, říkadel aj. Cílem činností je, aby si děti v budoucnu postupně uvědomily, že množina přirozených čísel je uspořádaná, že je možné o každých dvou prvcích rozhodnout, který je před kterým (toto je však již učivem 1. stupně ZŠ.)

V období předčíselných představ uvádíme pohádky, ve kterých hraje roli posloupnost dějů či uspořádání osob. Jsou to například pohádka O kohoutkovi a slepičce, pohádka O veliké řepě, Zlatovláska, aj. Děti si velmi dobře a přesně pamatují uspořádání postav nebo dějů v pohádkách. V pohádce O veliké řepě se navíc uvádějí pojmy „první prvek“, „poslední prvek“ ve skupině. Zde je třeba správného zdůvodnění, neboť se musí pracovat se všemi prvky dané skupiny a první nebo poslední prvek je třeba vymežit vzhledem k ostatním prvkům dané skupiny. Např. v pohádce O veliké řepě: Proč je dědeček první – protože všichni ostatní jsou za ním. Chybně by bylo – protože před ním nikdo není. Proč je myška poslední – protože všichni ostatní jsou před ní. Opět chybné zdůvodnění by bylo – protože za ní nikdo není.

Dalšími činnostmi mohou být např. uspořádání dětí v řadě podle velikosti, skládání pastelek podle velikosti, navlékání korálků podle určitého pravidla, kdy děti mají pravidlo dodržet, stavby z krychlí podle pravidla, apod.

## 2.5. Přirozená čísla

### 2.5.1. Význam čísla

Již v předškolním věku poznávají děti číslo v mnoha jeho významech, uvedme tedy některé:

- a) Označení množství (počtu prvků): 5 dětí, 3 medvídci, 10 jablek, 4 prsty, apod.
- b) Číslo jako operátor (pokyn ke změně): přidej mi tři bonbóny, uber mi dva knedlíky, apod., o kolik mám víc, (méně) než ty, aj.
- c) Číslo jako adresa (pořadí, uspořádání): bydlíme v domě číslo 24, ve třetím poschodí, narodil jsem se 15.6., apod.
- d) Číslo jako kód – např. kódy na zabezpečovacích zařízeních, PIN, telefonní číslo.
- e) Číslo jako veličina (míra) – 2 kg banánů, moje výška je 130 cm, aj.

Čísla v různých významech děti zcela přirozeně používají. V každém případě by se však měly seznámit nejprve s číslem ve významu množství a teprve potom ve významu pořadí a s číselnou řadou. Je třeba si také uvědomit, že s čísly v různých významech nelze zacházet stejně, např. sčítat a odčítat můžeme čísla

ve významu množství – počtu prvků, ale není to možné ve významu čísla jako adresy.

Pojem čísla ve významu počtu prvků je třeba vytvářet podporovat mnoha různými činnostmi.

- a) Čísla 1 a 2 spojujeme s částmi těla (Dítě a jeho tělo): Kolik máš očí, rukou, nohou, nosů, brad, apod.
- b) Kolik mám sourozenců?
- c) Kolik mám kamarádů nebo kamarádek?

Při vytváření čísla 3 (a dalších čísel v oboru do pěti) umístíme na stůl tři předměty (nejprve stejného druhu, později předměty různé) a dáváme dětem úkoly:

- a) Řekni, kolik předmětů (jablíček, kostek, kaštanů apod.) vidíš na stole.
- b) Kde ještě vidíš stejně věci jako je na stole.
- c) Ukaž tolik prstů, kolik vidíš předmětů.
- d) Polož kartičku, na které je stejně puntíků jako jablíček na stole.
- e) Doplň, aby byly tři (když je na stole méně jablíček než 3)
- f) Na obrázcích jsou různé předměty v různém počtu (nejprve od 1 do 5). Vyber ty obrázky, na kterých jsou tři prvky.

Využíváme i pohybových her, např.

- a) Na zemi nakreslíme kruhy, do každého zapíšeme některé z čísel 1 až 5 a děti se mají postavit do kruhů podle vyznačených čísel (je nutné, aby všechny děti byly zařazeny v některém z kruhů).
- b) Umístíme dětem na záda kartičky s puntíky (od jedné do pěti) a děti se mají rozdělit do skupin tak, aby v každé skupině byly děti se stejným počtem puntíků na zádech.
- c) Rozdáme dětem kartičky s tečkami od jedné do pěti a požadujeme, aby vytvořily vždy řady pěti dětí tak aby kartičky byly uspořádané od jedné do pěti.

Dalším důležitým poznatkem je, že změnou konfigurace se počet prvků nemění. Dětem dáme pět tyčinek a vyzveme je, aby z nich něco vytvořily. Děti tak vytvářejí různé sestavy, např. sestavují domeček, šipku a nejrůznější obrázky podle vlastní fantazie, sestavy se liší tvarem, avšak neliší se počtem - tyčinek je stále pět. Podobně sestavují různé stavby z pěti stejných krychlí.

Intuitivně přicházejí k závěru, že změnou tvaru obrázku nebo stavby se nezmění počet prvků.

Využíváme pohádky, ve kterých hraje roli počet osob nebo předmětů, např. Tři zlaté vlasy děda Vševěda, Tři oříšky pro Popelku, Budulínek, Sněhurka a sedm trpaslíků, Pohádka o dvanácti měsíčkách, aj a necháme děti kreslit obrázky postav. Téměř na každé číslo od 1 do 12 lze vybrat nějakou pohádku.

Čísla od jedné do pěti znázorněná pomocí nějakých prvků děti zpravidla poznají bez počítání – zejména když jsou ve vhodném seskupení, jako např. na kostce pro hru Člověče nezlob se.

### 2.5.2. Počítání po jedné

Uvědomme si, co vlastně děláme, když počítáme po jedné. Máme-li skupinu předmětů, u kterých na první pohled nepoznáme, kolik jich je, zpravidla ukážeme na jednotlivé předměty prstem (nebo je označíme tužkou) a ke každému přiřadíme jedno slovo ze známé řady číslovek – jedna, dvě, tři, ... až patnáct (např.) a poslední vyslovená číslovka udává počet prvků ve skupině. Tímto vlastně skupinu předmětů uspořádáme a každému předmětu přiřadíme prvek z uspořádané skupiny číslovek.

Cílem je, aby děti uměly vyjmenovat řadu čísel od jedné do pěti, později do deseti, a to vzestupně i sestupně. Přitom však za každou vyslovenou číslovkou by měly vidět počet prvků, aby nepoužívaly pojmy bezobsažně, bez významu.

Při počítání po jedné je třeba respektovat, aby:

- nebyl vynechán žádný prvek,
- žádný prvek se nepočítal dvakrát,
- při změně konfigurace předmětů nedošlo k chybnému počítání, kdy názvy čísel jsou vázány těsně na určité předměty,
- konkrétní předměty nebyly počítány od nuly.

Pokud bychom učili děti pouze vyjmenovat řadu slov (číslovek) od jedné do deseti a děti vytvořenou neměly představu čísla tak, aby si za každým slovem uměly představit počet prvků, dojde většinou k tomu, že děti např. počítají: jedna, dvě, tři, čtyři, sedm, pět, čtyři ..., tj. říkají jakási slova bez obsahu.

(Číselná řada je jednou z očekávaných kompetencí dítěte v předškolním věku.)

Podpůrné jsou i různé básničky nebo říkadla, kdy se postupně číselná řada opakuje, např:

Jedna, dvě, Honza jde, nese pytel mouky.

Jedna, dvě, tři, my jsme bratři.

Jedna, dvě, tři, čtyři, pět, cos to Janku, cos to sněd.

Jedna, dvě, Honza jde.

Jedna, dvě, tři, pes ho větrí.

Jedna, dvě, tři, čtyři, kampak si to míří?

Jedna, dvě, tři, čtyři, pět, běží k mámě na oběd.

Pro čísla do deseti např. Oře, oře Jan, přiletělo k němu devět vran.

Vyžíváme i různých hádanek (čtyři rohy, čtyři nohy ...).

Pomocí běžných činností se děti připravují k pochopení velikosti předmětů (malý, velký, krátký, dlouhý, široký, úzký, vysoký, nízký aj.), porovnávání počtu předmětů (více, méně, stejně).

Další činnosti spočívají v tom, aby děti přidaly nebo dokreslily prvky podle pokynů: Polož na stůl stejně lžiček jako je hrníčků, přines stejně jablíček, jako je dětí, nakresli více mrkví, než je králíků, nakresli méně vajíček než je slepic apod.

Některé propedeutické činnosti se mohou týkat časových údajů:

Když mi byl 1 rok, začal/a jsem chodit.

Když mi byly 3 roky, začal/a jsem chodit do mateřské školy,

Až mi bude 6 roků, začnu chodit do 1. třídy.

### 2.5.3. Příprava na operace s přirozenými čísly

V rámci běžných her a denních činností se mohou děti setkat i s operacemi s přirozenými čísly, např.:

1. Na misce jsou tři jablka, dvě jablka přidáme, kolik jich pak bude na misce?

Vždy se vychází z konkrétní manipulace s předměty a v žádném případě nejde o výuku sčítání, ale o přípravu na pochopení této operace. V první fázi se nejprve používají předměty stejného druhu, např. 2 švestky a 3 švestky, aby součet měl stejné pojmenování jako oba sčítanci a teprve později se využívá předmětů různého druhu, např. 2 hrušky a 3 jablka, kdy součet má již název nadřazený (ovoce). Pokud se využívá obrázků nebo grafického znázornění pomocí symbolů, je třeba dbát na jeho správnost.

2. Na talíři byly čtyři koblížky, dva jsme snědli. Kolik koblížků zůstalo na talíři.

3. Maminka má tři děti, každému dá 2 bonbóny. Kolik bonbónů jim dá celkem?

4. Rozděl 6 kuliček mezi tři děti tak, aby měly stejně. Kolik kuliček bude mít každé dítě?

5. Rozděluj 6 kuliček rozděluj po třech. Kolik dětí podělíš?

6. Rozdělujeme předměty (kaštiny, bonbóny, kostky aj.) mezi několik dětí tak, aby měly všechny děti stejně a rozdělili jsme, pokud to lze, všechny předměty. Dělení může být beze zbytku nebo se zbytkem.

7. Rozdělujeme předměty po několika (oříšky do misek po třech, kaštiny dětem po pěti, apod.). Opět může být rozdělování beze zbytku nebo se zbytkem.

Již v předškolním věku se děti mohou setkávat s významem pojmu zlomku jako části celku, např. polovina rohlíku, čtvrtka chleba, půl jablíčka, avšak pouze ve smyslu rozdělování konkrétních objektů. Rozdělujeme jablíčko na stejné části – na poloviny, čtvrtiny, papír rozdělíme na poloviny apod. Řešíme problém, kdy máme 3 jablka a chceme je spravedlivě rozdělit mezi 6 dětí. Děti, které již v předškolním věku hrají na hudební nástroj, se seznamují s notami celými, půlovými, čtvrt'ovými. Všechny tyto činnosti napomáhají chápání pojmu zlomku jako části celku.

## 2. 6. Geometrické představy

S geometrickými útvary se děti setkávají již od nejútlejšího věku na předmětech, které je obklopují. Učí se orientovat v prostoru, sledováním obrázků v knihách se učí vnímat vztah rovina – prostor. Postupně se vytváří geometrické představy. Jde zejména o tyto:

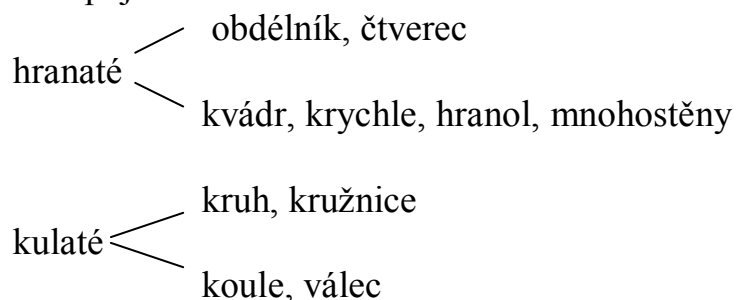
- a) Orientace v rovině a v prostoru – vztahy nahoře, dole, před, nad, pod, za, vedle, mezi, vlevo, vpravo, uprostřed.
- b) Poznávání tvarů – hranaté, kulaté, špičaté, trojúhelník, kruh, čtverec, obdélník.
- c) Poznávání těles – krychle, válec, koule, kvádr, hranol.
- d) Vytváření koláží podle vlastní fantazie.
- e) Stavby podle vlastní fantazie.
- f) Kreslení, vybarvování.
- g) Zhotovování přáníček, využívání symetrie.

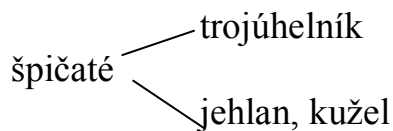
Již v předškolním věku si hrají se stavebnicemi, míči apod. a nejprve se učí rozlišovat věci a předměty hranaté, kulaté a špičaté.

Např. pod pojem “kulaté” se vejde: míč – koule  
 kostka ze stavebnice – válec  
 dopravní značka zákazová – kruh  
 naušnice, obruč - kružnice

Postupně se děti učí diferencovat útvary rovinné a prostorové:

Hierarchie pojmů:





Hry s různými stavebnicemi přispívají k rozlišování geometrických útvarů i chápání různých prostorových vztahů. Stavby provádějí buď podle vlastní fantazie nebo podle předlohy. Využívá se přitom různých zákonitostí, opakování tvarů, symetrie aj.

Diferenciace rovinných útvarů předpokládá, že děti postupně rozliší jednotlivé tvary – trojúhelník, čtverec, obdélník, kruh. K vytvoření správných představ by měly útvary vidět vždy jako části roviny, tedy vystřižené např. z papíru nebo barevné fólie a teprve potom nakreslené na papíře nebo tabuli pomocí jejich hranice. Pochopení geometrických útvarů v rovině může napomoci skládání různých předmětů z papíru, kdy děti útvary vidí a při vhodném využití i správně vnímají a dokáží je pojmenovat (např. skládání čepice, lodičky aj.).

Velmi vhodnou činností k určování geometrických útvarů je využití tvaru dopravních značek. Některým dětem činí problém rozlišit čtverec a obdélník, některé děti mají problémy s rozlišením kruhu a kružnice.

Při kreslení obrázků se děti učí vnímat různé čáry (přímé, křivé, lomené), učí se znázornit vztahy a vzájemné polohy objektů. Postupně vnímají proporce (např. poměr částí těla osob nebo zvířat) a perspektivu (jak se znázorní prostorová situace v rovině). Na obrázcích vnímají intuitivně shodnost úseček, rovnoběžnost a kolmost přímek, symetrie.

Postupně se připravují na chápání měření délek úseček, určení vzdálenosti pomocí odhadu. Vhodné je např. svislé umístění měřidla – metru - a měření výšky dětí.

### 3. ČÍSLA PŘIROZENÁ

Uvedme nejprve několik příběhů, které ilustrují, že pochopení pojmu přirozeného čísla a jeho zápisu mohou být u dětí spojeny s řadou problémů a že je třeba respektovat přirozený vývoj dětí a poskytovat jim správné podněty, které v budoucnu nepovedou k chybám.

#### *Příběh první.*

*Jedeme v autobuse, prší a na předním skle se pohybují tři stěrače. Malý Tomášek sedí mamince na klíně a znenadání zvolá: “Tři”. “Kde jsou tři”, ptá se maminka. Tomášek ukazuje na pohybující se stěrače. Maminka s nadšením: “Tomášku, tys to poznal, ty jsi šikovný, ty už to umíš.” Stále jej velmi chválila. Na můj dotaz, kolik je Tomáškovu roků, maminka říká: “ukáž paní, kolik ti je”. Tomášek ukazuje tři prstíčky. Potom mi maminka sdělila, co to dalo práce, než se naučil ukázat, že jsou mu tři roky. Maminka byla nadšena, že Tomášek pochopil, co znamená 3. Matematik ví, že Tomášek dospívá od představ vázaných na konkrétní předměty k představám univerzálnějším a postupně k abstrakci.*

#### *Příběh druhý.*

*Holčičky si hrají s panenkami. Na můj dotaz, kolik mají panenek, postupně odpovídají:*

*Maruška: máme hodně.*

*Eliška: máme Lucinku, Gábinku, Michalku a Karolínku.*

*Terezka: počítá po jedné: jedna, dvě, tři, čtyři. Jsou čtyři.*

*Monička: řekne hned: máme čtyři panenky.*

*Každá z holčiček je na jiném stupni chápání kvantity – počtu prvků.*

#### *Příběh třetí.*

*V pokoji si hrají čtyři děti. Pošlou nejmladší z nich – Sofínku – do kuchyně pro buchty. Sofínka bere z mísy nejprve po jedné a potichu si říká: Filipovi, Viktorovi, Aničce a mně. Pak bere ještě jednou po jedné a odnáší osm buchet, aniž by věděla, kolik jich je. Sofínka neumí počítat, ale pomocí přiřazování dokáže odnést správný počet buchet.*

#### *Příběh čtvrtý.*

*Jedeme v tramvaji číslo 11 a obě číslice jsou napsány poněkud jinak, než se učí děti psát číslici 1 v první třídě. Maminka jede s holčičkou (dva a půl roku), která má bratříčka v první třídě. Holčička asi doma přihlíží přípravě bratříčka do školy. Ukazuje na číslo v tramvaji a říká: “sedmička”. Maminka namítá: “to není sedmička, ale jednička”. Holčička neustále trvá na svém, maminka však*



*také. Až maminka řekne: “to jsou dvě jedničky”. Jak holčička uslyší “dvě”, začne se velmi zlobit a podrážděně zvolá: “ne dvě, sedm”.*

*U dítěte se ukazuje problém chápání zápisu čísel, tvaru číslic a nakonec vztahu číslo – číslice.*

*Příběh pátý.*

*Petr drží v ruce lístek, na kterém je číslo 200 a říká: “dvojka”. Maminka doplňuje: dvojka a dvě nuly, dvě stě. Tříletý Petr vnímá “2” a “dvě” nuly a nemůže pochopit, jak to může být 200. Petr ještě nedokáže rozlišit zápis čísla v desítkové soustavě a číslo jako počet prvků.*

*Příběh šestý.*

*Tříletého Jirku učí dědeček počítat od jedné do deseti. Jirka počítá: jedna, dvě, tři, čtyři, pět, sedm, devět, čtyři, šest, deset.*

*Jirka se učí jakousi “básničku” – řadu slov, ale nevidí za slovy číslo ve významu počtu prvků.*

*Příběh sedmý.*

*Vzpomíná Saskie: Jako malá jsem nemohla pochopit pojem “dvě” a byla jsem z toho nešťastná. Ukázali mi jeden prst, řekli “jedna”, ukázali k němu jiný prst, řekli “dvě”. Nechácala jsem, proč dvě, když byl jeden prst a potom zase jeden prst, ale jiný. Bylo to pro mě stresující, stále vidím, jak se mi smějí, jak to já nechápu a mám z toho negativní zážitek na celý život.*

*To, co je pro dospělé zcela samozřejmé, může být pro dítě naprosto nepochopitelné. Jestliže se k tomu přidá nevhodná reakce dospělých (např. lehký posměch nebo pokárání), dítě má trauma na celý život.*

*Příběh osmý.*

*Baví se maminka se svou tetou v přítomnosti Janičky, která byla právě u zápisu do první třídy. Tetička mezi jiným říká: “No na matematiku u nás v rodině nikdy nikdo nebyl. To je pro naši rodinu úplná hrůza.”*

*Vztah k matematice vytváříme téměř za každých okolností, často si to ani neuvědomujeme a Janička již může být ovlivněna negativním postojem.*

*Příběh devátý.*

*Ptá se pán, jak se dostane na určité místo ve městě. “Jedte nejprve tramvají číslo dvě a potom přestupte na osmičku”. Jede tramvaj číslo 10. Pán říká: “tak to já můžu jet desítkou”.*

*Můžeme čísla vždy (v každém jejich významu) sčítat?*

*Příběh desátý.*

*Honzík slaví čtvrté narozeniny. Na otázku “kolik je ti roků” ukazuje čtyři prstíky, na dortu má čtyři svíčky, ale význam pojmu “čtyři roky” je mu zatím neznámý.*

*Postupně se připravuje k chápání čísla 4 v jeho různých významech.*

### 3.1. Systematický přístup při budování pojmu přirozeného čísla

V předcházející kapitole bylo uvedeno, které důležité činnosti předcházejí tomu, aby dítě chápalo správně kvantitu a postupně se u něj vytvářela představa čísla. Jde tedy o:

- hledání společné charakteristické vlastnosti předmětů
- třídění
- uspořádání
- přiřazování.

Uvedme v přehledu, co a jak v souvislosti s čísly v mladším školním věku dítě postupně zvládá a jak se pojem čísla vytváří. Je to důležité zejména z hlediska vývojových poruch učení, protože pokud se u dítěte nevytvoří potřebná abstrakce, je obtížné postupovat v matematice k dalšímu učivu.

#### a) Vytvoření pojmu přirozeného čísla

Práce s konkrétními předměty
Práce se symboly, 1. stupeň abstrakce
Pochopení pojmu čísla, 2. stupeň abstrakce
Vyslovení čísla
Pochopení symbolu k zápisu čísla, číslice
Psaní číslic

#### b) Numerace

Čtení čísel
Zápis čísel
Orientace v číselných řadách
Znázorňování čísel na číselné ose
Porovnávání čísel
Zaokrouhlování čísel

#### c) Operace s přirozenými čísly

Vyvození každé z operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení), práce s konkrétními předměty
Práce se symboly, 1. stupeň abstrakce
Zápis příkladu, 2. stupeň abstrakce
Pamětné spoje
Písemné algoritmy
Aplikační úlohy

#### d) Aplikace

Řešení jednoduchých úloh z běžného praktického života
Uvědomělé používání jednotlivých operací
Práce s veličinami a jednotkami měr
Využívání odhadů
Matematické modely reálných situací a jejich interpretace v realitě

### 3.2. Budování pojmu přirozeného čísla v mladším školním věku

V kapitole 2 byl přiblížen proces budování přirozeného čísla prostřednictvím činností v předškolním věku. Na tuto zkušenost děti navazují v prvním ročníku základní školy, jejich zkušenosti se upřesňují a postupně přecházejí od činností charakteristických hrou k činnostem a poznatkům založených na základě myšlenkových operací. I když jsou zpočátku činnosti a myšlení založeny na názornosti a konkrétnosti, dochází postupně k abstrakci tak, aby děti pochopily pojem přirozeného čísla v jeho obecnosti a všech významech.

#### 3.2.1. Teoretická podstata pojmu přirozeného čísla

Teoretické základy budování pojmu přirozeného čísla je možné najít v publikacích týkajících se aritmetiky nebo algebry. Uvedme jen stručně možnosti jejich zavedení.

- A) Přirozená čísla se zavádějí jako kardinální čísla konečných množin. V tomto případě je třeba chápat pojmy zobrazení, ekvivalentní množiny, kardinální číslo množiny  $A$ . Kardinální číslo množiny  $A$  je třída, do které patří množina  $A$  a všechny množiny s ní ekvivalentní. Dvě množiny jsou ekvivalentní, právě když existuje prosté zobrazení jedné množiny na druhou.

o o o o  
x x x x  
n n n n  
l l l l

B) Přirozená čísla se zavádějí jako ordinální čísla konečných, dobře uspořádaných množin. Je třeba chápat pojmy uspořádaná množina, podobné zobrazení, ordinální číslo

○	○	○	nebo	○	○	○
jedna	dvě	tři		jedna	čtyři	sedm
○		○		○	○	
čtyři		pět		dvě	pět	
○		○		○	○	
šest		sedm		tři	šest	

Každému prvku přiřadíme jedno slovo z uspořádané řady číslovek – jedna, dvě, tři, ..., prvky počítáme po jedné, žádný nesmíme vynechat a žádný nesmíme počítat dvakrát a nezáleží na tom, jakým směrem při počítání postupujeme.

C) Přirozená čísla se zavádějí pomocí prvků Peanovy množiny.

Nejprve vytvoříme představu čísla 1 (např. máme jednu hlavu, jednu maminku, jedno je sluníčko). K jednomu prvku přidáme další – vytvoříme číslo 2, ke dvěma prvkům přidáme další, vytvoříme číslo 3 a tak postupujeme stále dál. Pomocí čísla 1 tak prostřednictvím vytvořením následovníka dostaneme množinu všech přirozených čísel.

Současně s vytvářením pojmu čísla se děti učí psát příslušnou číslici.

### 3.2.2. Význam čísla, číselné soustavy

Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, děti se od malička setkávají s čísly v různých významech. Na prvním stupni ZŠ by se měly tyto představy ujasnit poměrně přesně, aby dítě mohlo s čísly pracovat dál (zejména provádět operace s čísly). Znovu tedy zopakujeme význam čísla:

Číslo ve významu množství – tj. počtu prvků určité skupiny (množiny) – 5 dětí, 3 rohlíky, 4 jablka apod.

Číslo jako veličina – 2 kg mouky, 3 litry mléka, 75 Kč, 37° C.

Číslo jako adresa – např. bydlíme v domě číslo 8, v pátém poschodí.

Číslo jako kód – pin platební karty, zabezpečovací kód, telefonní číslo.

Číslo jako operátor – o kolik, kolikrát (více, méně).

V prvním ročníku se seznamují děti s čísly do dvaceti a již při vytváření čísel 10- 20 začínají děti chápat podstatu poziční číselné soustavy desítkové.

## Číselné soustavy

V současnosti používáme poziční desítkovou soustavu, to znamená, že deset prvků nižšího řádu tvoří jednu jednotku vyššího řádu, např. deset jednotek je jedna desítka, deset desítek je jedna stovka, atd. a v zápisu čísla záleží na pozici jednotlivých číslic. Každá číslice v zápisu čísla má dvě hodnoty, hodnotu vlastní (počet jednotek příslušného řádu) a hodnotu místní (na kterém místě v zápisu čísla je uvedena). Např. v čísla 333 je vlastní hodnota vždy 3, ale místní hodnota každé z číslice je jiná – 3 jednotky, 3 desítky, 3 stovky.

V historii se používalo mnoho různých číselných soustav. Některé byly adiční (nezáleželo na umístění znaků, hodnota čísla se určila sečtením hodnot jednotlivých znaků). Takovou soustavou byla např. číselná soustava starých Egyptanů. Požívaly se soustavy o různých základech, např. Babylóňané používali soustavu o základu šedesát.

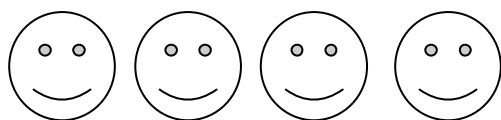
Didakticky se tato teorie transformuje takto:  
Nejprve budujeme čísla do pěti, potom do deseti.

A) Např. vytváříme číslo čtyři:

1. Děti se ukazují různé skupiny konkrétních předmětů, učí se chápat pojem „stejně“  
(např. kaštiny, jablka, židle, děti, aj.)

2. Dítě přiřazuje symboly

Ke konkrétním předmětům přiřazuje nejprve obrázky a potom symboly, např.



o o o o,

l l l l (puntíky, tyčinky, čárky aj.).

3. Všechny skupiny (předmětů nebo symbolů), které vytvoříme tak, že mají stejně prvků dají se vzájemně jednoznačně přiřadit), určují přirozené číslo.

4. Nezáleží na konfiguraci prvků – např. pomocí čtyř tyčinek nebo pomocí čtyř čtverců nebo krychlí můžeme vytvářet různé sestavy, tvar je jiný, ale počet předmětů je stejný.

5. U dítěte se postupně vytváří takový stupeň abstrakce, že při vyslovení slova „čtyři“ nemusí vidět žádné konkrétní předměty a chápe je jako celou třídu prvků, kterých je stejně (jsou čtyři). Konkrétní předměty jsou reprezentanty čísla, např. reprezentantem čísla 4 mohou být 4 auta, 4 jablka, 4 děti apod.
6. Současně s budováním pojmu čísla se dítě učí názvy čísel vyslovovat, učí se číslovky, a také zapisovat čísla pomocí číslic.

B) Jestliže je na hromádce nebo na obrázku více prvků, a dítě nepozná na první pohled kolik jich je, zpravidla je počítá po jedné. Ukazuje na předměty a zároveň každému předmětu přiřazuje jedno slovo z řady číslovek: jedna, dvě, tři, čtyři, pět atd. Poslední vyslovená číslovka určí počet předmětů ve skupině. Počítání po jedné musí být opřeno o konkrétní představu čísla.

### **Číslo 0**

Číslo 0 se je třeba vytvářet analogicky jako každé jiné číslo – jako počet prvků prázdné množiny. Např. na jednom talíři jsou tři koblihy – označíme číslem 3, druhý talíř je prázdný – počet označíme číslem 0.

Číslo 0 je možné vyvodit také odčítáním dvou sobě rovných čísel, např.

$$3 - 3 = 0.$$

Při vytváření čísla 0 není vhodné používat pojmy „nic“ nebo „žádný“, protože pak se děti k nule chovají jako k „ničemu“ a neuznávají ji ani jako číslo, ani jako pozici v zápisu čísla. Nerozliší zápisy např. 32, 302. (Přitom stačí zapsat nulu k jinému nenulovému číslu zprava a číslo se desetkrát zvětší – např. 7, 70).

Čísla 1 – 10 je vhodné modelovat také pomocí dalších grafických znázornění, např. čísla figurální – trojúhelníková, čtvercová apod.

### **Číslice**

K zápisu čísel používáme znaky – číslice, kterých je v desítkové soustavě 10 – jednička, dvojka, ... devítka, nula. Pomocí těchto deseti znaků zapíšeme jakékoliv přirozené číslo.

Psaní číslic je pro děti náročné, zejména dvojka, osmička, proto je vhodné rozfázování psaní jednotlivých částí číslic. Některým dětem dělá problémy rozlišení např. 6 a 9, 2 a 5, děti s poruchou pravolevé orientace mají problémy se zápisem čísel 1, 3, 7. V současnosti je také třeba, aby děti zvládly digitální zápis čísel, zejména vzhledem k jejich velmi častému používání na různých přístrojích.

Důsledné rozlišování pojmů „číslo“ a „číslice“ přispívá k lepšímu chápání u dětí (např. ve školské matematice není vhodné používání výrazů patnáctka, třicítka apod. – neboť číslo 15 je zapsáno dvěma číslicemi – jedničkou a pětkou, patnáctka není číslice).

### **Čísla 10 – 20**

Při rozšíření číselného oboru do dvaceti je třeba si uvědomit, že zde se začínají vytvářet základy poziční číselné soustavy desítkové. V zápisu čísla 15 má „1“ již jiné postavení, neboť označuje jednu desítku, což je 10 jednotek. Děti potřebují mnoho konkrétních modelů, aby viděly 10 jednotek jako jednu desítku (vhodné jsou např. svazky brček na pití). Méně vhodné jsou pro některé děti s poruchou učení v první fázi papírové kartičky nebo modely peněz, protože dítě vidí jednu kartičku nebo jednu desetikorunu a nevidí za jednou desítkou 10 jednotek.

### **Čísla 0 – 100**

Vycházíme nejprve z aplikací – kde se dítě setká s čísly do sta (věk rodičů, prarodičů, počet dětí ve třídě, počet zubů, hmotnost dítěte v kilogramech, počet dní v měsíci, ceny některého zboží aj.)

Zápis dvojciferných čísel vyžaduje jasnou představu o desítkách a jednotkách v dvojciferném čísle – dětem dělá problémy např. rozlišit čísla 26 a 62. Představa je nutná i pro chápání řady čísel do sta, protože pokud ji děti nemají, nedokáží přecházet mezi jednotlivými desítkami (např. počítají třicet osm, třicet devět, třicet deset ...) a mají problémy zejména s čísly od 50 do 100. Řadu čísel by měly umět vyjmenovat vždy od určitého čísla k jinému vzestupně i sestupně.

### **Čísla 0 – 1 000**

Motivací čísel do tisíce může být počet žáků ve škole, v menší obci počet obyvatel obce, počet dnů v roce, výška dítěte v centimetrech, délka skoku do dálky v cm, ceny některého zboží aj.). Pokud se u dítěte objevují problémy při chápání čísel do 100, analogické problémy se vyskytnou při chápání čísel do tisíce.

### **Čísla 0 – 1 000 000**

Pro správné pochopení čísel větších než 1 000 je nutná vhodná motivace a dále pochopení principu poziční desítkové soustavy a zápisu čísla v ní. Jde zejména o pochopení, že deset jednotek nižšího řádu tvoří jednu jednotku vyššího řádu (deset jednotek tvoří jednu desítku, deset desítek tvoří jednu stovku, atd.) a dále, že na každém místě v zápisu čísla může být pouze jedna číslice. K znázornění velkých čísel můžeme využít řádové počítadlo.

### 3.3. Problémy dětí v oblasti chápání pojmu přirozeného čísla:

- dítě neumí vytvořit skupinu předmětů o daném počtu prvků,
- neumí určit počet prvků dané skupiny,
- při počítání po jedné je vázáno na konkrétní předměty, takže při změně konfigurace těchto předmětů uvádí to číslo, které mu bylo přiřazeno poprvé (např. při počítání panenek počítá: jedna, dvě, tři, čtyř, pět avšak když se panenky přemístí, počítá např. jedna, čtyři, dvě, pět, tři),
- dítě neumí vyjmenovat řadu čísel v přirozeném uspořádání vzestupně i sestupně,
- dítě není schopno zbavit s konkrétních představ a nevytvoří se u něj pojem čísla,
- nepochopí podstatu poziční desítkové soustavy.

### Problémy dětí se zápisem čísla

- problémy se zvládnutím psaní číslic, psaní číslic v přiměřené velikosti,
- problémy s rozlišením číslic tvarově podobných, např. 6, 9 3, 8 3, 5 2, 5 v zápisu číslicemi arabskými i v digitálním tvaru,
- problémy s pravolevou orientací – u číslic jednostranně orientovaných (např. 1, 3, 7) neví, na kterou stranu se píše,
- nerozlišování řádu číslic – u dvojciferných čísel nerozlišuje např. 35 a 53 , 435 a 453 apod.,
- chybný zápis čísel s nulami – např. místo 305 píše buď 35 nebo 3005 (slyší tři sta pět a tak to zapíše),
- nepochopení čísla jako celku – např. v zápisu čísla 647 dítě vidí jen izolované číslice 6, 4, 7 a nikoliv číslo jako celek,
- neschopnost psát čísla podle diktátu.

Dále je důležité správně budovat pojmy číslo a číslice a správně je rozlišovat. Číslic (cifer), tj. znaků používáme 10 (nula, jednička, dvojka, ... devítka) a pomocí těchto deseti znaků umíme zapsat jakékoliv číslo. Vyjádření jako „patnáctka“, „dvacítka“ nemají ve školské matematice místo. Číslo 15 je zapsáno pomocí dvou znaků – jedničky a pětky, ale znak pro patnáctku neexistuje. Na otázku, zda může být trojka větší než pětka můžeme odpovědět kladně, protože znaky mohou takto být zapsány: 3, 5 , ale číslo 3 je vždy menší než číslo 5.

### Počítání po jedné (po desítkách, stovkách, atd.)

Pro zvládnutí posloupnosti přirozených čísel a pro počítání po jedné je třeba, aby děti znaly bezpečně uspořádanou řadu slov „jedna, dvě, tři, čtyři,... „ , analogicky pak „deset, dvacet, třicet...“ a např. „dvacet jedna, dvacet dva, ...“, aby slova nezaměňovaly a aby za každým vysloveným sloven viděly vždy počet



prvků. Řady čísel se učí vyjmenovat vzestupně i sestupně (to má význam pro další operace s přirozenými čísly, zejména pro odčítání). Uvědomme si však náročnost vyjmenovat číselnou řadu sestupně. Řekněte si např. nějakou větu, která má 15 slov a potom se pokuste říci ji pozpátku. Koncentrace na jednotlivá slova je veliká a často si musíte větu opakovat, abyste zjistili, v jakém uspořádání jsou jednotlivá slova. Podobně náročné je pro dítě vyjmenovat číselnou řadu od 20 do 1.

Dále je důležité, aby děti:

- konkrétní předměty nepočítaly od čísla 0,
- při počítání konkrétních předmětů nepočítaly některý předmět dvakrát,
- aby počítaly správně i při změně konfigurace předmětů.

### **Problémy dětí se čtením čísel**

- neumí rozlišit a přečíst jednotlivé znaky – číslice,
- neumí přečíst víceciferná čísla, např. 2 008 čte dva osm, nebo dva nula nula osm,  
2 010 čte dva deset, nebo dva nula jedna nula, dvacet deset apod.,
- neorientuje se ve větších číslech, např. se čtením čísel řádu statisíců a větších si neví rady,
- neumí skloňovat číslovky.

### **3. 4. Reedukační postupy**

1. Manipulativní činnosti s konkrétními předměty, s obrázky, se symboly. Využíváme běžných denních činností – např. prostírání nádobí k obědu, hry dětí ve skupinách, práce s krabičkami, obálkami apod., kdy děti doplňují předměty tak, aby v nich byl stanovený počet (nejprve do pěti, potom do deseti). využívání znázornění čísel od 10 do 20 pomocí svazků (např. brček, dřívěk apod.). Nezbytné je zapojení všech smyslů (hmat, sluch, zrak, pohyb) a poté matematický zápis činnosti.

2. Důležité jsou pohádky, ve kterých hraje roli počet (např. 7 trpaslíků), nebo posloupnost dějů (např. O kohoutkovi a slepičce).

3. Podpůrné jsou různé říkánky a písničky, ve kterých se vyskytují číselné údaje (např. Jedna, dvě, Honza jde ..., Jedna, dvě, tři, čtyři, pět, cos to Janku, cos to sněd, Měla babka čtyři jabka ..., apod.)

4. K chápání víceciferných čísel je třeba využívat speciální kartičky, např. číslo 753 se znázorní pomocí kartiček, které se kladou na sebe:

700
50

3		
7	5	3

5. Využíváme různé typy počítadel (dvacítkové, stovkové, řádové), avšak práci s počítadlem je třeba dítě naučit. Vhodná jsou např. stovková počítadla, u kterých jsou různobarevné kuličky vždy po pěti na jednom drátě.

6. Ke správnému zvládnutí posloupnosti přirozených čísel využíváme kartičky k doplňování jednoho nebo více čísel, a to vzestupně i sestupně, zejména procvičujeme přechody přes desítky, stovky apod., např.

28				32
----	--	--	--	----

299		301
-----	--	-----

Cílem všech činností je, aby děti uměly vytvořit skupinu o daném počtu prvků, aby dokázaly určit počet prvků v dané skupině, aby uměly zapsat dané číslo a aby docházelo k postupné abstrakci potřebné pro pochopení pojmu přirozeného čísla. Dále je třeba, aby děti zvládly vyjmenovat řadu čísel v uspořádání vzestupně i sestupně. Je třeba uvědomit si, že vyjmenovat řadu čísel od 20 do 1 je pro dítě stejně obtížné, jako pro dospělého říkat pozpátku nějakou delší větou.

## 4. POROVNÁVÁNÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL

*Příběh jedenáctý:*

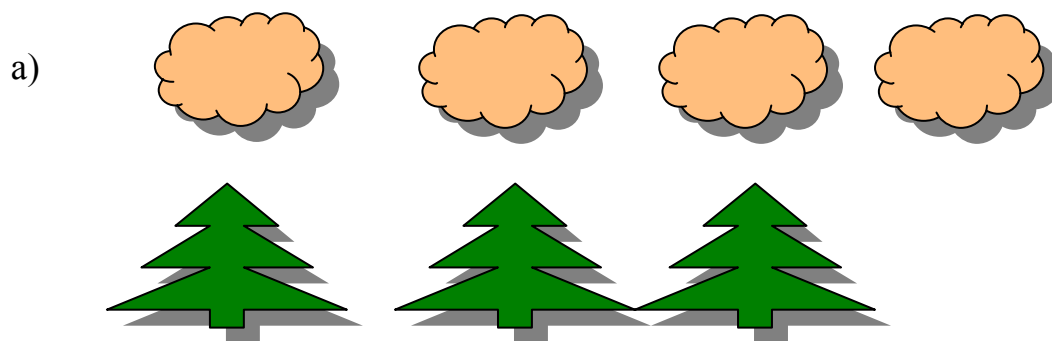
*Kuba je žákem druhé třídy. Dělalí mu problémy větší, menší v souvislosti s čísly, stále neví, zda 7 je menší či větší než 8, neví si rady se znaky „>“, „<“,*

Porovnávání přirozených čísel se provádí několika způsoby. Využívá se pojmu zobrazení, nebo se k porovnávání přirozených čísel používá číselná osa a nebo se využívá zápisu čísla v desítkové soustavě.

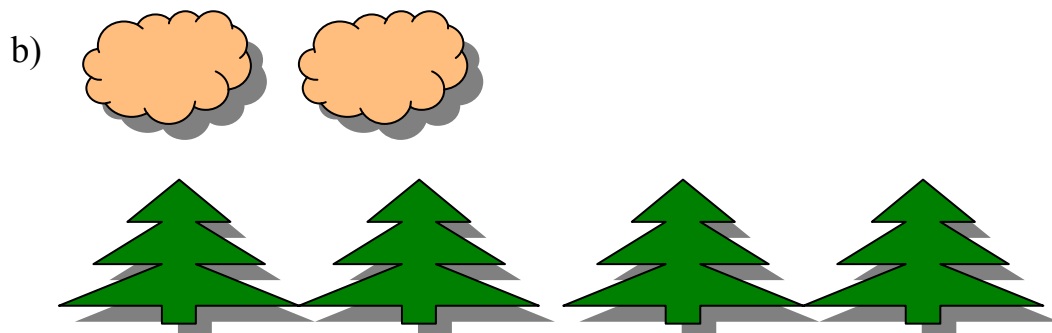
K základním dovednostem žáka patří umět rozhodnout, která skupina má více či méně prvků a které číslo je větší či menší. Aby děti neměly problémy, které by byly způsobeny nedostatečnou nebo nevhodnou výukou, je třeba zachovat určitý metodický postup:

- Nejprve se děti učí chápat vztahy „více“, „méně“, „stejně“. K tomu se využívá obrázků a vytváření dvojic (bez čísel).
- Teprve ve druhé fázi se ke skupinám prvků přiřadí čísla a porovnávají se přirozená čísla pomocí vztahů „větší“, „menší“, „rovná se“.
- Zvládne se technika používání znaků „>“, „<“, „=“.

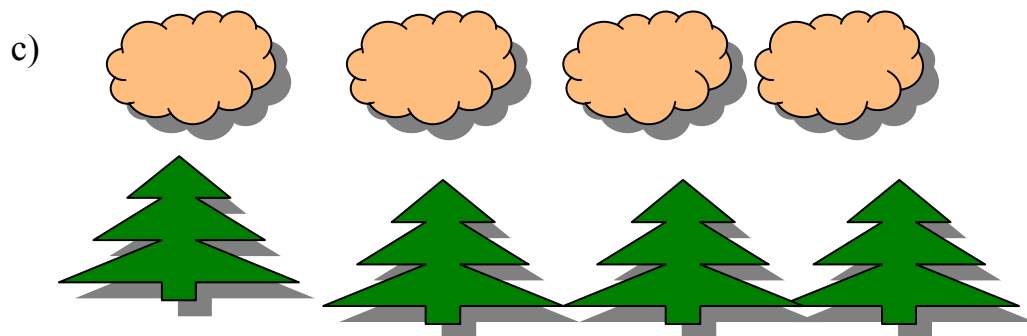
### 4. 1. Porovnávání přirozených čísel s využitím zobrazení (tvoření dvojic) - chápání vztahů „více“, „méně“, „stejně“, avšak nejprve bez čísel.



Obláčků je více než stromů.



Obláčků je méně než stromů.



Obláčků je stejně jako stromů.

Takových podnětů na různých činnostech obrázcích potřebuje dítě mnoho. Využívá se činností s konkrétními předměty, zejména s hračkami (např. panenky – kočárky, auta – garáže, talíře – lžičky, děvčata - chlapci aj.) dále pak modelování a kreslení. Neustále se pracuje s objekty bez čísel a zdůrazňují se vztahy „více“, „méně“, „stejně“.

Teprve ve druhé fázi se skupinám objektů přiřadí číslo a děti porovnávají počet předmětů:

$$4 > 3$$

$$2 < 4$$

$$4 = 4$$

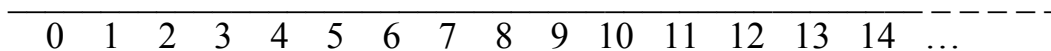
Varujme se chybného grafického znázornění:

Pozor: Mezi objekty nelze umisťovat znaménka pro porovnávání nebo rovnost – předměty se dobře nerovnají ani neporovnávají, porovnáváme pouze jejich počet.

## 4. 2. Porovnávání přirozených čísel pomocí číselné osy

Nejprve je třeba si uvědomit, co je číselná osa. Obecně je číselná osa přímka, na které znázorňujeme obrazy reálných čísel. Každému reálnému číslu je přiřazen právě jeden bod na přímce a naopak každému bodu přímky odpovídá právě jedno reálné číslo. Pokud pracujeme pouze s čísly přirozenými, tak znázorňujeme číselnou osu jako polopřímku, na které je počátek polopřímky

obrazem čísla 0 a každému přirozenému číslu je přiřazen právě jeden bod (nikoliv úsečka).



Na číselné ose porovnáváme čísla podle jejich vzájemné polohy (nikoliv podle vzdálenosti od počátku – od 0).

**Ze dvou čísel znázorněných na číselné ose je větší to, jehož obraz leží více vpravo.**

#### 4. 3. Porovnávání přirozených čísel pomocí zápisu v desítkové soustavě

- a) U přirozených čísel platí, že ze dvou čísel je větší to, v jehož zápisu je více cifer, např.

$$7\ 542 < 12\ 509.$$

- b) Pokud mají čísla ve svém zápisu stejný počet číslic, porovnáváme počet jednotek příslušných řádů, počínaje nejvyšším, až najdeme ten řád, ve kterém se liší, např.

Porovnáváme čísla 49 567 a 49 576. Desetitisíců, tisíců a stovek je v obou číslech stejně, čísla se liší až počtem desítek. Protože  $6 < 7$ , je

$$49\ 567 < 49\ 576.$$

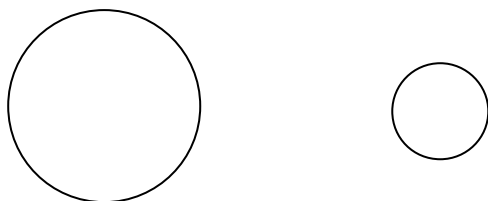
#### 4. 4. Problémy dětí při porovnávání přirozených čísel

- a) **Neschopnost používání znaků  $<$ ,  $>$ .**

Mnoho dětí má problémy s pochopením a místěním znaků nerovnosti, ač se jim učitelé snaží nabízet nejrůznější mnemotechnické pomůcky.

- b) **Nerozlišování porovnávání tvaru předmětů a jejich počtu.**

Děti nejprve porovnávají předměty – např. velký míč, malý míč, velký kruh, malý kruh.

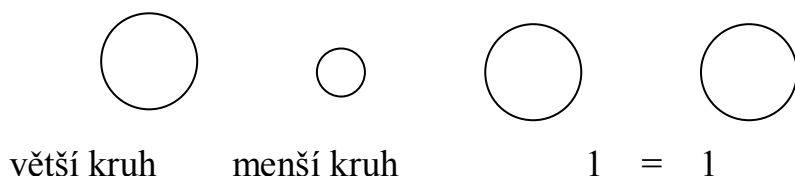


Chybné je, pokud mezi předměty umístíme znak nerovnosti, eventuelně rovnosti, protože dětem tak znemožníme rozlišit porovnávání počtu prvků a porovnávání jejich velikosti.

Chybná znázornění tedy jsou:



Správně:



Pokud nepoužíváme grafického znázornění správně, dítě má problém při řešení úlohy typu, kdy vidí tři malé kruhy a jeden velký. Tři malé kruhy mu připadají menší než jeden velký, avšak většinou v tomto případě má porovnávat počet kruhů.



Má tedy zapsat  $3 > 1$ .

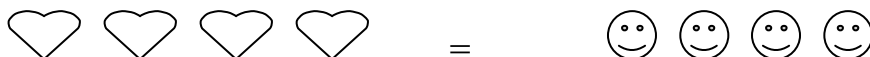
Nesprávné je i znázornění typu  $OOOOO > OOO$  ve smyslu  $5 > 3$ , nebo  $OOOOO > 3$ .

Správně:  $OOOOO \quad OOO$   
 $5 \quad > \quad 3$

nebo lépe

OOOOO	5
OOO	3
5 >	3

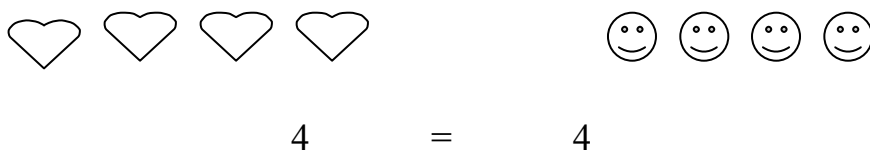
**c) Nepochopení rozdílu mezi rovností množin a ekvivalencí množin.**  
 Skupiny, které mají stejně prvků, se sobě nerovnají, ale rovná se pouze počet těchto prvků. Chybné je tedy znázornění typu



neboť ty předměty se sobě evidentně nerovnají.

Chybné je i znázornění  $OOOOO = 5$   
 Zde je nesprávně použit symbol pro rovnost „ = „

Správné znázornění:



Nebo

OOOO	4
XXXX	4
4 =	4

**d) Chybné používání číselné osy při porovnávání přirozených čísel.**  
 Pokud se děti naučí u přirozených čísel porovnávat čísla pomocí vzdálenosti od nuly - (ze dvou čísel je větší to, které je dále od nuly), má v budoucnu velké problémy při porovnávání záporných čísel, neboť tam tato poučka neplatí.

**e) Při porovnávání čísel pomocí zápisu někdy převažují některé číslice.**

Např.  $985 > 1123$ , protože  $9 > 1$  (bez ohledu na příslušné řády).

#### 4. 5. Reedukační postupy

1. Zásadně využívat správného znázornění pomocí konkrétních předmětů, jak bylo uvedeno výše. Nezaměňovat porovnávání velikosti předmětů a jejich počtu.
2. Vytváření skupin prvků podle požadavků – např.  
Děvčat je 6, chlapců je méně. Kolik může být chlapců? – vymodeluj, znázorni na obrázku, zapiš příslušnou nerovnost.  
Králíků je 5, nakresli více mrkví, než je králíků. Zapiš.  
Slepíc je 8, nakresli méně vajec než je slepic. Zapiš.
3. V případě, že děti správně využívají číselné osy, je možné ji k porovnávání přirozených čísel využít.
4. Znázorňování obrázků k zapsané nerovnosti, např. k zápisu  $7 > 5$  nakresli obrázek.
5. Důležité je chápání obou zápisů nerovností, např.  $3 < 5$ ,  $5 > 3$ .
6. Při porovnávání víceciferných čísel vždy zdůrazňovat příslušné řády, např. 9 stovek, 1 tisíc apod.
7. Při eventuelních chybách požádat dítě o znázornění situace (konkrétní předměty, kartičky, modely peněz apod.) – zda dítě vůbec chápe požadovaný úkol.

Návaznosti na porovnávání čísel a zápis nerovností se řeší úlohy typu „o kolik má více (méně)“, eventuelně „kolikrát má více (méně)“. Tyto úlohy je vhodné zařazovat až po probraných příslušných operacích. Pokud však děti samy spontánně zvládnou tyto situace dříve, nebráníme jim.

## 5. ZAOKROUHLOVÁNÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL

*Příběh dvanáctý :*

*Andělka má zaokrouhlit číslo 46 275 na tisíce a zapiše: 46 075.*

*Andělka neví přesně, jak se zaokrouhlují čísla a pracuje pouze se dvěma aktuálními řády. Není jí jasný postup při zaokrouhlování přirozených čísel, ani smysl této činnosti.*

### 5.1. Teoretická východiska

Zaokrouhlování přirozených čísel se využívá průběžně během celé výuky matematiky. Má význam jednak praktický, jednak se používá k provádění odhadů výpočtů.

Mnoho čísel, kterých v praxi užíváme, neumíme určit přesně. Např. počet obyvatel státu, rozlohy určitých území, výsledky měření apod. Pracujeme s čísly, která jsou přibližná.



**Zaokrouhlování přirozených čísel je nahrazení čísla přesného číslem jemu blízkým, a to podle určitých pravidel.** Pravidla jsou stanovena státní normou.

Jestliže zaokrouhlujeme přirozené číslo na určitý řád, zajímá nás počet jednotek řádu o jednu nižšího, např. máme zaokrouhlit číslo 26 479 na tisíce. Zajímá nás počet stovek.

Pokud je počet jednotek řádu o jednu nižšího než je řád zaokrouhlovaný 0, 1, 2, 3 nebo 4, počet jednotek zaokrouhlovaného řádu ponecháme a na místa nižších řádů zapíšeme nuly.

$$26\ 479 \approx 26\ 000$$

Čteme: číslo 26 479 se po zaokrouhlení na tisíce rovná 26 000.

Tomuto zaokrouhlování říkáme zaokrouhlování dolů.

Pokud je na místě řádu o jednu nižším, než je řád zaokrouhlovaný, některé z čísel 5, 6, 7, 8 nebo 9, počet jednotek zaokrouhlovaného řádu zvětšíme o jednu a na místa nižších řádů zapíšeme nuly, např. číslo 26 789 zaokrouhlené na tisíce:

$$26\ 789 \approx 27\ 000$$

Čteme: číslo 26 789 se po zaokrouhlení rovná 27 000.

Tomuto zaokrouhlování říkáme zaokrouhlování nahoru.

*Poznámka 1.* V běžném životě se používají i jiná pravidla pro zaokrouhlování, ta však musí být explicitně a srozumitelně vyjádřena (např. v daňových priznáních, placení zdravotního pojištění aj.).

*Poznámka 2.*

- Zaokrouhlené číslo představuje vždy určitý interval, např. číslo 250 získáme po zaokrouhlení čísel 245 až 254 na desítky.

- Zaokrouhlování postupné, v několika stupních, je nepřípustné, může vést k chybám. Např. číslo 34 498 správně zaokrouhlené na tisíce je 34 000. Kdybychom zaokrouhlovali nejprve na desítky, dostali bychom 34 500, kdyby se dále toto číslo zaokrouhlilo na tisíce, dostaneme 35 000, což je chybně.

- Názorně můžeme ilustrovat zaokrouhlování čísel na číselné ose.

## 5.2 Problémy dětí při zaokrouhlování

- Děti pracují pouze se dvěma číslicemi zapsanými na potřebných řádech, ostatní číslice nižších řádů opíší, např.:  $942\ 567 \approx 940\ 567$ .

- Pracují podle nesprávné analogie – při zaokrouhlování nahoru počet jednotek zaokrouhlovaného řádu o jednu zvýší, při zaokrouhlování dolů pak počet jednotek o jednu sníží, např.:  $942\ 567 \approx 930\ 000$ .

- Pokud mají čísla zapsaná v tabulce a mají dané číslo zaokrouhlit na desítky, stovky, tisíce, atd., zaokrouhlují již zaokrouhlené číslo (zaokrouhlování postupné).

### 5.3. Reedukační postupy

1. Vycházíme z praktických příkladů, ve kterých se využívá zaokrouhlování, např. přibližná cena nákupu, počet lidí na sportovním utkání apod., podle zájmu dětí.
2. Pro grafické znázornění využijeme číselné osy s vhodnými figurkami (ke kterému číslu má blíž?).
3. Využíváme regionálních údajů – přibližný počet obyvatel místa bydliště, výška budov, ceny automobilů, aj.
4. Zaokrouhlování využíváme k odhadu výsledků početních operací.

## 6. ROZKLADY ČÍSEL

Před tím, než se budeme věnovat operacím s přirozenými čísly, uvedeme důležitou dovednost, která dětem usnadní počítání, a tou je provádění rozkladů čísel. Dítě se během výuky matematiky seznamuje s různými rozklady čísel, kterých pak využívá ke snadnějšímu počítání při operacích s přirozenými čísly.

### 6.1. Rozklad čísla na dvě části

Rozklady tohoto typu je třeba zvládnout, aby bylo možné provádět sčítání a odčítání s přechodem přes základ deset. Začínáme hraním s konkrétními předměty, např.

Máme 6 korálů a máme je rozdělit do dvou krabiček. Kolika způsoby to můžeme udělat:

OOOOOO	
--------	--

OOOOO	O
-------	---

OOOO	OO
------	----

OOO	OOO
-----	-----

OO	OOOO
----	------

O	OOOOO
---	-------

	OOOOOO
--	--------

6    6    6        6    6    6        6

$\frown$   $\frown$   $\frown$   $\frown$   $\frown$   $\frown$   $\frown$   
 6 0 5 1 4 2 3 3 2 4 1 5 0 6

K nácvičku těchto rozkladů můžeme využít i jiných činností, např. tleskání rukama napravo a nalevo, hraní hlubokých a vysokých tónů na klavíru, vytváření skupin dětí apod. Důležité je, aby děti příslušný rozklad vždy zapsaly a k danému rozkladu naopak dokázaly vytvořit skupiny předmětů.

## 6. 2. Rozklad čísla na desítky a jednotky

Sčítání a odčítání v oboru do sta vyžaduje zvládnutí rozkladů dvojciferných čísel na desítky a jednotky.

a) Začínáme s čísly v oboru do dvaceti, např. 16 rozkládáme na 10 a 6 – ilustrujeme názorně, aby děti vždy viděly 10 prvků jako jednu desítku (brčka, dřívka apod.).

b) Rozkládáme dvojciferná čísla, např. 48 na 40 a 8, 84 na 80 a 4.

Procvičujeme často příklady, ve kterých mají děti problémy s nerozlišováním desítek a jednotek, např. nerozlišují 34 a 43.

## 6. 3. Rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě

U víceciferných čísel se děti učí rozvinutý zápis čísel – posiluje se tím počet jednotek příslušných řádů,

např.  $4\ 628 = 4\ 000 + 600 + 20 + 8$

$$4\ 628 = 4 \cdot 1\ 000 + 6 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 8 \cdot 1.$$

Naopak z rozvinutého zápisu zapisují zápis zkrácený,

např.  $5 \cdot 10\ 000 + 9 \cdot 1\ 000 + 0 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1 = 59\ 073$

Zde činí problémy zápisy čísel, ve kterých nejsou uvedeny řády s nulami,

např.  $7 \cdot 1\ 000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 1 = 7\ 405$  děti však mohou zapsat chybně 745.

Podobně  $7 \cdot 1\ 000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 = 7\ 450$  opět zapíše chybně jako 745.

Je tedy vhodnější zapisovat všechny řády, tedy i ty, jejichž počet je 0.

V budoucnu budou tyto rozklady využívat při zápis velkých čísel pomocí mocnin deseti.

## 6. 4. Rozklad čísla na součin činitelů

V souvislosti s výukou násobek vnímají děti také rozklad čísel na součin činitelů.

Všechna čísla můžeme zapsat jako součin činitelů, některá právě jedním způsobem, jiná více způsoby, např.

$$5 = 1 \cdot 5$$

$$9 = 1 \cdot 9 \quad 9 = 3 \cdot 3$$

$$12 = 1 \cdot 12 \quad 12 = 2 \cdot 6 \quad 12 = 4 \cdot 3$$

$$24 = 1 \cdot 24 \quad 24 = 2 \cdot 12 \quad 24 = 3 \cdot 8 \quad 24 = 4 \cdot 6$$

Je to důležité jednak k chápání vztahů a souvislostí, jednak do budoucna k pochopení pojmů prvočíslo a číslo složené.

### **6. 5. Rozklad čísla na dvě čísla pro dělení mimo obor násobitek**

K pamětnému dělení mimo obor násobitek rozkládáme čísla na dvě vhodná, abychom mohli provést dělení (zpravidla je první číslo rozkladu desetinasobek nebo dvacetinasobek dělitele).

Např.  $76 : 4$  číslo 76 rozložíme na 40 a 36, obě tato čísla umíme vydělit čtyřmi.

$$76 : 4 = (40 : 4) + (36 : 4) = 10 + 9 = 19$$

Podobně např.

$$85 : 5 = (50 : 5) + (35 : 5) = 10 + 7 = 17$$

$$72 : 3 = (60 : 3) + (12 : 3) = 20 + 4 = 24$$

